L. Schwartz

Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés ; applications aux représentations des groupes de Lie

Deuxième colloque d'analyse fonctionnelle,
Louvain: Centre Belge Recherches Math., Librairie Universitaire, 1964, p. 153-163.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

SOUS-ESPACES HILBERTIENS ET NOYAUX ASSOCIÉS; APPLICATIONS AUX REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE

PAR

L. SCHWARTZ (Paris)

1e partie — Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés

§ 1. SOUS-ESPACES HILBERTIENS

Soit E un espace vectoriel topologique sur **C**, localement convexe, séparé, quasi-complet. On appelle sous-espace hilbertien de E la donnée d'un sous-espace vectoriel $\mathscr{H}$ de E, et d'une structure hilbertienne sur $\mathscr{H}$, pour laquelle l'injection j de $\mathscr{H}$ dans E soit continue (ce qui revient à dire que la topologie de $\mathscr{H}$ est plus fine que la topologie induite par E). On appellera $(\,|\,)_{\mathscr{H}}$ le produit scalaire dans $\mathscr{H}$. Appelons Hilb(E) l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de E.

Il est muni des structures suivantes :

1) *Une loi de multiplication par les nombres réels* $\geqslant 0$.

Par définition, $o\mathscr{H}$ sera $\{0\}$; pour $\lambda > 0$, $\lambda\mathscr{H}$ sera l'espace vectoriel $\mathscr{H}$ muni du produit scalaire de $\mathscr{H}$ multiplié par $1/\lambda$:

$$(h\,|\,k)_{\lambda\mathscr{H}} = \frac{1}{\lambda}(h\,|\,k)_{\mathscr{H}} \tag{1}$$

2) *Une loi d'addition*

Si $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont deux sous-espaces hilbertiens, $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ sera, en tant qu'espace vectoriel, la somme, et sa norme sera définie par :

$$||h||_{\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2} = \operatorname*{Inf}_{h_1+h_2=h} (||h_1||^2_{\mathscr{H}_1} + ||h_2||^2_{\mathscr{H}_2})^{1/2} \tag{2}$$

On montre que $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$, ainsi défini, est bien un sous-espace hilbertien de E.

3) *Une structure d'ordre*

On posera $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}_2$, si $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$, et si l'injection de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}_2$ est continue de norme $\leqslant 1$. Celà revient à dire que la boule unité de $\mathscr{H}_1$ est contenue dans celle de $\mathscr{H}_2$; ou encore que $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$ et que, pour tout $h_1 \in \mathscr{H}_1$, on a $||h_1||_{\mathscr{H}_1} \geqslant ||h_1||_{\mathscr{H}_2}$.

Ces trois structures vérifient, chacune et entre elles, les relations qu'on en attend. En particulier l'addition est associative et commutative, distributive par rapport à la multiplication. D'autre part $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 \geqslant \mathscr{H}_1$ et $\geqslant \mathscr{H}_2$.

Nous dirons que Hilb(E) est un *cône*.

Soit G un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, et soit Γ un cône convexe saillant de G(saillant veut dire qu'il ne contient aucune droite). Alors il a lui aussi une structure de cône; l'addition et la multiplication sont induites par celles de G, et la structure d'ordre est définie par Γ lui-même : $x \geqslant y$ si et seulement si $x - y \in \Gamma$, autrement dit s'il existe $z \in \Gamma$ (nécessairement unique) tel que $x = y + z$. Réciproquement, on démontre sans peine qu'un cône abstrait Γ est identifiable à un cône convexe saillant d'un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, si et seulement si, toutes les fois que $x \geqslant y$, il existe z unique dans Γ tel que $x = y + z$. On dira d'un tel cône qu'il est régulier. Nous allons voir que Hilb(E) est régulier, et nous exhiberons un espace vectoriel G sur $\mathbf{R}$, un cône convexe saillant Γ dans G, et un isomorphisme (de cônes) de Hilb(E) sur Γ.

