L. Schwartz

Mesures de Radon sur des espaces non localement compacts

Sûgaku, 17 (1966), p. 193-204.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

MESURES DE RADON SUR DES ESPACES NON LOCALEMENT COMPACTS

par

L. SCHWARTZ

§ 1. Introduction

Sur un espace localement compact X, une mesure de Radon est une forme linéaire continue sur l'espace topologique $C(X)$ des fonctions continues à support compact. Par rapport à cette mesure, si elle est $\geqslant 0$, on peut définir les mesures des ensembles, les fonctions intégrables à valeurs dans des espaces de Banach et les intégrales de ces fonctions, les applications mesurables, au sens de Lusin, de X dans des espaces topologiques Y (1).

Il y a une autre théorie, très différente, celle des mesures abstraites. Une tribu de parties sur un ensemble X est un ensemble de parties, contenant $\emptyset$ et X, et stable par complémentation et par réunions et intersections dénombrables. Une mesure abstraite $\geqslant 0$, sur la tribu $\mathcal{T}$, est une fonction m sur $\mathcal{T}$, à valeurs $\geqslant 0$ finies ou non, dénombrablement additive, c. à d. telle que, pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints de la tribu $\mathcal{T}$, on ait $m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$.

Par rapport à une mesure abstraite, on peut encore définir les ensembles mesurables et leurs mesures, les fonctions intégrables à valeurs dans des espaces de Banach et leurs intégrales; et les applications mesurables dans les espaces topologiques Y (2).

Toute mesure de Radon $\geqslant 0$ sur un espace localement compact X définit une mesure abstraite sur la tribu borélienne $\mathcal{T}$ de X. Les ensembles mesurables et leurs mesures, les fonctions intégrables à valeurs dans les Banach et leurs intégrales, sont alors les mêmes pour la mesure de Radon et la mesure abstraite qu'elle définit; par contre les applications mesurables dans les espaces topolo-

(1) On trouvera un exposé de la théorie des mesures de Radon dans Bourbaki [1], [2], [3].

(2) On trouvera un exposé de la théorie des mesures abstraites dans un grand nombre d'ouvrages; voir par exemple Halmos [1].

giques Y, si elles sont les mêmes pour les espaces métrisables séparables Y, mais ne sont pas en général les mêmes pour Y arbitraire. Redonnons donc les deux définitions:

A) *Soit X un espace localement compact, μ une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur X. Une application H de X dans Y est μ — mesurable au sens de Lusin, si, quel que soit le compact K de X et quel que soit $\delta > 0$, il existe un compact $K_\delta \subset K$, tel que $\mu(K - K_\delta) \leqslant \delta$, et que la restriction de H à K soit continue.*

B) *Soient X un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur X, m une mesure $\geqslant 0$ abstraite sur $\mathcal{T}$. L'application H de X dans Y est m-mesurable, si, pour tout borélien B de Y, $H^{-1}(B)$ est m-mesurable.*

La mesurabilité-Lusin de H, pour une mesure de Radon μ, entraîne sa mesurabilité pour la mesure abstraite définie par μ; mais non l'inverse, comme le montrent des contre-exemples connus.

Pourquoi beaucoup d'analystes se sont-ils entêtés à considérer surtout des mesures de Radon, ce qui exige l'hypothèse de locale compacité de X? Les probabilistes ont cependant besoin, de toute évidence, de mettre des lois de probabilité sur des espaces de Banach de dimension infinie. D'où un état de tension et de guerre froide entre les divers partisans de diverses théories de la mesure. Il y a à celà une raison assez impérieuse. Les mesures de Radon ont des propriétés très fortes, d'un usage constant en analyse, que n'ont pas les mesures abstraites:

1) En utilisant la partition de l'unité, on montre que la mesure extérieure d'une réunion filtrante *(même non dénombrable)* d'ouverts est la borne supérieure de leurs mesures extérieures. En particulier, toute mesure de Radon qui induit 0 sur une famille (même non dénombrable) d'ouverts induit 0 sur leur réunion.

Rien de tel ne subsiste pour les mesures abstraites, *qui ne permettent jamais de sortir des réunions dénombrables.* On étend d'ailleurs ce résultat aux limites filtrantes croissantes de fonctions semi-continues inférieurement; et d'autre part on démontre un théorème de recollement des morceaux de mesures, qui n'a pas d'équivalent en théorie des mesures abstraites. De même la mesure d'une intersection filtrante *(même non dénombrable)* de fermés de mesures finies est la borne inférieure de leurs mesures.

2) Soit m une mesure abstraite $\geqslant 0$ sur une tribu $\mathcal{T}$ d'un ensemble X, et soit H une application m-mesurable de X dans Y. On peut alors définir une mesure image $H(m)$ sur la tribu borélienne de Y; pour B borélien dans Y, on pose $(H(m))(B) = m(H^{-1}(B))$. Si alors B est une partie quelconque $H(m)$-mesurable de Y, on montre que $H^{-1}(B)$ est m-mesurable, et que l'on a encore $m(H^{-1}(B)) = (H(m))(B)$. *Mais la réciproque est inexacte.*

Exemple (1.1) Soit Y l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$; et soit X une partie de Y, non mesurable pour la mesure de Lebesgue $\nu = dx$, de mesure extérieure 1. Tout borélien A de X est l'intersection de X avec un borélien A' de Y; posons $m(A)=\nu(A')$. La valeur trouvée est indépendante du choix de A', car, si A'' est un autre choix, la différence entre A' et A'' (c. à d. l'ensemble des points qui appartiennent à un seul des deux) est un borélien de $Y-X$, donc sa mesure pour ν est nulle puisque la ν-mesure intérieure de $Y-X$ est supposée nulle. Alors $A\to m(A)$ est une mesure abstraite sur la tribu borélienne de X. La mesure image de m par l'injection naturelle H de X dans Y est la mesure de Lebesgue ν sur Y, puisque, pour tout borélien B de Y, on a justement $\nu(B)=m(H^{-1}(B))=m(X\cap B)$. Si alors on prend l'ensemble non borélien $B=Y-X$, son intersection avec X est vide donc m-mesurable, et cependant lui-même n'est pas $\nu=H(m)$-mesurable, par hypothèse; il donne le contre-exemple souhaité.

