ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Réciproque du théorème de Sazonov-Minlos dans des cas non hilbertiens

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 266 (1968), p. A7-A9.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 7-9 (3 janvier 1968). Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Réciproque du théorème de Sazonov-Minlos dans des cas non hilbertiens.* Note (*) de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Paul Lévy.

Nous démontrons ici la réciproque du théorème démontré dans une Note antérieure; nous utilisons les mêmes notations. Le corollaire 2 du premier théorème est particulièrement intéressant.

On sait que, sur $\mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-|x|^p}$ est de type positif; soit $\theta = \theta_p$ son image de Fourier, fonction continue > 0. On sait aussi qu'il existe des constantes A, B, telles que $A/|\xi|^{p+1} \leqq \theta_p(\xi) \leqq B/|\xi|^{p+1}$ pour $|\xi| \geqq 1$. Pour $p = 1$, $\theta_1(\xi) = 2/(1 + 4\pi^2\xi^2)$.

LEMME. — *Soit* $1 \leqq p < 2$. *Il existe deux constantes universelles* Λ, δ, $\Lambda > 0$, $0 < \delta < 1$, *ayant la propriété suivante. Si* γ *est la mesure* $\theta_p(x_1)\,\theta_p(x_2)\ldots\theta_p(x_m)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m$, *sur* $\mathbf{R}^m$, *si* $(\alpha_n)_{1 \leqq n \leqq m}$ *est une suite de nombres réels, avec* $U = \sum_{n=1}^{m} \beta_n$, $\beta_n = 1$ *si* $|\alpha_n| > 1$, *et* $\beta_n = |\alpha_n|^p\,[1 + |\log(1/|\alpha_n|)|]$ *si* $|\alpha_n| \leqq 1$, *alors, si* $U > \Lambda$, γ *n'est pas concentrée à* δ *près sur la boule* $B_2 = \left\{ x \in \mathbf{R}^m ; \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n x_n|^p \leqq 1 \right\}$ *de* $\mathbf{R}^m$.

THÉORÈME. — *Soit* $1 \leqq p < 2$. *Soit* $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels telle que* $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^p\,[1 + |\log(1/|\alpha_n|)|] = \infty$. *Alors l'opérateur u* :

$$(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

ou bien n'opère pas de $l^{p'}$ *dans* l^p, *ou, s'il opère, n'est pas radonifiant* [*pour* $p = 1$, l^∞ *est supposé muni de la topologie* $\sigma(l^\infty, l^1)$].

Démonstration du théorème. — En reprenant les notations du lemme, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = +\infty$. Considérons sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ la mesure produit $\gamma = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \theta(x_n)\,dx_n$. Elle définit une probabilité cylindrique sur $l^{p'}$, scalairement concentrée sur les boules. Le lemme montre que son image $u(\gamma)$, mesure de Radon sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, n'est concentrée à δ près sur aucune boule de l^p, donc n'est pas portée par l^p, donc n'est pas une mesure de Radon sur l^p, donc u n'est pas radonifiante.

COROLLAIRE 1. — *Soient* E, F, *des espaces vectoriels localement convexes,* F *quasi-complet. Soit u une application linéaire continue de* E *dans* F, *de la forme* $u = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e'_n \otimes f_n$, *où les* e'_n *sont dans une partie équicontinue de* E′, *les* f_n *bornés, et où* $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|\,[1 + |\log(1/|\alpha_n|)|] < +\infty$ (*ce qui implique que u soit nucléaire*); *alors u est radonifiante. La condition relative aux* α_n

est la meilleure possible (en particulier, un opérateur nucléaire n'est pas nécessairement radonifiant).

En effet, u se factorise par $E \to l^\infty$: l'application $e \mapsto (\langle e, e'_n \rangle)_{n \in \mathbf{N}}$, puis $l^\infty \to l^1$: multiplication par les α_n, qui est radonifiante, puis $l^1 \to F$: $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n$, d'où le résultat.

Le contre-exemple, lorsque $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| [1 + |\log(1/|\alpha_n|)|] = \infty$, est l'application $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de l^∞ dans l^1 $\left(\text{qui est pourtant nucléaire si } \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = +\infty\right)$.