2. Noyaux

Appelons E^* l'antidual de E (espace des formes antilinéaires continues sur E). Pour $e^* \in E^*, f \in E$, nous appellerons $(e^* | f)_{E^*,E}$ la valeur de e^* sur f; nous l'appellerons aussi $\overline{(f | e^*)_{E,E^*}}$. Soit H une application linéaire faiblement (donc fortement) continue de E^* dans E; nous dirons que c'est un noyau relatif à E. L'espace de ces noyaux sera noté $\mathscr{L}(E^*; E)$ ou simplement $\mathscr{L}(E)$. Un noyau H est hermitien si, pour tous e^*, f^*, de E^*, on a $(He^* | f^*)_{E,E^*} = \overline{(Hf^* | e^*)_{E,E^*}}$, ou encore si, pour tout $e^* \in E^*$, $(He^* | e^*)_{E,E^*}$ est réel. H sera dit $\geqslant 0$ si, pour tout e^* de E^*, $(He^* | e^*)_{E,E^*} \geqslant 0$. Un noyau $\geqslant 0$ est hermitien. Alors, dans $G = \mathscr{L}(E)$, l'ensemble $\Gamma = \mathscr{L}^+(E)$ des noyaux $\geqslant 0$ est un cône convexe saillant.

3. Noyau reproduisant d'un sous-espace hilbertien de E

Soit $\mathscr{H} \in \mathrm{Hilb}(E)$. Si j est l'injection continue de $\mathscr{H}$ dans E, son adjointe j^* est une application linéaire faiblement continue de E^* dans $\mathscr{H}^*$. Mais l'antidual $\mathscr{H}^*$ d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ lui est canoniquement isomorphe.

Alors l'application

$$H = j^* j : E^* \xrightarrow{j^*} \mathscr{H}^* \simeq \mathscr{H} \xrightarrow{j} E \tag{2 bis}$$

est une application linéaire faiblement continue de E^* dans E, c'est-à-dire un noyau. On a :

$$(h \mid He^*)_{\mathscr{H}} = (h \mid e^*)_{E,E^*} \text{ pour } h \in \mathscr{H},\ e^* \in E^*, \tag{3}$$

$$(Hf^* \mid He^*)_{\mathscr{H}} = (Hf^* \mid e^*)_{E,E^*}, \text{ pour } e^*, f^* \in E^*, \tag{4}$$

donc $(He^* \mid e^*)_{E,E^*} = \|He^*\|^2_{\mathscr{H}} \geqslant 0$: H est un noyau $\geqslant 0$. On l'appelle le noyau associé à $\mathscr{H}$ dans E ou noyau reproduisant de $\mathscr{H}$ dans E, suivant Aronszajn-Bergman (*). On démontre alors le théorème suivant :

Théorème 1. L'application de Hilb(E) dans $\mathscr{L}^+(E)$ qui, à tout sous-espace hilbertien de E, associe son noyau reproduisant, est un isomorphisme de cônes de Hilb(E) sur $\mathscr{L}^+(E)$.

On doit pour celà démontrer que cette application est injective et surjective, et qu'elle conserve les 3 structures qui définissent les cônes. Pour la démonstration de ce théorème, consulter Schwartz [7], théorème du § 6 page 159.

Corollaire. Le cône Hilb(E) est régulier.

A partir de là, on peut considérer aussi des sommes infinies ou des intégrales de sous-espaces hilbertiens. Soit Z un espace topologique localement compact, ν une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur Z, $\zeta \mapsto \mathscr{H}(\zeta)$ une application de Z dans $\mathrm{Hilb}(E)$. On en déduit une application associée $\zeta \mapsto H(\zeta)$ de Z dans $\mathscr{L}^+(E)$. On dira que la famille des $\mathscr{H}(\zeta)$ est ν-intégrable, si la fonction $\zeta \mapsto H(\zeta)$ a une intégrale (**) dans $\mathscr{L}(E^*; E)$ muni de la topologie de la convergence simple faible. Si $H = \int_Z H(\zeta)\, d\nu(\zeta)$, il sera le noyau d'un sous-espace hilbertien $\mathscr{H}$, et on posera $\mathscr{H} = \int_Z \mathscr{H}(\zeta)\, d\nu(\zeta)$; $\mathscr{H}$ sera l'intégrale des sous-espaces hilbertiens $\mathscr{H}(\zeta)$ par rapport à ν; on

(*) Voir bibliographie dans Schwartz [7].