On peut naturellement retourner la situation de diverses manières, on ne supprime pas cet inconvénient. Au contraire, si μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$, H une application μ-mesurable-Lusin de X dans un espace topologique Y (condition plus forte que la mesurabilité abstraite en général), et moyennant certaines conditions supplémentaires (par exemple si μ est bornée), on a une mesure de Radon image $H(\mu)$ sur Y; *mais, cette fois,* $B\subset Y$ *est* $H(\mu)$*-mesurable, si et seulement si* $H^{-1}(B)$ *est* μ*-mesurable, et les mesures sont égales* [1]. Le but de cet article est de donner une théorie des *mesures de Radon valable sur des espaces non localement compacts*, avec les mêmes propriétés que les mesures de Radon sur des espaces localement compacts; et de provoquer ainsi la fin de la guerre froide et la réconciliation générale. Que les probabilistes aient ou non besoin du caractère Radon de la mesure, *les mesures qu'ils considèrent sont en fait de Radon*, à cause de notre proposition (8.3.).

Bien que la théorie soit valable pour des mesures quelconques, nous ne la donnerons, pour simplifier, que pour des mesures bornées $\geqslant 0$, de masse totale 1, c. a. d. pour des lois de probabilité; *mesure voudra dire, partout, mesure* $\geqslant 0$ *de masse* 1.

§ 2. Définition. Principales propriétés. Prolongement de Lebesgue

Soit $\mathcal{B}(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur l'espace topologique X, muni de la norme $\|\varphi\| = \operatorname*{Sup}_{x\in X} |\varphi(x)|$.

DÉFINITION (2.1). *On appelle mesure de Radon sur X une forme linéaire continue μ sur $\mathcal{B}(X)$, vérifiant $\mu(\varphi)\geqslant 0$ pour $\varphi\geqslant 0$, $\mu(1)=1$, et en outre la condition que nous appellerons* (ε, K):

(ε,K): *Quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un compact K de X tel que* $\varphi\in\mathcal{B}(X)$,

[1] BOURBAKI [2], § 6, n.° 2, corollaire de la prop. 3.

$|\varphi|\leqslant 1, \varphi=0$ sur K, entraîne $|\mu(\varphi)|\leqslant\varepsilon$ [1]. Cette définition coïncide bien avec la définition habituelle des mesures si X est compact (il suffit de prendre $K=X$); et on démontre sans peine qu'elle redonne les mesures habituelles ($\geqslant 0$ de masse 1) si X est localement compact.

Dans la suite, *nous supposerons toujours*, *même si ce n'est pas explicitement répété*, *que les espaces considérés sont complètement réguliers* (c. à d. uniformisables ou plongeables dans des compacts); c'est dans ce cas seulement que les mesures auront de bonnes propriétés. Rappelons que tout espace vectoriel topologique séparé est complètement régulier. Nous appellerons $\mathcal{M}(X)$ l'espace des mesures de Radon sur X.

Définition (2.2). *Soit μ une mesure de Radon sur X. Si f est une fonction semi-continue inférieurement sur $X, \geqslant 0$, à valeurs finies ou non, on appelle intégrale supérieure de f par rapport à μ, et on note $\int_X^* f(x)d\mu(x)$ ou $\int_X^* fd\mu$, la borne supérieure des $\mu(\varphi)$ pour les φ de $\mathcal{B}(X)$ vérifiant $0\leqslant\varphi\leqslant f$. Si maintenant f est une fonction $\geqslant 0$ quelconque sur X, à valeurs finies ou non, on appelle intégrale supérieure de f et on note de la même manière, la borne inférieure des $\int_X^* gd\mu$, pour les fonctions g semi-continues inférieurement, vérifiant $f\leqslant g\leqslant +\infty$.*

En somme, les définitions sont exactement les mêmes que pour X localement compact. En outre, on démontre que toutes les propriétés sont les mêmes; en particulier l'inégalité de convexité dénombrable:

$$\int_X^*\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)d\mu \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_X^* f_n d\mu$$

pour des $f_n\geqslant 0$ quelconques, et la formule

$$\operatorname*{Sup}_{i\in I}\int_X^* f_i d\mu = \int_X^*\left(\operatorname*{Sup}_{i\in I} f_i\right)d\mu$$

si les f_i forment un ordonné filtrant croissant (non nécessairement à base dénombrable) de fonctions semi-continues inférieurement $\geqslant 0$. La mesure extérieure d'un ensemble étant l'intégrale supérieure de sa fonction caractéristique, la mesure extérieure d'une réunion dénombrable de parties est majorée par la

[1] Ce sont ces mesures que Lecam a introduites dans [1] sous le nom de «tight measures». Cette définition est aussi équivalente à une autre donnée par Choquet dans [1]. Il y a d'ailleurs eu tellement de travaux sur la théorie de la mesure qu'il est probable que ces définitions figurent aussi chez d'autres auteurs. Il semble cependant que personne n'ait encore eu l'idée ou la patience de vérifier que, parmi les diverses définitions possibles de classes particulières de mesures abstraites, celle-là et celle-là seule possédait exactement *toutes* les propriétés désirées, notamment celles qui sont données dans Bourbaki [2].

somme des mesures, et la mesure extérieure d'une réunion filtrante croissante (non nécessairement dénombrable) d'ouverts est la borne supérieure des mesures extérieures de ces ouverts.

Soit maintenant F un espace de Banach, et soit $\mathcal{F}(X,\mu;F)$ l'espace vectoriel des fonctions f sur X, à valeurs dans F, telles que $N(f)=\int_X^* \|f\| d\mu$ soit fini; munissons-le de la semi-norme N. C'est un espace vectoriel semi-normé non séparé complet. La forme linéaire $\mu:\mathcal{B}(X)\to\mathbf{C}$, se prolonge en une application linéaire $\mathcal{B}(X)\otimes F\to F$ appelée intégrale, et notée $f\to\int_X f(x)d\mu(x)$ ou $\int_X fd\mu$. Alors:

Définition (2.3). *On appelle espace des fonctions μ-intégrables sur X à valeurs dans F, et on note $\mathcal{L}^1(X,\mu;F)$, l'adhérence de $\mathcal{B}(X)\otimes F$ dans $\mathcal{F}(X,\mu;F)$. L'intégrale $\mathcal{B}(X)\otimes F\to F$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de norme $\leqslant 1$ de $\mathcal{L}^1(X,\mu;F)$ dans F, encore appelée intégrale et notée de la même manière. On appelle mesure d'une partie A de X l'intégrale de sa fonction caractéristique; elle se note aussi $\mu(A)$.*

Cette intégrale a toutes les propriétés habituelles, en particulier le théorème de convergence majorée de Lebesgue.