COROLLAIRE 2. — *Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, d'enveloppe convexe bornée en probabilité. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| [1 + |\log(1/|\alpha_n|)|] < +\infty$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n X_n|$ est presque sûrement convergente. La condition sur les α_n est la meilleure possible.*

Démonstration. — Le fait que les X_n aient une enveloppe convexe bornée en mesure signifie exactement que, pour tout $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n X_n$ est convergente en probabilité. Sa somme $f(\xi)$ est une variable aléatoire réelle; donc $f : \xi \mapsto f(\xi)$ est une fonction aléatoire, indexée par l^1, et linéaire. Elle est limite d'une suite de fonctions aléatoires continues en probabilité, donc, d'après le théorème de Baire, elle est continue en probabilité sur l^1. Donc elle est associée à une mesure cylindrique μ sur l^∞ [muni de la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$], scalairement concentrée sur les boules. D'après la condition donnée sur les α_n, l'image $u(\mu)$ est une probabilité de Radon sur l^1, ce qui signifie exactement que $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n X_n|$ est presque sûrement convergente.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| [1 + |\log(1/|\alpha_n|)|] = +\infty$, le contre-exemple, compte tenu de la démonstration du lemme et du théorème 2, est celui qui avait été donné par Dudley [1] pour une question voisine, et qui m'a grandement servi à trouver cet énoncé; les X_n sont simplement des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Cauchy [puisque, pour $p = 1$, $\theta_1(x) = 2/1 + 4\pi^2 x^2$]. On aurait pu retrouver ce résultat en utilisant, au lieu du lemme antérieur, le théorème des trois séries de Kolmogorov, comme l'a fait Dudley. D'autre part, la série considérée, à cause du théorème de la probabilité 0 ou 1, n'étant pas presque sûrement convergente, est presque sûrement divergente, ce que ne montre pas la méthode basée sur le lemme.

Applications décomposables. — Soit E un espace localement convexe, $f : E' \to M(\Omega, m)$ une fonction aléatoire réelle indexée par E'; on dit qu'elle est décomposée, s'il existe une application φ de Ω dans E, telle que, pour tout $\xi \in E'$, $f(\xi)$ soit la m-classe de la fonction $\omega \mapsto \langle \varphi(\omega), \xi \rangle$; elle est mesurablement décomposée si φ est m-mesurable.

Théorème. — *Soit* E *souslinien; f est décomposée si et seulement si la probabilité cylindrique* μ *sur* E *associée à f est de Radon, et alors f est mesurablement décomposée* [2].

(M. Badrikian a généralisé : dans le premier « si », on peut remplacer la condition « E souslinien » par : « les parties compactes de E sont métrisables »).

Soit ensuite u une application linéaire faiblement continue de E dans F, soit ${}^t u$ sa transposée. Soit $\mathfrak{S}$ une famille de parties bornées de E. On dit que u est $\mathfrak{S}$-décomposante ou $\mathfrak{S}$-mesurablement décomposante si, pour toute $f : E'_{\mathfrak{S}} \to M(\Omega, m)$, linéaire et continue en probabilité, $f \circ {}^t u$ est décomposée (resp. mesurablement décomposée). Alors :

Corollaire 1. — *Si* F *est souslinien, u est* $\mathfrak{S}$*-radonifiante si et seulement si* ${}^t u$ *est* $\mathfrak{S}$*-décomposante, ou* $\mathfrak{S}$*-mesurablement décomposante.*

En prenant pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble de toutes les parties bornées, on déduit alors des théorèmes antérieurs :

Corollaire 2. — *Soit* $1 \leq p < 2$.

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels. L'application* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *applique* $l^{p'}$ *dans* l^p *et est décomposante ou mesurablement décomposante, si et seulement si* $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^p [1 + |\log(1/|\alpha_n|)|] < +\infty$.

Corollaire 3. — *Soient* E, F, *des espaces localement convexes,* F *quasi-complet. Soit u une application linéaire continue de* E *dans* F, *de la forme* $u = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e'_n \otimes f_n$, *où les* e'_n *sont dans une partie équicontinue, les* f_n *bornés, et* $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| [1 + |\log(1/|\alpha_n|)|] < +\infty$. *Alors* ${}^t u$ *est mesurablement décomposante. La condition sur les* α_n *est la meilleure possible.*

Il suffit encore d'utiliser une factorisation de u entre $E \to l^\infty \to l^1 \to F$, et le corollaire 2.

(*) Séance du 27 novembre 1967.

(1) Le contre-exemple de Dudley est relatif à $\alpha_n = 1/n \log^2 n$ $\left(\text{où } \sum_n \alpha_n < +\infty \text{ mais } \sum_n \alpha_n \log(1/\alpha_n) = +\infty\right)$. Voir *Random linear fonctionals*, preprint (Massachusetts Institute of Technology).

(2) On trouvera la démonstration de ce théorème dans mon prochain livre sur les mesures de Radon, Tata Institute of fundamental research, Bombay.

(37, *rue Pierre-Nicole, Paris,* 5e.)