(**) Nous entendons par là que cette fonction est scalairement intégrable, et que son intégrale est dans $\mathscr{L}(E^*;E)$.

peut d'ailleurs donner une définition directe de $\mathscr{H}$ lorsque E^* est faiblement séparable; voir Schwartz [7], proposition 20, page 170.

2e partie — Points-distributions dans une représentation continue d'un groupe de Lie

§ 1. Représentations C^m

Soit G un groupe de Lie, unimodulaire pour simplifier, et soit dg une mesure de Haar donnée sur G. Soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel topologique sur $\mathbf{C}$, localement convexe séparé quasi-complet. Une représentation U de G dans $\mathscr{H}$ est une application : $g \mapsto U(g)$ de G dans l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans lui-même, telle que $U(gg') = U(g)\ U(g')$; la représentation sera toujours supposée continue, c'est-à-dire telle que $(g, h) \mapsto U(g)h$ de $G \times \mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$ soit continue. La représentation est dite C^m (m entier $\geqslant 0$ ou $m = +\infty$) si l'application précédente est partiellement C^m par rapport à $g \in G$, et si, pour tout opérateur différentiel C^∞ sur G, d'ordre $\leqslant m$ (*), soit D, l'application $(g, h) \mapsto D_g(U(g)h)$ de $G \times \mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$ est continue. En général les représentations qu'on considère sont continues mais non différentiables. Soit μ une mesure de Radon à support compact sur G. On appelle $U(\mu)$ l'application continue de $\mathscr{H}$ dans lui-même définie par $U(\mu) = \int_G U(g)\,d\mu(g)$(**); si φ est une fonction dg-intégrable sur G, à support compact, $U(\varphi)$ voudra dire $U(\varphi\, dg) = \int_G U(g)\ \varphi(g)\ dg$. On a $U(\mu * \nu) = U(\mu)\ U(\nu)$. On voit que $U(g)$ veut aussi dire $U(\delta_{(g)})$, $\delta_{(g)}$ mesure de Dirac au point g de G; nous nous permettrons systématiquement d'identifier g à $\delta_{(g)}$.

§ 2. Points C^m d'une représentation

Soit $h \in \mathscr{H}$. On dit que h est C^m pour la représentation U si sa trajectoire $\tilde{h} : g \mapsto U(g)\ h$ est une application C^m de G dans $\mathscr{H}$. On appellera $\mathscr{H}^m$ le sous-espace des points C^m de $\mathscr{H}$ pour U. $\mathscr{H}^m$ est un sous-espace dense de $\mathscr{H}$ (Gårding), car, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ et tout $h \in \mathscr{H}$, $U(\varphi)\,h$ est un point C^∞ de $\mathscr{H}$ pour U, et l'ensemble des $U(\varphi)h$, $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, $h \in \mathscr{H}$, est dense dans $\mathscr{H}$.

L'application $h \mapsto \tilde{h}$ est une injection de $\mathscr{H}$ dans l'espace $\mathscr{E}^0(G; \mathscr{H})$ des fonctions continues sur G à valeurs dans $\mathscr{H}$; si en

(*) Si $m = +\infty$, "$\leqslant m$" doit être remplacé par "fini„.
(**) Intégrale prise dans $\mathscr{L}_s(\mathscr{H};\mathscr{H})$.

outre ce dernier est muni de la topologie usuelle de la convergence compacte, $h \mapsto \tilde{h}$ conserve les topologies; on peut donc identifier $\mathscr{H}$ à un sous-espace $\tilde{\mathscr{H}}^0$ de $\mathscr{E}^0(G; \mathscr{H})$. Celà identifie $\mathscr{H}^m$ à un sous-espace $\tilde{\mathscr{H}}^m$ de l'espace $\mathscr{E}^m(G; \mathscr{H})$ des fonctions C^m sur G à valeurs dans $\mathscr{H}$; ce qui définit une topologie sur $\tilde{\mathscr{H}}^m$ donc sur $\mathscr{H}^m$. Enfin $\tilde{\mathscr{H}}^m$ est exactement le sous-espace de $\mathscr{E}^m(G; \mathscr{H})$ formé des fonctions $\tilde{h}$ telles que, pour g, g' dans G on ait