§ 3. Mesure image

Définition (3.1) *Soient $H:X\to Y$ une application d'un espace complètement régulier X dans un espace topologique Y, μ une mesure sur X. On dit que H est μ-mesurable si elle vérifie la propriété de Lusin:*

Quel que soit $\delta>0$, il existe un compact K_δ de X tel que $\mu(X-K_\delta)\leqslant\delta$ et que la restriction de H à K_δ soit continue.

Une partie A de X est dite μ-mesurable si sa fonction caractéristique est μ-mesurable. Les parties mesurables sont exactement les parties intégrables. Les parties boréliennes sont mesurables, et μ définit donc une mesure abstraite sur la tribu borélienne de X (Voir à ce sujet le § 8).

Proposition (3.1). *Si X et Y sont complètement reguliers, si μ est une mesure sur X, si H est une application μ-mesurable de X dans Y, alors, pour toute $\varphi\in\mathcal{B}(Y)$, l'image réciproque $\varphi\circ H$ est μ-intégrable sur X. En posant $(H(\mu))(\varphi)=$ $=\int_X(\varphi\circ H)d\mu$, on définit $H(\mu)$ comme mesure de Radon sur Y. On l'appelle la mesure image de μ par H.*

En outre, on conserve toutes les propriétés qui font les avantages des mesures de Radon sur les mesures abstraites:

Proposition (3.2) *Une partie B de Y est $H(\mu)$-mesurable, si et seulement si $H^{-1}(B)$ est μ-mesurable, et leurs mesures sont les mêmes. Plus généralement,* *si F est un espace de Banach et f une application de Y dans F, f est $H(\mu)$-intégrable, si et seulement si $f \circ H$ est μ-intégrable, et les intégrales sont les mêmes; si Z est un espace topologique, f une application de Y dans Z, f est $H(\mu)$-mesurable, si et seulement si $f \circ H$ est μ-mesurable, et alors $(f \circ H)(\mu) = f(H(\mu))$ (transitivité des mesures images).*

Si F est un Banach, f une fonction sur X à valeurs dans F, f est μ-intégrable si et seulement si f est μ-mesurable et $\|f\|$ d'intégrale supérieure finie (1).

Proposition (3.3). *Soit H une application continue injective de X dans Y. Alors $\mu \to H(\mu)$ est injective de $\mathfrak{M}(X)$ dans $\mathfrak{M}(Y)$. Pour qu'une mesure ν sur Y soit l'image par H d'une mesure sur X, il faut et il suffit que ν soit concentrée sur $H(X)$, et que l'application réciproque H^{-1}: $H(X) \to X$, définie ν-presque partout sur Y, soit ν-mesurable; et alors l'unique mesure μ sur X telle que $\nu = H(\mu)$ est $H^{-1}(\nu)$.*

Il en résulte en particulier que, si T_1 et T_2 sont deux topologies complètement régulières sur le même ensemble X, T_1 plus fine que T_2, toute mesure de Radon μ_1 sur (X, T_1) définit une mesure de Radon μ_2 sur (X, T_2), et que l'application ainsi définie $\mu_1 \to \mu_2$ est injective: *on peut considérer l'ensemble $\mathfrak{M}(X, T_1)$ des mesures de Radon sur (X, T_1) comme un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{M}(X, T_2)$ des mesures de Radon sur (X, T_2).*

Définition (3.2). *Soient X et Y deux espaces topologiques, X complètement régulier, et soit H une application de X dans Y. On dit que H est universellement mesurable, si elle est mesurable par rapport à toute mesure de Radon sur X.*

On dit que deux topologies complètement régulières T_1 et T_2 sur un ensemble X sont Radon-équivalentes, si l'application identique de T_1 dans T_2 et l'application identique de T_2 dans T_1 sont toutes deux universellement mesurables. Alors il existe une correspondance bijective entre les espaces $\mathfrak{M}(X, T_1)$ et $\mathfrak{M}(X, T_2)$ de mesures de Radon sur (X, T_1) et (X, T_2).

En particulier, si T_1 est plus fine que T_2, T_1 et T_2 sont Radon-équivalentes, si et seulement si l'application identique de T_2 dans T_1 est universellement mesurable, ou encore si l'injection $\mu_1 \to \mu_2$ de $\mathfrak{M}(X, T_1)$ dans $\mathfrak{M}(X, T_2)$ définie ci-dessus est une bijection. Alors:

Proposition (3.4). *Si X est un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable, toutes les topologies intermédiaires entre sa topologie initiale et sa topologie affaiblie sont Radon-équivalentes, et elles ont les mêmes mesures de Radon* (2).

---

(1) Voir Bourbaki [2], § 6.

(2) Ceci n'est que la traduction, dans le langage des mesures de Radon sur des espaces topologiques non localement compacts, d'un théorème dû essentiellement à Philipps. Voir à ce sujet Grothendieck [1], § 4, n.º 1, théorème 4, page 104.

PROPOSITION (3.5) *Soit H: $X \to Y$ une application continue de X dans Y. Soit ν une mesure de Radon sur Y. Pour que ν soit l'image par H d'une mesure de Radon sur X, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que $\nu(H(K)) \geqslant 1-\varepsilon$.*

Si H est un homéomorphisme de X dans Y, alors il faut et il suffit que ν soit concentrée sur $H(X)$; l'application $\mu \to H(\mu)$ est alors une bijection de l'ensemble $\mathfrak{M}(X)$ des mesures sur X, sur l'ensemble $\mathfrak{M}_{H(X)}(Y)$ des mesures sur Y concentrées sur $H(X)$.

Prenons le cas particulier où X est simplement un sous-espace topologique de Y, H étant l'injection canonique. *Alors on peut canoniquement identifier les mesures sur X, et les mesures sur Y qui sont concentrées sur X.*

Ceci permet de donner une nouvelle définition des mesures de Radon sur un espace topologique X complètement régulier. Soit en effect $\check{X}$ son compactifié universel de Čech; dire que X est complètement régulier revient à dire que X peut être identifié à un sous-espace topologique dense de $\check{X}$. On connaît alors les mesures de Radon sur $\check{X}$, qui est compact. *On pourra donc définir une mesure de Radon sur X comme une mesure de Radon sur $\check{X}$, concentrée sur X.* Cette définition est nécessairement identique à la définition antérieure (en outre on pourrait remplacer $\check{X}$ par n'importe quel autre compact Y dont X soit un sous-espace topologique).

