ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Extension du théorème de Sazonov-Minlos à des cas non hilbertiens

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 265 (1967), p. A832-A834.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, p. 832-834 (18 décembre 1967). Série A

POLY

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Extension du théorème de Sazonov-Minlos à des cas non hilbertiens*. Note (*) de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Lévy.

Des conditions connues, permettant d'affirmer que certaines mesures cylindriques sur des espaces vectoriels topologiques sont des mesures de Radon, font jouer un rôle fondamental aux espaces hilbertiens. Nous donnons ici, dans le cas des espaces l^p, $1 \leq p < 2$, une condition où il n'y a pas de structure hilbertienne.

Rappels et préliminaires ([1]). — Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur $\mathbf{R}$. On appelle probabilité cylindrique μ sur E la donnée d'une application qui, à tout sous-espace vectoriel fermé E_1 de codimension finie de E, associe une mesure de Radon μ_{E/E_1} sur le quotient E/E_1, de telle manière que, si $E_2 \subset E_1$, μ_{E/E_1} soit l'image de μ_{E/E_2} par l'application canonique $E/E_2 \rightarrow E/E_1$.

On peut définir le produit tensoriel de deux probabilités cylindriques sur deux espaces vectoriels topologiques, le produit de convolution de deux probabilités cylindriques sur un espace vectoriel topologique, l'image $u(\mu)$ sur F d'une probabilité cylindrique de E par une application linéaire faiblement continue u de E dans F.

On définit comme suit l'image de Fourier ou fonction caractéristique $\varphi = \mathcal{F}\mu$ de μ. Soit $\xi \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$; $\xi(\mu)$ est une mesure de Radon sur $\mathbf{R}$; la valeur au point 1 de son image de Fourier est, par définition, $\varphi(\xi)$. Alors φ est une fonction de type positif sur E', dont la restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension finie est continue. Réciproquement, une fonction φ ayant ces propriétés est l'image de Fourier d'une probabilité cylindrique μ sur E, unique.

Soit (Ω, m) un espace topologique muni d'une probabilité de Radon. Une fonction m-aléatoire f sur Ω, indexée par E', est une application de E' dans l'espace $M(\Omega, m)$ des m-variables aléatoires réelles sur Ω, c'est-à-dire des m-classes de fonctions réelles m-mesurables sur Ω. Une fonction aléatoire f est linéaire, si, pour tous ξ, $\eta \in E'$, et $\lambda \in \mathbf{R}$, $f(\xi + \eta) = f(\xi) + f(\eta)$, $f(\lambda\xi) = \lambda f(\xi)$ (en tant que m-classes de fonctions sur Ω). Deux fonctions aléatoires f, f' respectivement définies sur (Ω, m), (Ω', m'), toutes deux indexées par E', sont dites isonomes, si, pour tout système fini $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, d'éléments de E', les mesures images de m, m', par les classes d'applications $(f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n))$ et $(f'(\xi_n), f'(\xi_2), \ldots, f'(\xi_n))$ de Ω, Ω', dans $\mathbf{R}^n$, sont la même mesure de Radon sur $\mathbf{R}^n$. On voit alors qu'il y a correspondance bijective entre les probabilités cylindriques sur E, et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires réelles linéaires indexées par E'.

Soit A une partie de E. On dit que μ est *scalairement concentrée* à η près sur A, si, pour tout $\xi \in E'$, la mesure $\xi(\mu)$ sur $\mathbf{R}$ est concentrée, à η près, sur l'image $\xi(A)$, c'est-à-dire si $(\xi(\mu))\,(\xi(A)) \geqq 1 - \eta$. Si $\mathfrak{S}$ est une famille de parties bornées de E, filtrante, stable par les homothéties, saturée pour l'inclusion et pour l'opération d'enveloppe convexe équilibrée fermée, et totale, on dit que μ est *scalairement* $\mathfrak{S}$-*concentrée* si, pour tout $\eta > 0$, il existe $A \in \mathfrak{S}$ telle que μ soit scalairement concentrée à η près sur A.

On montre alors que μ est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, si et seulement si son image de Fourier $\varphi = \mathcal{F}(\mu)$ est continue sur $E'_{\mathfrak{S}}$, ou si et seulement si les fonctions aléatoires associées f sur E' sont continues en probabilité sur $E'_{\mathfrak{S}}$, c'est-à-dire si $\xi \mapsto f(\xi)$ est continue de $E'_{\mathfrak{S}}$ dans l'espace $M(\Omega, m)$ muni de la topologie de la convergence en mesure. $E'_{\mathfrak{S}}$ est l'espace E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties appartenant à $\mathfrak{S}$.

La probabilité μ est dite *cylindriquement concentrée* à ε près sur A, si, pour toute application linéaire continue u de E dans un espace vectoriel de dimension finie, $u(\mu)$ est concentrée à ε près sur $u(A)$: $(u(\mu))\,(u(A)) \geqq 1 - \varepsilon$. D'où définition analogue d'une μ *cylindriquement* $\mathfrak{S}$-*concentrée*.