$$U(g')\,\tilde{h}(g) = \tilde{h}(g'g)\ (^*) \qquad \text{(4 bis)}$$

§ 3. Points distributions d'une représentation

Mais toute $\tilde{h}$ de $\tilde{\mathscr{H}}^m$ est donc aussi une distribution sur G à valeurs dans $\mathscr{H}$, avec, comme toujours, $\tilde{h}(\varphi) = \int_G \tilde{h}(g)\,\varphi(g)\,dg$; cette distribution vérifie

$$U(g')\,\tilde{h}\,(\varphi) = \tilde{h}\,(g' * \varphi),\ U(\mu)\,\tilde{h}\,(\varphi) = \tilde{h}\,(\mu * \varphi); \qquad (5)$$

ou encore

$$U(\mu)\tilde{h} = \check{\mu} * \tilde{h}, \qquad \text{(5 bis)}$$

$\check{\mu} * \tilde{h}$ étant la convolution sur G de deux distributions, μ mesure scalaire à support compact et $\tilde{h}$ fonction continue à valeurs dans $\mathscr{H}$; $\check{\mu}$ est l'image de μ par $g \mapsto g^{-1}$.

Nous pouvons alors introduire maintenant l'espace $\tilde{\mathscr{H}}^{-m}$ des distributions A d'ordre $\leqslant m$ ou l'espace $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$ des distributions A sur G, à valeurs dans $\mathscr{H}$, vérifiant

$$U(\mu)\,A(\varphi) = A(\mu * \varphi),\ \text{ou}\ U(\mu)A = \check{\mu} * A, \qquad (6)$$

pour toute mesure μ à support compact sur G. On appellera $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$ (resp. $\tilde{\mathscr{H}}^{-m}$) l'espace des points-distributions (resp. des points-distributions d'ordre $\leqslant m$) de $\mathscr{H}$ pour la représentation U. On le munira de la topologie induite par $\mathscr{D}'(G; \mathscr{H})$ (resp. $\mathscr{D}'^m(G; \mathscr{H})$). On aura donc les inclusions suivantes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \mathscr{H} \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & & \\ \mathscr{H}^\infty \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & & \tilde{\mathscr{H}}^0 \arrow[r, phantom, "\subset"] & \tilde{\mathscr{H}}^{-\infty} \\ & \tilde{\mathscr{H}}^\infty \arrow[ur, phantom, "\subset"] & & \end{tikzcd} \qquad (7)$$

(Bien noter que, si on se donne $\mathscr{H}$ et G mais non U, les espaces $\mathscr{H}^m$ ne sont pas définis dans $\mathscr{H}$, ni les espaces $\tilde{\mathscr{H}}^{\pm m}$ dans $\mathscr{D}'(G; \mathscr{H})$, ni par conséquent l'application $h \mapsto \tilde{h}$ de $\mathscr{H}^m$ dans $\mathscr{D}'(G; \mathscr{H})$.

(*) Voir Bruhat [1], page 115.

Si donc plusieurs représentations U sont considérées simultanément, on devra mettre des indices U pour déterminer ces espaces :

$$\mathscr{H}_U^m, \tilde{\mathscr{H}}_U^{\pm m}, \tilde{h}, \text{ etc.}$$

§ 4. La représentation $\tilde{U}$ dans $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$

La représentation $\tilde{U}$ se transporte de $\mathscr{H}$ à $\tilde{\mathscr{H}}^0$; elle donne une représentation $\tilde{U}$ de G dans $\tilde{\mathscr{H}}^0$ définie par :

$$\tilde{U}(g')\tilde{h} = (U(g')h)^{\sim},$$

ou

$$\begin{aligned}(\tilde{U}(g')\tilde{h})(g) = (U(g')h)^{\sim}(g) = U(g)\,U(g')h = U(gg')h \\ = \tilde{h}(gg') = (\tilde{h} * \check{g}')(g)\end{aligned} \tag{8}$$

ou

$$\tilde{U}(g')\tilde{h} = \tilde{h} * \check{g}', \quad \tilde{U}(\mu)\tilde{h} = \tilde{h} * \check{\mu}. \tag{9}$$