On dispose donc en fait de deux méthodes complètement différentes pour faire cette théorie des mesures de Radon sur des espaces non localement compacts. Ou bien on donne la définition du § 2; on regarde alors pas à pas tous les théorèmes démontrés dans les espaces localement compacts, en lisant Bourbaki page après page, et on vérifie que l'on peut partout éliminer la locale compacité. Ou bien au contraire, on adopte la définition donnée ici, utilisant la théorie des mesures supposée déjà faite sur le compact $\check{X}$. Par exemple, si l'on veut démontrer le théorème de convergence majorée de Lebesgue, on considèrera une suite de fonctions f_n sur X à valeurs dans un Banach, convergeant μ-presque partout vers une limite f, μ-intégrables, et majorées en norme par une fonction $g \geqslant 0$, μ-intégrable. On peut alors identifier μ à une mesure $\check{\mu}$ sur $\check{X}$, concentrée sur X. Les f_n, f, g, sont alors $\check{\mu}$-presque partout définies sur $\check{X}$. On peut leur appliquer le théorème de Lebesgue, demontré pour les mesures sur le compact $\check{X}$. Donc f est $\check{\mu}$-intégrable, et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\check{X}} f_n \, d\check{\mu} = \int_{\check{X}} f d\check{\mu}$; donc f est μ-intégrable, et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f d\mu$, *cqfd.* De toute façon, bien entendu, on doit montrer que les deux définitions données sont équivalentes, pour toutes les notions introduites.

Il est bien évident que la premère méthode est la seule qui soit justifiable, au point de vue logique; car pourquoi introduire d'abord une théorie de la mesure sur les espaces localement compacts pour démontrer ensuite que l'hypothèse de locale compacité ne servait à rien ? Néanmoins, tout en gardant pour le présent exposé cette méthode pure, c'est la deuxième méthode, plus courte et plus paresseuse, que j'ai, en fait, utilisée, pour toutes les démonstrations.

§ 4. Produit par une fonction. Mesure induite. Produit tensoriel de deux mesures

Proposition (4.1). *Soit μ une mesure de Radon sur X, et soit p une fonction $\geqslant 0$, μ-intégrable, d'intégrale 1. Alors la forme linéaire sur $\mathcal{B}(X)$ définie par $\varphi \to \int_X p\varphi d\mu$ est une mesure de Radon sur X; on l'appelle produit de μ par p et on l'écrit $p\mu$.*

Si f est une fonction sur X à valeurs dans un Banach F, f est $p\mu$-intégrable si et seulement si pf est μ-intégrable, et l'on a toujours $\int_X fd(p\mu) = \int_X (pf)d\mu$.

Soient μ et ν deux mesures sur X. Pour que ν soit de base μ, c. à d. de la forme $p\mu, p$ μ-intégrable, $p \geqslant 0, \int pd\mu = 1$, il faut et il suffit que toute partie μ-négligeable de X soit aussi ν-négligeable (Lebesgue-Nikodym) (1).

Proposition (4.2). *Soit μ une mesure sur X, et soit Z une partie μ-mesurable de X. La forme linéaire sur $\mathcal{B}(Z)$ définie par $\varphi \to \int_Z \varphi d\mu$ (où l'intégrale sur Z d'une fonction est l'intégrale sur X de sa prolongée par 0 sur $X-Z$) est une mesure de Radon sur Z ; on l'appelle la mesure induite par μ sur Z, et on la note μ_Z. L'image de μ_Z par l'injection de Z dans X est le produit de μ par la fonction caractéristique χ_Z de Z ; on peut donc aussi définir μ_Z en utilisant la définition du § 3, en l'identifiant à la mesure $\chi_Z\mu$ sur X concentrée sur Z. On a les propriétés habituelles, en particulier la transitivité des mesures induites; et, si f est une fonction sur Z à valeurs dans un Banach F, elle est μ_Z-intégrable si et seulement si elle est μ-intégrable sur Z, et l'on a $\int_Z fd\mu_Z = \int_Z fd\mu$* (2).

Proposition (4.3). *Soient X et Y deux espaces complètement réguliers, μ et ν des mesures sur X et Y respectivement. Il existe une mesure λ et une seule sur $X \times Y$ qui vérifie, pour $\varphi \in \mathcal{B}(X)$ et $\psi \in \mathcal{B}(Y)$, la formule $\lambda(\varphi \otimes \psi) = \mu(\varphi)\nu(\psi)$. Cette mesure s'appelle produit tensoriel de μ et ν et se note $\mu \otimes \nu$. Elle vérifie les propriétés habituelles, en particulier le théorème de Fubini* (3).

(1) Voir Bourbaki [2], § 5.
(2) Voir Bourbaki [2], §§ 1 et 7.
(3) Bourbaki [1], chapitre III, § 5, et Bourbaki [2], § 8.

§ 5. Limites projectives de mesures

Les théorèmes de la théorie de la mesure sur les espaces localement compacts s'étendent aux mesures sur des espaces complètement réguliers. Il n'y a que deux exceptions: les théorèmes relatifs aux limites projectives non dénombrables, et les théorèmes relatifs aux intégrales de mesures. Pour ceux-là, certaines hypothèses supplémentaires sont nécessaires. Nous regarderons dans ce paragraphe le cas des limites projectives non dénombrables.

Soit I un ensemble ordonné filtrant d'indices. Pour tout i, soit X_i un espace topologique complètement régulier. On suppose en outre donné, pour tout couple $(i,j), i \leqslant j$, une application continue $\pi_{i,j}$ *de* X_j dans X_i, de manière que, pour $i \leqslant j \leqslant k$, on ait $\pi_{i,j} \circ \pi_{j,k} = \pi_{i,k}$, et que $\pi_{i,i}$ soit l'identité pour tout i. Il existe alors une limite projective du système considéré; elle est définie par un certain espace topologique Z et des applications continues π_i de Z dans les X_i, telles que, pour $i \leqslant j$, on ait $\pi_i = \pi_{i,j} \circ \pi_j$. Il peut arriver que Z soit vide; mais, si les X_i sont compacts, Z est non vide et compact.

Supposons données des mesures μ_i sur les X_i, telles que, pour $i \leqslant j$, on ait $\mu_i = \pi_{i,j}(\mu_j)$. Existe-t-il sur Z une mesure μ telle que, pour tout i, $\mu_i = \pi_i(\mu)$? C'est vrai si les X_i sont compacts ou si I est dénombrable (ou si X_i est compact sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de $i \in I$), mais ce n'est en général pas vrai si les X_i sont seulement des espaces complètement réguliers (même localement compacts), et I non dénombrable.

