Laurent Schwartz

Sur le théorème du graphe fermé

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 263 (1966), p. A602-A605.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 602-605 (2 novembre 1966). Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le théorème du graphe fermé.* Note (*) de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Paul Lévy.

Nous donnons une nouvelle démonstration du théorème du graphe fermé, s'appuyant sur la théorie de la mesure; elle est valable dans des cas restés récalcitrants antérieurement, comme l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions (1).

DÉFINITIONS. — 1° Un espace vectoriel topologique localement convexe est dit *ultra-bornologique* s'il est limite inductive d'une famille quelconque d'espace de Banach. Un espace localement convexe, bornologique et quasi-complet, est ultra-bornologique. Les espaces usuels de l'analyse sont ultra-bornologiques, en particulier les espaces de distributions $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_M$, $\mathcal{O}_C$, $\mathcal{O}'_C$ [*voir Schwartz* (4), p. 43].

2° Un espace topologique séparé X est dit *souslinien* s'il est l'image, par une application continue, d'un espace métrique complet séparable (c'est la définition donnée dans Bourbaki [(2), chap. IX, § 6, n° 2, définition 2], en supprimant la condition de métrisabilité, qui est inutile). Il en résulte immédiatement que toute image continue séparée d'un souslinien est souslinienne, en particulier que tout quotient d'un souslinien par une relation d'équivalence, s'il est séparé, est souslinien. Tout sous-espace borélien d'un souslinien est souslinien. Toute limite projective dénombrable de sousliniens est souslinienne. Il en est de même de toute limite inductive dénombrable; et plus généralement un espace séparé, réunion dénombrable d'images, par des applications continues, d'espaces sousliniens, est souslinien. On en déduit aisément que tous les espaces usuels de l'analyse sont sousliniens, en particulier les dix espaces de distributions déjà signalés. Si E est un espace vectoriel topologique, limite inductive stricte d'une suite de Fréchets séparables, et si F est un espace vectoriel topologique, réunion dénombrable d'images, par des applications linéaires continues, de Fréchets séparables, l'espace $\mathcal{L}_c(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence compacte, est souslinien [et même lusinien, *voir* Bourbaki (2), chap. 9, § 6, n° 4, définition 6, ce qui ne nous servira pas ici].

LEMME 1. — *Soient* X *et* Y *des espaces topologiques sousliniens, f une application de* X *dans* Y, *de graphe borélien. Alors, pour tout borélien* B *de* Y, *l'image réciproque f^{-1}*(B) *est mesurable pour toute mesure de Radon sur* X.

Remarque. — Nous faisons appel ici à la notion de mesure de Radon sur un espace topologique non nécessairement localement compact; *voir* Schwartz (5). On peut encore dire que, pour tout borélien B de Y, f^{-1}(B) est universellement mesurable; ou dire que l'application f est universellement mesurable-Borel, propriété moins riche que la mesurabilité-Lusin.

Démonstration. — Soit G le graphe de f, et soit p_X la projection canonique de $X \times Y$ sur X. Alors $f^{-1}(B) = p_X((X \times B) \cap G)$; B étant borélien dans Y, $X \times B$ est borélien dans $X \times Y$, donc son intersection avec G borélien est borélienne dans $X \times Y$ souslinien, donc souslinienne; son image par p_X continue est donc une partie souslinienne de X, donc universellement mesurable [*voir* Bourbaki (²), remarque suivant la proposition 15 du chap. IX, § 6, n° 9; la propriété n'est démontrée là que pour X localement compact, mais la démonstration subsiste sans modification dans le cas général, un ensemble étant mesurable si son intersection avec tout compact est mesurable].

LEMME 2 (démontré par Douady en 1965 et non publié). — *Soient* E *un espace vectoriel localement convexe ultra-bornologique*, F *un espace vectoriel localement convexe arbitraire. Toute application linéaire* u *de* E *dans* F, *universellement mesurable-Borel, est continue.*

Démonstration. — On peut toujours supposer que le corps de base est $\mathbf{R}$. Soient v une application linéaire continue d'un Banach B dans E, w une forme linéaire continue sur F. Alors wuv est encore universellement mesurable-Borel; si donc on a démontré le lemme pour B et $\mathbf{R}$ au lieu de E et F, on saura que wvu est continue; cela montrera que vu est continue de B dans F affaibli, donc qu'elle est fortement continue parce que B est normé; et alors cela prouvera la continuité de u puisque E est ultra-bornologique.

Nous sommes donc ramené à montrer le résultat du lemme pour E Banach et $F = \mathbf{R}$. Pour cela, il suffit évidemment de montrer que, pour toute suite $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de E telle que $\sum_{n=0} \|e_n\| < +\infty$, la suite des $|u(e_n)|$ est bornée. Appelons h l'application linéaire continue $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n$ de l^∞ dans E; si Q est la boule unité de l^∞, c'est-à-dire l'ensemble des $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$, pour lesquels $|\lambda_n| \leq 1$ quel que soit n, Q coïncide *en tant qu'ensemble* avec le produit $\prod_{n=0}^{\infty} I_n$, $I_n = [-1, +1]$, et h *est encore continue sur Q muni de la topologie produit.* Appelons μ_n la mesure $(1/2)\,dx$ sur I_n et $\mu = \mu_{\mathbf{N}} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mu_n$, mesure produit tensoriel sur Q muni de la topologie produit. Alors $h(\mu)$ est une mesure de Radon sur E. Dire que u est $h(\mu)$-mesurable-Borel équivaut à dire que $U = u \circ h$, fonction sur Q, est μ-mesurable-Borel. Soit $M \geq 0$, et soit Q_M l'ensemble des x de Q tels que $|U(x)| \leq M$. Alors Q_M est μ-mesurable, et sa mesure tend vers $\mu(Q) = 1$ pour M tendant vers l'infini. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Considérons Q comme produit