Mais alors $\tilde{U}$ se prolonge en une représentation de G dans $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$, en posant :

$$\tilde{U}(g')A = A * \check{g}', \quad \text{pour } A \text{ dans } \tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}; \tag{10}$$

on a bien trivialement

$$U(\mu)(A * \check{g}') = (U(\mu)A) * \check{g}' = (\check{\mu} * A) * \check{g}' = \check{\mu} * (A * \check{g}'), \tag{11}$$

de sorte que $A * \check{g}'$ est bien encore dans $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$. *Mais maintenant $\tilde{U}$ opère C^∞ dans $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$*, comme déjà U dans $\mathscr{H}^{+\infty}$; et, si S est une distribution à support compact sur G, on peut définir $\tilde{U}(S)A$ par la formule $\tilde{U}(S)A = A * \check{S}$.

Ainsi, par l'identification de $(\mathscr{H}, U)$ avec $(\tilde{\mathscr{H}}^0, \tilde{U})$, on plonge $\mathscr{H}$ dans l'espace $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$ des points-distributions, sur lequel la représentation $\tilde{U}$ de G opère C^∞.

Si en particulier X est un vecteur tangent à G en son élément neutre e, c'est-à-dire un élément de l'algèbre de Lie, il définit une distribution à support ponctuel, $\varphi \mapsto (\theta(X)\varphi)(e)$. Alors $\tilde{U}(X)$ est un opérateur sur $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$, défini par $A \mapsto A * \check{X}$, dit opérateur infinitésimal associé à X. Si en particulier G est le groupe des réels $\mathbf{R}$, ou le semi-groupe $\mathbf{R}_+$ des réels $\geqslant 0$ (car bien évidemment tout ce que nous avons dit s'applique aussi à un tel semi-groupe), et si X est le vecteur unité de $\mathbf{R}$, la distribution X devient $\varphi \mapsto \varphi'(0)$, c'est-à-dire $-\delta'$, δ' étant la dérivée de la mesure de Dirac, et on retrouve le générateur infinitésimal du semi-groupe comme l'opérateur $\tilde{U}(-\delta')$ sur $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$.

Ceci permet de retrouver facilement toutes les propriétés du générateur infinitésimal d'un semi-groupe (Hille-Yosida; ou Hille [5]). Plus généralement soit S une distribution à support compact sur G. On appelle D_S l'«*ensemble de définition de* $U(S)$» *dans* $\mathscr{H}$. C'est l'ensemble des $h \in H$ tels que $\tilde{U}(S)\tilde{h}$ appartienne à $\tilde{\mathscr{H}}^0$. Pour $h \in D_S$, on peut appeler $U(S)h$ l'élément de $\mathscr{H}$ tel que $(U(S)h)^{\sim} = \tilde{U}(S)\tilde{h}$.

D_S est un sous-ensemble dense de $\mathscr{H}$, car il contient $\mathscr{H}^\infty$. L'opérateur $\tilde{U}(S)$ est continu $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty} \to \tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$, donc son graphe est fermé, donc le graphe de $U(S)$ est fermé dans $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, et $U(S): D_S \to \mathscr{H}$ est un opérateur fermé. Il devient trivial que, pour S et T distributions sur G à supports compacts, et $h \in D_T$, alors $h \in D_{S*T}$ équivaut à $U(T)h \in D_S$, et $U(S*T)h = U(S)\,U(T)h$, car on a toujours $\tilde{U}(S*T)\tilde{h} = \tilde{U}(S)\,\tilde{U}(T)\tilde{h}$ dans $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$. Soit d'autre part α_n, $n = 0, 1, \ldots$, une suite de fonctions de $\mathscr{D}(G)$, à supports tendant vers l'unité de G, $\geqslant 0$, d'intégrale tendant vers 1 pour n infini; alors $\alpha_n * S$ tend vers S, et $\tilde{U}(\alpha_n * S)\tilde{h} = \tilde{U}(\alpha_n)\,\tilde{U}(S)\tilde{h}$ converge vers $\tilde{U}(S)\tilde{h}$ dans $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$, et dans $\tilde{\mathscr{H}}^0$ si $\tilde{U}(S)\tilde{h}$ est dans $\tilde{\mathscr{H}}^0$; de sorte que h est dans D_S, si et seulement si $U(\alpha_n * S)h$ a une limite dans $\mathscr{H}$, et cette limite est alors $U(S)h$. On ne peut pas, dans cet énoncé, remplacer $\alpha_n * S$ par $S * \alpha_n$. Voir, pour ces propriétés, Schwartz [8], pages 100 et suivantes.