Posons-nous un problème plus général. Soient un système projectif du type précédent, et en outre un espace topologique complètement régulier X et des applications continues H_i de X dans les X_i, telles que, pour $i \leqslant j$ on ait $H_i = \pi_{i,j} \circ H_j$. Celà revient exactement à se donner une application continue H de X dans la limite projective Z, avec $H_i = \pi_i \circ H$. Les mesures μ_i sur les X étant données, existe-t-il une mesure μ sur X telle que, pour tout i, $\mu_i = H_i(\mu)$? Le système de X, des X_i, des $\pi_{i,j}$, des H_i, des μ_i, s'appellera un système projectif d'espaces topologiques munis de mesures de Radon.

Proposition (5.1). *Soit* $X, (X_i)_{i \in I}, (\pi_{i,j})_{i \in I, j \in I, i \leqslant j}, (H_i)_{i \in I}, (\mu_i)_{i \in I}$, *un système projectif d'espaces topologiques munis de mesures de Radon. Pour qu'il existe une mesure* μ *sur* X, *telle que* $\mu_i = H_i(\mu)$ *pour tout* i, *il faut et il suffit que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* K *de* X *tel que, pour tout* i, $\mu_i(H_i(K)) \geqslant 1 - \varepsilon$.

La démonstration se fait en utilisant la proposition (3.5) et le fait que, puisqu'il s'agit de mesures de Radon, la mesure d'un ordonné filtrant décroissant *(même non dénombrable)* de fermés est la borne inférieure des mesures. Aucun théorème aussi général ne peut donc exister en théorie des mesures abstraites ([1]).

§ 6. Mesures cylindriques sur un espace vectoriel localement convexe ([2])

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur le corps $\mathbb{R}$ (pour simplifier). Soit I l'ensemble de sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie de E, ordonné en sens inverse de l'inclusion. Pour $i \in I$, nous désignerons aussi par E_i l'élément i de I. Appelons H_i l'application canonique de E sur son quotient de dimension finie E/E_i; pour $i \leqslant j$, c. à d. $E_i \supset E_j$, appelons $\pi_{i,j}$ l'application canonique de E/E_j sur E/E_i. Alors les espaces E/E_i, munis des $\pi_{i,j}$, ont une limite projective Z, qui est, comme on le voit aisément, le complété faible de E, ou dual algébrique E'^* du dual topologique E' avec la topologie $\sigma(E'^*, E')$. Les H_i déterminent une application linéaire continue H de $X = E$ dans Z, qui n'est autre que l'injection canonique de E dans E'^*.

Définition (6.1). *On appelle mesure cylindrique μ sur E un système projectif de mesures au sens du § 5, relatif aux $E/E_i, \pi_{i,j}, H_i$; c. à d. la donnée, pour chaque i, d'une mesure μ_i, sur E/E_i, de manière que, pour $i \leqslant j$, on ait $\mu_i = \pi_{i,j}(\mu_j)$.*

Il en résulte qu'*une mesure cylindrique n'est pas en général une mesure* (sauf évidemment si E est de dimension finie); pour qu'elle soit une mesure, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de E tel que, pour tout i, $\mu_i(H_i(K)) \geqslant 1 - \varepsilon$ (proposition (5.1)).

On peut cependant faire avec les mesures cylindriques des opérations remarquables. Si μ et ν sont deux mesures cylindriques, on peut les convoler, et définir une nouvelle mesure cylindrique $\mu * \nu$ sur E. Si u est une application linéaire continue de E dans un espace localement convexe séparé F, et si μ est une mesure cylindrique sur E, on peut définir une image $u(\mu)$, mesure cylindrique sur F; et $u(\mu * \nu) = u(\mu) * u(\nu)$. Enfin on peut définir l'image de Fourier $\mathfrak{F}\mu = \varphi$ de μ; c'est une fonction à valeurs complexes de type positif sur le dual E', égale à 1

---

(1) Il existe précisément un théorème analogue démontré par Prokhorov, [1], mais où les X_i sont supposés être des espaces vectoriels de dimension finie, X un espace de Fréchet séparable, les π_{ij}, et les H_i linéaires continues. Il s'agit certes là d'hypothèses excessives, mais de toute façon, en théorie des mesures abstraites, *on ne peut jamais sortir* des réunions et intersections dénombrables, et des restrictions sévères sont inévitables. En outre, la démonstration est plus compliquée.

(2) Voir Gelfand-Vilenkin [1], chap. IV.

à l'origine, dont la restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension finie est continue; et inversement, toute fonction φ sur E' ayant ces propriétés est l'image de Fourier d'une mesure cylindrique unique sur E. Si u est linéaire continue de E dans F, si μ est une mesure cylindrique sur E, d'image de Fourier φ sur E', alors l'image de Fourier de $u(\mu)$ est l'image réciproque ${}^t u^*(\varphi)=\varphi \circ {}^t u$, par ${}^t u$, de φ.

Définition (6.2). *On dit qu'une mesure de Radon μ sur E est concentrée à δ près sur une partie A de E, si $\mu(A) \geqslant 1-\delta$.*

On dit qu'une mesure cylindrique μ sur E est cylindriquement concentrée à δ près sur une partie A de E, si, pour tout i, $\mu_i(H_i(A)) \geqslant 1-\delta$; on dit qu'elle est scalairement concentrée à δ près sur A, si l'on a l'inégalité précédente toutes les fois que E_i est de codimension 1 dans E (c'est donc une condition plus faible).

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E; on dira que μ est $\mathfrak{S}$-concentrée ou cylindriquement ou scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, si, pour tout $\delta > 0$, il existe $A \in \mathfrak{S}$ telle que μ soit concentrée ou cylindriquement ou scalairement concentrée à δ près sur A. On peut alors dire que μ est une mesure de Radon si et seulement si elle est cylindriquement c-concentrée, c étant l'ensemble des parties compactes de E, et elle est alors c concentrée.

Proposition (6.1). *Supposons l'ensemble $\mathfrak{S}$ filtrant et invariant par les homothéties. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *La mesure cylindrique μ est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée;*
2) *La fonction de type positif $\varphi=\mathfrak{F}\mu$ est continue sur $E'_{\mathfrak{S}}$ (E' muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence);*
3) *L'application $\xi \to \xi(\mu)$ est continue de $E'_{\mathfrak{S}}$ dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des mesures sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie vague* (1).

