BENT FUGLEDE
LAURENT SCHWARTZ

Un nouveau théorème sur les distributions

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 263 (1966), p. A899-A901.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 899-901 (19 décembre 1966). Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Un nouveau théorème sur les distributions.* Note (*) de MM. **Bent Fuglede** et **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Lévy.

On sait que si une distribution (1) sur $\mathbf{R}^n$ a des dérivées partielles d'ordre n qui sont des mesures, elle est une fonction (mesurable) localement essentiellement bornée (2), tandis que, si ses dérivées d'ordre n sont des fonctions (localement intégrables), elle est une fonction continue. Nous montrons ici que, si les dérivées d'ordre n sont des mesures, et si $n \geq 2$, elle est une fonction continue.

Théorème. — *Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^n$, intégrable, à support compact. On suppose que $\partial^n f/\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_n$ (dérivée prise au sens des distributions) est une mesure μ, et que les dérivées premières $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont des fonctions g_i (intégrables). Alors f est presque partout égale à une fonction continue.*

Démonstration. — Puisque f est à support compact, on a $f = \mathrm{Y} \star \mu$, où Y est la fonction d'Heaviside sur $\mathbf{R}^n$, égale à 1 sur le « quadrant » $\{x \in \mathbf{R}^n;\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, et à 0 ailleurs (4). On a donc, pour presque toutes les valeurs de $x \in \mathbf{R}^n$:

$$f(x) = \mathrm{M}(x) = \iint\limits_{t_1 \leq x_1, \ldots, t_n \leq x_n} \cdots \int d\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

On a de même $f = g_i \star \mathrm{Y}_i$ où Y_i est la mesure produit tensoriel de la fonction d'Heaviside sur l'axe des x_i par les δ des axes des x_j, $j \neq i$; ou encore, pour presque toutes les valeurs de $x \in \mathbf{R}^n$:

$$f(x) = \mathrm{G}_i(x) = \int_{t \leq x_i} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, dt \quad (5).$$

Posons

$$x = (x', x_i), \qquad x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-1}, \qquad x_i \in \mathbf{R}.$$

Pour presque toutes les valeurs de $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, la fonction $t \mapsto g_i(x', t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, d'après Fubini; alors, pour presque tout $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{G}_i(x, t)$ est continue sur $\mathbf{R}$. Pour $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ donné, appelons $\chi_{(x')}$ la fonction caractéristique de l'ensemble de $\mathbf{R}^n$ $\{y \in \mathbf{R}^n;\ y_j \leq x_j,\ 1 \leq j \leq n,\ j \neq i\}$; on considère ensuite sur $\mathbf{R}^n$ la mesure produit $\chi_{(x')}\mu$, puis son image $\mu_{(x')}$ sur $\mathbf{R}$, par la projection $(x', t) \mapsto t$ de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$. Alors on a exactement

$$\mathrm{M}(x', x_i) = \int_{t \leq x_i} d\mu_{(x')}(t).$$

La fonction M est continue à droite pour l'ordre sur $\mathbf{R}^n$ défini par : $x \leqq y$ si $x_i \leqq y_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Les fonctions G_i et M sont presque partout égales, et mesurables. Donc, pour presque tout $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, les fonctions $t \mapsto G_i(x', t)$ et $t \mapsto M(x', t)$ sont presque partout égales sur $\mathbf{R}$; la première est continue, la deuxième continue à droite, donc elles sont partout égales. Donc, pour presque tout $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, la fonction $t \mapsto M(x', t)$ est continue sur $\mathbf{R}$, et par suite, la mesure $\mu_{(x')}$ n'a pas de masses ponctuelles. Cela signifie que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\mu_{(x')}(\{a\})$ est nul pour presque tout $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$; si $A_{(x',a)}$ est l'ensemble

$$\{y \in \mathbf{R}^n;\ y = (y', a),\ y'_j \leqq x'_j,\ 1 \leqq j \leqq n,\ j \neq i\},$$

on a donc, pour tout $a \in \mathbf{R}$: $\mu(A_{(x',a)}) = 0$ pour presque tout $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Appelons $\mu^{(a)}$ la mesure sur $\mathbf{R}^{n-1}$ définie par $\mu^{(a)}(B) = \mu(B \times \{a\})$ pour B borélien dans $\mathbf{R}^{n-1}$ (mesure induite par μ sur $\mathbf{R}^{n-1} \times \{a\}$ identifié à $\mathbf{R}^{n-1}$); cela veut dire que $\mu^{(a)}$ donne une mesure nulle à presque tout ensemble

$$B_{(x')} = \{y' \in \mathbf{R}^{n-1};\ y'_j \leqq x'_j,\ 1 \leqq j \leqq n,\ j \neq i\};$$

mais cela suffit à entraîner que $\mu^{(a)}$ soit nulle, ou encore que $|\mu|(\mathbf{R}^{n-1} \times \{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbf{R}$. Le raisonnement fait sur l'indice i étant valable pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on voit que μ ne charge aucun hyperplan parallèle à $n - 1$ axes de coordonnées; cela entraîne alors la continuité de M, à laquelle f est presque partout égale.

C. Q. F. D.

Corollaire 1. — *Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbf{R}^n$, dont toutes les dérivées de la forme $\partial^k f / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}$ (au sens des distributions), $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq n$, sont des mesures, et toutes les dérivées d'ordre 1 des fonctions (localement intégrables); alors f est presque partout égale à une fonction continue.*

En effet, pour toute α indéfiniment dérivable à support compact, αf vérifie les conditions du théorème, d'où le résultat. Ce corollaire améliore le théorème XVIII du chapitre VI de Schwartz [6]. Notons que, pour $n > 2$, il ne suffit pas de supposer que $\partial^n f / \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n$ est une mesure et que toutes les dérivées d'ordre 1 sont des fonctions, comme le montre l'exemple d'une fonction indépendante de x_n, arbitraire.

Corollaire 2. — *Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbf{R}^n$, dont les dérivées d'ordre n sont des mesures, $n \geqq 2$. Alors f est presque partout égale à une fonction continue.*

En effet, les dérivées d'ordre $\leqq n - 1$ sont des fonctions [7], en particulier les dérivées d'ordre 1, et l'on peut appliquer le corollaire 1. Le résultat serait évidemment inexact pour $n = 1$, comme le montre l'exemple de la fonction d'Heaviside, Y, de dérivée δ, (mais il subsisterait, comme il est connu, si l'on remplaçait « mesures » par « fonctions »).

Pour le cas où l'on suppose que *certaines* dérivées d'ordre $\leq n$ de f sont des fonctions, on trouvera des compléments dans un article de Shilov, à paraître prochainement.

(*) Séance du 28 novembre 1966.

(1) Les notations sont celles de Schwartz (2). Les expressions « intégrable, presque partout », sont toujours relatives à la mesure de Lebesgue.

(2) SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1959.

(3) *Voir* SCHWARTZ (2), théorème XVIII du chapitre VI.

(4) SCHWARTZ (2), form. (VI.6; 17).

(5) SCHWARTZ (2), théor. V du chapitre II.

(6) SCHWARTZ (2), théor. XVIII du chapitre VI.

(7) SCHWARTZ (2), théor. XV, *a* du chapitre VI.

(B. F. : *Department of Mathematics, University of Aarhus, Danemark.*)