3e partie — Représentations unitaires pointées d'un groupe de Lie

Désormais, $\mathscr{H}$ sera un espace hilbertien, et la représentation U de G dans $\mathscr{H}$ sera unitaire. Un point-distribution A de $\mathscr{H}$ pour U est dit générateur, si $A(\mathscr{D}(G))$ est dense dans $\mathscr{H}$. On appelle représentation pointée de G (groupe de Lie unimodulaire) la donnée d'une représentation U de G dans un espace $\mathscr{H}$ et d'un point-distribution générateur A. On l'écrira $(\mathscr{H}, G, U, A)$. On dit enfin qu'une représentation unitaire de G dans un Hilbert $\mathscr{H}$ est une représentation régulière si $\mathscr{H}$ est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{D}'(G)$, et si, pour tout g de G, $U(g)$ est la translation à gauche définie par g : $V(g)h = g * h$, pour $h \in \mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(G)$; alors, pour μ mesure de Radon à support compact sur G, $U(\mu)h = \mu * h$.

Théorème 2. Soit $(\mathscr{H}, G, U)$ *une représentation unitaire régulière de* G. *Elle a un point-distribution canonique, le noyau reproduisant* H *de* $\mathscr{H}$ *dans* $\mathscr{D}'(G)$, *qui peut être défini d'une manière unique par une* *convolution* $* H^o : \varphi \mapsto \varphi * H^o$, *$H^o$ distribution de type positif (au sens de Bochner) sur G. La bijection* $\tilde{h} \mapsto h$ *de* $\tilde{\mathscr{H}}^o$ *sur* $\mathscr{H}$ *se prolonge de manière unique en une bijection linéaire de* $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$ *sur le sous-espace* $\mathscr{H}^{-\infty}$ *de* $\mathscr{D}'(G)$ *formé des distributions T sur G telles que* $\varphi * T$ *soit dans* $\mathscr{H}$ *pour toute* φ *de* $\mathscr{D}(G)$. *Cette identification transporte alors la représentation* $\tilde{U}$ *sur la représentation U définie par les translations à gauche :* $U(g)T = g * T$, $U(S)T = S * T$, *pour* $g \in G$, $T \in \mathscr{H}^{-\infty}$, *S distribution à support compact sur G.*

Inversement, si H^o *est une distribution de type positif sur G, le noyau* $H : \varphi \mapsto \varphi * H^o$, *définit un sous-espace hilbertien* $\mathscr{H}$ *de* $\mathscr{D}'(G)$, *sur lequel les translations à gauche de G opérent unitairement,* et *dont H est le point-distribution canonique.*

Esquisse de démonstration

Puisque $\mathscr{H}$ est invariant (unitairement, c'est-à-dire en tant que sous-espace hilbertien de $\mathscr{D}'(G)$) par les translations à gauche, son noyau reproduisant H est aussi invariant par les translations à gauche : $U(\mu)\ (H(\varphi)) = H(\mu * \varphi)$, donc H est un point-distribution d'après (6). En outre, cette propriété signifie que H est la convolution $* H^o$ avec une distribution H^o sur G (voir Schwartz [9] page 53 lorsque G est $\mathbf{R}^n$; pour G quelconque, on peut faire une démonstration analogue, ou utiliser le théorème des noyaux, voir Schwartz [10] pages 82-87, ou [11] pages 76-83).