On peut aussi raisonner en termes de variables et fonctions aléatoires. Si (Ω,m) est l'espace des épreuves (nous supposerons Ω complètement régulier et m de Radon), une variable aléatoire à valeurs dans un espace topologique X est une classe d'équivalence d'applications m-mesurables de Ω dans X (deux applications étant équivalentes si elles sont m-presque partout égales).

L'espace de ces variables aléatoires sera noté $Mes(\Omega,m;X)$. Si X est un espace uniforme, $Mes(\Omega,m;X)$ peut être muni de la structure uniforme de la convergence en probabilité:

Si U est un entourage de la structure uniforme de X, et si $\varepsilon > 0$, l'ensemble des éléments (x,y) de $Mes(\Omega,m;X) \times Mes(\Omega,m;X)$ tels que $Pr\{(x,y) \notin U\}=$

(1) Si $\xi \in E'$, ξ est une application linéaire continue de E dans $\mathbb{R}$, donc il existe une image $\xi(\mu) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ de la mesure cylindrique μ sur E.

$=m(\{w\in\Omega;(x(w),y(w))\notin U\})\leqslant\varepsilon$ est un entourage de cette structure; et on obtient ainsi un système fondamental d'entourages.

La topologie correspondante est dite topologie de la convergence en probabilité. On appelle maintenant fonction aléatoire f sur un ensemble T à valeurs dans l'espace topologique X, une application de T dans $Mes(\Omega,m;X)$; pour tout $t\in T, f(t)\in Mes(\Omega,m;X)$ est donc une variable aléatoire sur X. Deux variables aléatoires $x\in Mes(\Omega,m;X), x'\in Mes(\Omega',m';X)$ (correspondant éventuellement à des (Ω,m) et (Ω',m') distincts, mais au même X supposé complètement régulier), sont dites *isonomes* (ou de même loi de probabilité), si les mesures images $x(m), x'(m)$, sur X, coïncident. Deux fonctions aléatoires f, f', (correspondant à des (Ω,m), (Ω',m') éventuellement distincts, mais aux mêmes T,X) sont dites isonomes, si, pour tout système fini de valeurs $t_1,t_2,\ldots,t_n$, de T, les variables aléatoires $(f(t_1),f(t_2),\ldots,f(t_n))$, $(f'(t_1),f'(t_2),\ldots,f'(t_n))$, à valeurs dans X^n, sont isonomes. La fonction aléatoire f sera dite canonique, s'il existe une variable aléatoire $\check{f}$ à valeurs dans le produit $\check{X}^T$ ($\check{X}$ compactifié de Čech de X), telle que, pour tout t de T, $f(t)=pr_t\circ\check{f}$, ou encore $(f(t))(w)=pr_t\check{f}(w)$ m-presque sûrement; nous abrégerons par $f=pr\circ\check{f}$.

Les propriétés des limites projectives de mesures sur des espaces compacts, montrent alors que toute fonction aléatoire est isonome à une fonction aléatoire canonique (pour laquelle $\Omega=\check{X}^T, \check{f}=$identité). En outre, si deux fonctions aléatoires canoniques $f=pr\circ\check{f}$ et $f'=pr\circ\check{f}'$, sont isonomes, les variables aléatoires $\check{f},\check{f}'$, à valeurs dans $\check{X}^T$, sont isonomes; si en outre $f'=f$, alors $f=\check{f}'$ presque sûrement. Noter qu'en général, $\check{f}$ est à valeurs dans $\check{X}^T$ et non X^T.

Si T est topologique et X muni d'une structure uniforme, la fonction aléatoire f sur T à valeurs dans X est dite continue en probabilité, si elle est une application continue de T dans l'espace topologique $Mes(\Omega,m;X)$; c. à d. si, lorsque t tend vers t_0 dans T, la variable aléatoire $f(t)$ sur X converge en probabilité vers la variable aléatoire $f(t_0)$.

Pour T et X topologiques, une fonction aléatoire canonique $f=pr\circ\check{f}$ est dite *presque sûrement continue (sous-entendu à valeurs dans X lui-même et non seulement dans $\check{X}$)* si, pour m-presque tout w de Ω, l'élément $\check{f}(w)$ de $\check{X}^T$, qui est donc une application de T dans $\check{X}$, est une application continue de T dans X. Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de X^T, on dira que f est presque sûrement dans $\mathcal{A}$, si, pour m-presque tout $w, \check{f}(w)$ appartient à $\mathcal{A}$.

Proposition (6.2). *Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, localelement convexe séparé. Il existe une correspondance bijective entre les mesures cylindriques μ sur E et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires f réelles linéaires sur E'. La mesure cylindrique μ est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, si et seulement si la fonction aléatoire f est continue en probabilité sur $E'_{\mathfrak{S}}$. Si μ est cylindriquement $\mathfrak{S}$-concentrée, et f canonique, alors f est presque sûrement continue sur $E'_{\mathfrak{S}}$; la réciproque est vraie si E est semi-réflexif et quasi complet et si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble* *de toutes les parties convexes équilibrées faiblement compactes. Enfin, si f est canonique, μ est une mesure de Radon sur E faible, si et seulement si f est presque sûrement à valeurs dans E, et une mesure de Radon sur E, si et seulement si f est presque sûrement à valeurs dans une réunion dénombrable de compacts de E.*

En changeant les rôles de E et E':

Proposition (6.3). *Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Il y a une correspondance bijective entre les mesures $*$-cylindriques μ sur son dual F' muni de la topologie $\sigma(F',F)$* (1), *et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires f linéaires sur F.*

La mesure $*$-cylindrique μ sur F' est $*$-scalairement ε-concentrée (ε désignant l'ensemble des parties convexes équilibrées équicontinues faiblement fermées), si et seulement si f est continue en probabilité sur F. Si f est canonique et si μ est $*$ cylindriquement ε-concentrée, alors f est presque sûrement continue; la réciproque est vraie si F est tonnelé. Enfin, si f est canonique, μ est une mesure de Radon sur F' muni de la topologie $\sigma(F',F)$, si et seulement si f est presque sûrement continue.

§ 7. Les théorèmes de Minlos

Cette théorie des mesures de Radon permet de généraliser les théorèmes, démontrés (et énoncés sous une autre forme) par Minlos dans le cas particulier d'espaces de Fréchet séparables; la raison fondamentale est qu'on peut utiliser la proposition (5.1), qui ne fait pas d'hypothèses de dénombrabilité.

Définition (7.1). *Soient E et F deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de E dans F. On dit que u est radonifiante, si, pour toute mesure cylindrique μ sur E, scalairement concentrée sur l'ensemble des boules, l'image $u(\mu)$ est une mesure de Radon sur F.*

Proposition (7.1). *(MINLOS) Si E et F sont hilbertiens, u est radonifiante si et seulement si elle est de Hilbert-Schmidt* (2).