Une probabilité de Radon μ sur E définit trivialement une probabilité cylindrique; dans ce cas, comme fonction aléatoire associée f, on peut prendre $\Omega = E$, $m = \mu$, $f(\xi) = \xi$ pour $\xi \in E'$ [ou plus exactement, $f(\xi)$ est la m-classe de la fonction $\omega \mapsto \langle \omega, \xi \rangle$]. Une probabilité cylindrique sur E est dite de Radon, si elle provient d'une probabilité de Radon, nécessairement unique. D'après le théorème de Prokhorov, μ est une probabilité de Radon sur E, si et seulement si elle est cylindriquement concentrée sur la famille des parties compactes de E.

Soient E, F, des espaces localement convexes, E muni d'une famille $\mathfrak{S}$ de parties; une application linéaire u faiblement continue de E dans F, est dite $\mathfrak{S}$-radonifiante, si l'image par u de toute probabilité cylindrique de E, scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, est une mesure de Radon sur F. Si la famille $\mathfrak{S}$ n'est pas spécifiée, il s'agira de l'ensemble de toutes les parties bornées de E.

Le théorème de Sazonov dit alors que, si E et F sont hilbertiens, u est radonifiante, si et seulement si elle est de Hilbert-Schmidt. C'est ce théorème qui est utilisé pour démontrer le théorème de Minlos sur les espaces nucléaires. Le théorème de Sazonov peut encore s'exprimer comme suit :

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombre réels. L'application $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de l^2 dans l^2 est radonifiante, si et seulement si $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

Le théorème qui suit est une extension de celui-là, en remplaçant l^2 par l^p. Nous supposerons expressément $p \neq 2$, car la condition devient différente, et l'on sait que le cas $p = 2$ est déjà réglé. Ce qui suit est seulement relatif à $p < 2$; le cas $p > 2$ reste entièrement ouvert. Comme toujours, p' est l'exposant conjugué de p.

Lemme. — *Soit* $1 \leq p < 2$. *Soit* μ *une probabilité sur* $\mathbf{R}^m$, *scalairement concentrée à* η *près sur la* $l^{p'}$*-boule unité*

$$B_1 = \left\{ x \in \mathbf{R}^m ; \sum_{n=1}^{m} | x_n |^{p'} \leq 1 \right\}.$$

Alors μ *est concentrée à* ε *près sur la* l^p*-boule*

$$B_2 = \left\{ x \in \mathbf{R}^m ; \sum_{n=1}^{m} | \alpha_n x_n |^p \leq 1 \right\}, \qquad \text{où} \quad U = \sum_{n=1}^{m} | \alpha_n |^p \left(1 + \left| \log \frac{1}{|\alpha_n|} \right| \right)$$

$$\text{et} \qquad \varepsilon = C \left(\eta + \frac{U}{n^p} \left(1 + \left(\log \frac{1}{\eta} \right) \right) \right),$$

C *étant une constante universelle.*

Théorème. — *Soit* $1 \leq p < 2$. *Soit* $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels, telle que* $U = \sum_{n=0}^{\infty} | \alpha_n |^p [1 + | \log (1/|\alpha_n|) |] < +\infty$. *Alors l'application* $u : (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de* $l^{p'}$ *dans* l^p *est radonifiante* [*pour* $p = 1$, $l^{p'} = l^\infty$ *doit être muni de la topologie* $\sigma(l^\infty, l^1)$].

Démonstration du théorème. — Le lemme se modifie trivialement comme suit : l'opération u, de $\mathbf{R}^m$ dans lui-même, transforme toute probabilité μ, scalairement concentrée à η près sur la boule unité de $\mathbf{R}^{-m}$ pour la norme $l^{p'}$, en une probabilité $u(\mu)$, concentrée à ε près sur la boule unité de $\mathbf{R}^m$, pour la norme l^p.

En faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit que, si μ est une mesure cylindrique sur $l^{p'}$, scalairement concentrée sur les boules, son image $u(\mu)$, en tant que mesure cylindrique sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, est de Radon et concentrée sur les boules de l^p, donc portée par l^p. A part une difficulté technique supplémentaire pour $p = 1$ tenant à ce que ses boules ne sont pas faiblement compactes, on en déduit, l^p étant polonais, que $u(\mu)$ est une mesure de Radon sur l^p.

C. Q. F. D.

(*) Séance du 27 novembre 1967.

(1) Ces préliminaires sont exposés dans un grand nombre d'Ouvrages. Ils paraîtront ultérieurement dans un livre, édité par le Tata Institute of fundamental Research, de Bombay. Des résultats proches de ceux de cette Note paraissent dans une Note simultanée d'A. Badrikian.

(37, *rue Pierre-Nicole, Paris*, 5e.)