Soit A un point-distribution de $\mathscr{H}$; comme pour H, il existe une distribution A^o sur G telle que $A : \mathscr{D}(G) \to \mathscr{H}$ soit l'application $\varphi \mapsto \varphi * A^o$; $A \mapsto A^o$ est une bijection de $\tilde{\mathscr{H}}^{-\infty}$ sur l'espace décrit dans l'énoncé, et on vérifie sans peine que cette bijection prolonge $\tilde{h} \mapsto h$. Si alors S est une distribution à support compact sur G, $U(S)A$ est l'application $\varphi \mapsto (A * \check{S})(\varphi) = A(\varphi * S) = \varphi * S * A^o$, donc $(U(S)A)^o = S * A^o$.

Ce théorème montre qu'il y a correspondance bijective entre les représentations unitaires régulières de G et les distributions de type positif sur G.

Théorème 3. — Soit $(\mathscr{H}, G, U, A)$ *une représentation unitaire pointée. Alors l'adjoint* $A^* : \mathscr{H} \mapsto \mathscr{D}'(G)$ *de* $A : \mathscr{D}(G) \to \mathscr{H}$ *est l'unique isomorphisme de* $(\mathscr{H}, G, U, A)$ *sur une représentation régulière de G, munie de son point-distribution canonique. Inversement, tout isomorphisme d'une représentation unitaire d'un espace hilbertien sur une représentation régulière provient d'un point distribution unique de la représentation.*

Esquisse de démonstration

Puisque A est d'image dense, A^* est injectif, c'est donc une bijection linéaire de $\mathscr{H}$ sur $A^*(\mathscr{H}) \subset \mathscr{D}'(G)$ On peut transporter la structure hilbertienne de $\mathscr{H}$ sur $A^*(\mathscr{H})$. On a ensuite :

$$
\begin{aligned}
(A^*(U(\mu)h) \mid \varphi)_{\mathscr{D}'(G),\mathscr{D}(G)} &= (U(\mu)h \mid A(\varphi))_{\mathscr{H}} \\
&= (h \mid U(\check{\bar{\mu}})\, A(\varphi))_{\mathscr{H}} = (h \mid A(\check{\bar{\mu}} * \varphi))_{\mathscr{H}} \\
&= (A^*h \mid \check{\bar{\mu}} * \varphi)_{\mathscr{D}'(G),\mathscr{D}(G)} = (\mu * A^*h \mid \varphi)_{\mathscr{D}'(G),\mathscr{D}(G)}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ou

$$A^*\, U(\mu)h = \mu * A^*h, \tag{14}$$

donc la transportée de $U(\mu)$ par A^* est la convolution $\mu\, *$ sur $\mathscr{H}^{-\infty} \subset \mathscr{D}'(G)$, et ainsi A^* transporte $(\mathscr{H}, G, U)$ sur une représentation régulière.

Le transporté par A^* du point-distribution A de $\mathscr{H}$ est A^*A : $\mathscr{D}(G) \to \mathscr{D}'(G)$; d'après le § 3 de la 1ère partie, c'est, par définition, le noyau reproduisant du sous-espace $A^*(\mathscr{H})$ de $\mathscr{D}'(G)$, c'est-à-dire son point-distribution canonique.

A^* est d'ailleurs le seul isomorphisme possible de $(\mathscr{H}, G, U, A)$ sur une représentation régulière munie de son point-distribution canonique; car, si B est un tel isomorphisme, on a $(h \mid A(\varphi))_{\mathscr{H}} = (B(h) \mid BA(\varphi))_{B(\mathscr{H})} = (B(h) \mid \varphi)_{\mathscr{D}'(G),\mathscr{D}(G)}$ puisque BA est le noyau reproduisant de $B(\mathscr{H})$ (voir (3)), donc $B = A^*$.

Si inversement $(\mathscr{H}, G, U)$ est une représentation unitaire de G, et si B est un isomorphisme de $(\mathscr{H}, G, U)$ sur une représentation régulière, de noyau reproduisant H, alors $A = B^{-1} \circ H : \mathscr{D}(G) \to \to B(\mathscr{H}) \to \mathscr{H}$, est un point-distribution de $\mathscr{H}$, dont $H = BA$ est l'image par B, de sorte que $B = A^*$.