J'ignore si un opérateur nucléaire d'un Banach E dans un autre F est radonifiant.

---

(1) Le symbole $*$ exprime que F' est considéré comme dual de F, muni de la topologie $\sigma(F',F)$. Par exemple, «$*$-scalairement...» veut dire: «pour tout $f \in F$,...», alors que: «scalairement...» voudrait dire ou pourrait vouloir dire: «pour tout f'' du dual F'' de F' fort,...».

(2) Voir Gelfand-Vilenkin [1], chap. IV, et Minlos, [1].

Définition (7.2). *Rappelons qu'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E est dit nucléaire, si, pour tout voisinage convexe équilibré ouvert U de O dans E, il en existe un autre $V \subset U$ tel que l'application naturelle $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$ soit nucléaire. Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties convexes équilibrées fermées complétantes* (¹) *de E, E est dit $\mathfrak{S}$-conucléaire, si, pour toute $A \in \mathfrak{S}$, il en existe une autre $B \supset A$, telle que l'injection canonique $E_A \to E_B$ soit nucléaire.*

Alors E est nucléaire si et seulement si E' est ε-conucléaire, ε étant la famille des parties convexes équilibrées équicontinues faiblement fermées; si c est l'ensemble des parties convexes équilibrées compactes de E, E'_c est nucléaire si et seulement si E est c-conucléaire.

On a alors:

Proposition (7.2) (Théoreme de Minlos généralisé) (²). *Si E est $\mathfrak{S}$-conucléaire, toute mesure cylindrique sur E, scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, est une mesure de Radon sur E, $\mathfrak{S}$-concentrée; toute fonction continue de type positif sur $E'_{\mathfrak{S}}$ est l'image de Fourier d'une mesure de Radon sur E, $\mathfrak{S}$-concentrée.*

Si $\mathfrak{S}$ a un système fondamental de parties A hilbertiennes (c. à d. telles que E_A soit hilbertien), la réciproque est vraie: si toute mesure cylindrique sur E, scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, est une mesure de Radon $\mathfrak{S}$-concentrée, ou encore si toute fonction continue de type positif sur $E'_{\mathfrak{S}}$ est l'image de Fourier d'une mesure de Radon $\mathfrak{S}$-concentrée sur E, alors E est $\mathfrak{S}$-conucléaire.

Si E est quasi-complet et admet un système fondamental de parties convexes équilibrées compactes hilbertiennes, alors E'_c est nucléaire ou E est c-conucléaire, si et seulement si toute mesure cylindrique sur E, scalairement c-concentrée, est une mesure de Radon, ou encore si et seulement si toute fonction continue de type positif sur E'_c est l'image de Fourier d'une mesure de Radon sur E.

Corollaire. *Soit E l'un des espaces $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{O}_M, \mathcal{O}'_c$, de la théorie des distributions; toute mesure cylindrique sur E, scalairement concentrée sur la famille des parties bornées, est une mesure de Radon; toute fonction continue de type positif sur E' est l'image de Fourier d'une mesure de Radon sur E.*

Le théorème de Minlos ne donnait de résultat que pour $E = \mathcal{S}', \mathcal{D}'$.

(¹) Une partie A de E, convexe équilibrée fermée, est dite complétante, si l'espace normé E_A est un Banach. Si A est complète, donc si E est quasi-complet et A fermée, elle est complétante. Voir Schwartz [1], page 198.

(²) Ce même théorème, sans hypothèse de dénombrabilité, a été trouvé indépendamment par d'autres auteurs. (Yasuo Umemura, Badrikian; à paraître prochainement).

§ 8. Espaces radoniens, polonais, lusiniens, sousliniens

DÉFINITION (8.1). *Une mesure abstraite m (comme toujours, $\geqslant 0$ et de masse $m(X)=1$) sur la tribu borélienne d'un espace topologique X est dite intérieurement régulière si, pour tout borélien B, $m(B)$ est la borne supérieure des mesures des compacts de X contenus dans B.*

PROPOSITION (8.1). *Toute mesure de Radon μ sur un espace complètement régulier X définit, par $B \to \mu(B)$, une mesure abstraite sur la tribu borélienne, intérieurement régulière. Inversement, toute mesure abstraite sur la tribu borélienne de X, intérieurement régulière, provient d'une mesure de Radon unique.*

En d'autres termes, *on peut identifier l'ensemble $\mathfrak{M}(X)$ des mesures de Radon sur X, au sous-ensemble de l'ensemble des mesures abstraites sur la tribu borélienne, formé des mesures abstraites intérieurement régulières.*

On aurait pu prendre cela comme définition des mesures de Radon sur X, à la place de celle du § 2. Elle est, en tant que définition, plus simple que celle du § 2; mais certaines complications s'introduisent dans les démonstrations, ce qui la rend sans doute équivalente en difficulté.

Reprenons l'exemple (1.1). La mesure m sur X est une mesure abstraite sur la tribu borélienne de X, qui n'est pas intérieurement régulière; en effet, si elle l'était, cela reviendrait à dire que X a la mesure intérieure 1 pour ν, et comme il a la mesure extérieure 1, il serait mesurable, contrairement à l'hypothèse. Comme d'ailleurs l'injection $X \to Y$ est continue, si m était une mesure de Radon sur X, on n'aurait plus trouvé là le contre-exemple cherché au § 1, en vertu des propriétés des mesures de Radon images. Donc m n'est pas de Radon, mais son image ν est de Radon.

DÉFINITION (8.2). *Un espace topologique complètement régulier X est dit radonien, si toute mesure abstraite sur la tribu borélienne de X est intérieurement régulière, en d'autres termes, est une mesure de Radon sur X.*

PROPOSITION (8.2). *Si X est radonien, il est universellement mesurable, au sens suivant: pour tout espace complètement régulier Y ayant X comme sous-espace topologique, et toute mesure de Radon μ sur Y, X est μ-mesurable. Soit X un espace radonien, et soit Z un sous-espace de X; alors Z est radonien si et seulement s'il est mesurable pour toute mesure de Radon sur X.*

C'est là le secret de la construction du contre-exemple (1.1). On verra que $Y=[0,1]$ est radonien (proposition (8.3)); alors, X étant non-mesurable pour la mesure de Lebesgue ν sur Y, il n'est sûrement pas radonien.