$$I_{\mathbf{N}'} \times I_n, \quad \mathbf{N}' = \complement_{\mathbf{N}} \{n\}, \qquad I_{\mathbf{N}'} = \prod_{k \in \mathbf{N}'} I_k.$$

On a alors $\mu = \mu_{\mathbf{N}'} \otimes \mu_n$, avec $\mu_{\mathbf{N}'} = \bigotimes_{k \in \mathbf{N}'} \mu_k$. Si l'on appelle $Q_M(x')$, $x' \in I_{\mathbf{N}'}$, l'ensemble $\{t \in I_n;\, (x', t) \in Q_M\} \subset I_n$, le théorème de Fubini montre que

$$\mu(Q_M) = \int_{I_{\mathbf{N}'}} \mu_n(Q_M(x'))\, d\mu_{\mathbf{N}'}(x').$$

Soient (x', t_1), (x', t_2), deux points de $Q_M(x')$; on a

$$U(x', t_1) - U(x', t_2) = (t_1 - t_2)\, u(e_n);$$

de $|U(x', t_1)| \leq M$, $|U(x', t_2)| \leq M$, on déduit $|t_1 - t_2| \leq 2M/|u(e_n)|$. On a donc

$$\mu_n(Q_M(x')) \leq \frac{M}{|u(e_n)|}, \qquad \text{puis} \quad \mu(Q_M) \leq \frac{M}{|u(e_n)|},$$

ou

$$|u(e_n)| \leq \frac{M}{\mu(Q_M)}, \qquad \text{et enfin} \qquad \sup_{n \in \mathbf{N}} |u(e_n)| \leq \inf_{M \geq 0} \frac{M}{\mu(Q_M)}.$$

Le second membre est sûrement fini puisque $\mu(Q_M)$ tend vers 1 pour M infini, donc est $\neq 0$ pour M assez grand; u est donc bien continue.

C. Q. F. D.

Théorème général du graphe borélien. — *Soient* E *un espace vectoriel localement convexe ultra-bornologique,* F *un espace vectoriel localement convexe souslinien. Toute application linéaire u de* E *dans* F, *de graphe borélien, est continue.*

Démonstration. — Comme pour le lemme 2, on peut se ramener au cas où E est un Banach; et même un Banach séparable, puisqu'il suffit de démontrer que l'image de toute suite bornée est bornée et qu'on peut donc remplacer E par le sous-Banach engendré par cette suite. Mais alors E est souslinien; donc le lemme 1 montre que u est universellement mesurable-Borel, et le lemme 2 montre qu'elle est continue.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *comme dans le théorème. Toute application linéaire continue surjective* v *de* F *sur* E *est un épimorphisme.*

Démonstration. — Soit $N = \operatorname{Ker} v$. Alors l'application v^{-1}, de E dans F/N, a un graphe fermé; comme F est souslinien, F/N l'est aussi, et le théorème donne le résultat.

Remarques. — 1° Bien que cette démonstration, basée sur la théorie de la mesure, donne le théorème du graphe fermé dans tous les cas « usuels », restés jusqu'à présent récalcitrants, elle ne donne pas le théorème dans le cas élémentaire de deux espaces de Banach quelconques, car F, souslinien, doit être séparable :

2° Récemment, Raikov [3] a aussi démontré le théorème du graphe fermé dans ces mêmes cas usuels; sa démonstration est très différente de celle-ci; le résultat de Raikov et le nôtre ne couvrent pas les mêmes cas.

3° La démonstration comporte une certaine dose de technique : le lemme 2 de Douady, et le théorème de mesurabilité universelle des parties sousliniennes; au total elle est plus compliquée que celle de Banach pour les Fréchets; mais elle va beaucoup plus loin dans les applications pratiques. Il en est de même pour la démonstration de Raikov.

4° L'intervention de la théorie de l'intégration dans le théorème du graphe fermé peut sembler étrange. Mais si l'on examine l'énoncé du théorème, il y intervient un graphe borélien et un espace souslinien, il est normal qu'il y ait de l'intégration.

(*) Séance du 24 octobre 1966.

(1) Raikov (3) a aussi donné récemment une démonstration valable pour $\mathcal{D}'$.

(2) Bourbaki, *Utilisation des nombres réels en topologie générale*, Livre III, chap. 9.

(3) Raikov, *Sibirskii Matem. J.*, 7, 1966, p. 353-372.

(4) Schwartz, *Ann. Inst. Fourier*, 7, 1957.

(5) Schwartz, *Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires*, École d'été, Lisbonne, 1964; *voir* aussi : Notes de cours, Paris, 1964-1965.

(37, *rue Pierre-Nicole, Paris*, 5e.)

173401. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.