DÉFINITION (8.3). *Un espace topologique X est polonais s'il peut être défini par une métrique pour laquelle il est complet, et s'il est séparable (c. à d. admet une partie dénombrable dense).*

Par exemple, un espace de Fréchet séparable est polonais.

Un espace topologique X est dit lusinien s'il est séparé et s'il existe une topologie plus fine pour laquelle il est polonais (autrement dit s'il existe une bijection continue d'un espace polonais sur X).

Un espace topologique X est dit souslinien s'il est séparé et s'il existe une surjection continue d'un espace polonais sur X (1).

Un espace lusinien ou souslinien le reste si l'on affaiblit sa topologie, pourvu qu'elle reste séparée. Un sous-espace lusinien d'un espace séparé est borélien dans cet espace; un sous-espace d'un lusinien est lusinien si et seulement s'il est borélien; tout borélien d'un souslinien est souslinien.

PROPOSITION (8.3). *Un espace topologique complètement régulier souslinien est radonien, et le reste pour toute topologie complètement régulière plus faible. Sa topologie est Radon-équivalente à toutes les topologies complètement régulières plus faibles* (2).

PROPOSITION (8.4). *Soient E, F, deux espaces vectoriels topologiques, limites inductives strictes d'espaces de Fréchet séparables. Alors $\mathcal{L}_c(E;F)$ est lusinien; en particulier F et E'_c sont lusiniens* (3).

COROLLAIRE. *Les espaces $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_c$, de la théorie des distributions, sont lusiniens; ils sont donc boréliens dans tout espace topologique dont ils sont sous-espaces; ils sont radoniens et le restent pour toute topologie complètement régulière plus faible; et leur topologie est Radon-équivalente à toute topologie complètement régulière plus faible.*

Depuis la première impression de cet article, quelques perfectionnements ont été apportés. André Meyer a donné une définition différente, rendant inutile l'hypo-

---

(1) On trouvera ces définitions dans BOURBAKI [5], § 6. Cependant, dans cet ouvrage, les espaces lusiniens ou sousliniens sont, avec beaucoup de précaution, supposés métrisables. Le lecteur se convaincra que c'est *complètement inutile*, et que cela a pour unique résultat d'introduire des complications, car on est alors obligé de montrer ou de supposer qu'un espace est métrisable, pour démontrer qu'il est lusinien ou souslinien!

C'est à cause de cette hypothèse de métrisabilité que P. CARTIER avait introduit dans [1] les *espaces standards*; il a remarqué ultérieurement que l'hypothèse de métrisabilité de Bourbaki était superflue, de sorte que désormais les lusiniens ne sont plus nécessairement métrisables, et la notion d'espace standard disparaît.

(2) Conséquence facile du théoreme de Choquet; voir BOURBAKI [4], théoreme 5 du § 6, n.º 9.

(3) Le résultat relatif à E'_c et F est dû à P. CARTIER, voir [1].

thèse de complète régularité des espaces topologiques. D'autre part, j'ai donné en Août-Septembre 1965 des conférences au Tata Institute of Fundamental Research de Bombay, où les mesures de Radon sont introduites, comme il est dit à la proposition 8.1, sans aucune théorie supposée connue antérieurement pour les espaces localement compacts, et sans hypothèse de complète régularité; les mesures ne sont pas nécessairement finies ni $\geqslant 0$. Ces conférences, ainsi que d'autres que j'ai données à Paris, paraîtront ultérieurement, avec toutes les démonstrations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, N. — *Intégration.* Paris. Hermann. 1952. Chapitres 1, 2, 3, 4.

[2] ———— — *Intégration.* Paris. Hermann. 1956. Chapitre 5.

[3] ———— — *Intégration.* Paris. Hermann. 1959. Chapitre 6.

[4] ———— — *Topologie Générale.* Paris. Hermann. 1958. Chapitre 9.

[1] LE CAM, L. — *Convergence in Distribution of stochastic Processes.* University of California Publications in Statistics. *2* (11): 207-236.

[1] CARTIER, P. — *Processus aléatoires généralisés.* In: *Séminaire Bourbaki,* n.° 272. Paris. Institut Henri Poincaré. 1964.

[1] CHOQUET, G. — *Theory of Capacities.* Annales de l'Institut Fourier. *5*: 131-295. 1953-1954. (Voir page 207).

[1] GEL'FAND, I. M. et VILENKIN, N. I. — *Fonctions généralisées.* Tome IV.

[1] GROTHENDIECK, A. — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Memoirs of the American Mathematical Society. (16). 1955.

[1] HALMOS, P. R. — *Measure Theory.* Princeton. D. Van Nostrand. 1950.

[1] MINLOS, R. A. — *Generalised random processes and their extension to a measure.* Trudy Moscov Math. Obšč. *8*: 497-518. 1956.

[1] PROKHOROV, J. V. — *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory.* In: *Theory of Probability and applications.* 1956. Vol. I: p. 157-214. (Traduction de l'article original en russe dans Teor. Verojatn.i Prim. *1*: 177-238. 1956).

[1] SCHWARTZ, L. — *Théorie des Distributions à valeurs vectorielles.* Annales de l'Institut Fourier. *8* (Chapitre II): 1-209. 1959.

RÉSUMÉ

Les mesures de Radon sont habituellement définies seulement sur des espaces topologiques localement compacts; elles sont un cas particulier des mesures abstraites, qui peuvent se définir sur des ensembles arbitraires. Mais les mesures abstraites n'ont pas toutes les propriétés des mesures de Radon.

Le présent article définit des mesures de Radon sur des espaces topologiques séparés arbitraires. Elles ont toutes les propriétés des mesures de Radon classiques sur les espaces localement compacts. Pour qu'une mesure abstraite $\geqslant 0$ finie, définie sur la tribu borélienne d'un espace topologique, soit une mesure de Radon, il faut et il suffit qu'elle soit «intérieurement régulière».

Sur certains espaces, dits radoniens, toutes les mesures abstraites sur la tribu borélienne sont des mesures de Radon. Les bons espaces topologiques de l'analyse sont des espaces radoniens.

Sur les espaces vectoriels localement convexes, on peut introduire la notion de mesure cylindrique, plus générale que celle de mesure de Radon.

Le théorème de Minlos permet de reconnaître, sur les espaces nucléaires, à quelles conditions une mesure cylindrique est une mesure de Radon. Le théorème de Minlos nécessitait des conditions assez particulières de dénombrabilité. Le présent article étend les résultats aux cas plus généraux, et des applications aux fonctions aléatoires sont esquissées.