En d'autres termes, il y a correspondance bijective entre les points distributions générateurs de $(\mathscr{H}, G, U)$ et ses isomorphismes sur des représentations régulières; et entre les classes de représentations unitaires pointées de G et les distributions de type positif, au sens de Bochner, sur G.

On peut généraliser. Soit $(\mathscr{H}, G, U)$ une représentation unitaire, représentée comme intégrale de représentations unitaires $(\mathscr{H}(\zeta), G, U(\zeta))$, $\zeta \in Z$, par rapport à une mesure de Radon $\nu \geqslant 0$ sur Z (voir Dixmier [3], § 2 du chapitre II, page 156). Soit ensuite A un point-distribution générateur de $(\mathscr{H}, G, U)$. On démontre qu'il est défini, d'une manière unique à un ensemble de mesure nulle près sur Z, par une famille $A(\zeta)$, $\zeta \in Z$, de points-distributions des $(\mathscr{H}(\zeta), G, U(\zeta))$. Et alors A et les $A(\zeta)$ donnent un isomorphisme de $(\mathscr{H}, G, U)$ et de son expression comme intégrale des $(\mathscr{H}(\zeta), G, U(\zeta))$, sur une représentation régulière de G, intégrale de représentations régulières.

Soit alors T une distribution de type positif sur G, supposé séparable. La convolution $* T$ est le noyau reproduisant H d'un sous-espace hilbertien $\mathscr{H}$ de $\mathscr{D}'(G)$ unitairement invariant à gauche, donc le point-distribution canonique de la représentation régulière correspondante; $T = H^o$. On sait (Dixmier [4] théorème 8.5.2, page 153) que cette représentation unitaire d'un groupe de Lie séparable dans un Hilbert séparable est intégrale de représentations unitaires irréductibles $\mathscr{H}(\zeta)$, $\zeta \in Z$ convenable, par rapport à une certaine mesure $\nu \geqslant 0$ sur Z; alors ce qui précède montre qu'on peut supposer que les $\mathscr{H}(\zeta)$ sont dans $\mathscr{D}'(G)$ et que les $H(\zeta)$ sont leurs noyaux reproduisants, donc de la forme $* T(\zeta)$, et finalement on a représenté T comme intégrale des $T(\zeta)$:

Théorème 4. — Toute distribution de type positif sur un groupe de Lie séparable unimodulaire est intégrale de distributions de type positif extremales.

Ce théorème a déja été obtenu par Maurin dans [6], et est exposé par lui dans ce même colloque; ses conditions sont un peu plus générales, mais nous n'avons parlé de groupes de Lie unimodulaires que pour simplifier, et on sait qu'il existe des distributions sur des groupes localement compacts arbitraires (Bruhat [2]); la méthode de Maurin est exactement la même que la nôtre, mais dualisée : il considère les espaces quotients préhilbertiens de $\mathscr{D}$ au lieu des sous-espaces hilbertiens de $\mathscr{D}'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUHAT, Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 84, 1956, pp. 97-205.

[2] BRUHAT, Distributions sur un groupe localement compact, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 89, 1961, pp. 43-75.

[3] DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Paris, Gauthiers-Villars, 1957.

[4] DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Paris, Gauthiers-Villars, 1964.

[5] HILLE, *Functional Analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, XXXI, 1948.

[6] MAURIN, A theory of characters, Harmonic analysis on Type I-groups of connected type, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, XI, 9, 1963, pp. 587-592.
[7] SCHWARTZ, Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés, *Journal d'Analyse*, Jérusalem, vol. XIII, 1964, pp. 115-256.
[8] SCHWARTZ, *On mixed problems on partial differential equations and Representations of semi-groups*, Tata Institute of fundamental research, Bombay, 1958.
[9] SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, tome II, Paris, Hermann, 1959.
[10] SCHWARTZ, *Applications of distributions to the study of elementary particles in relativistic quantum mechanics*, University of California, Berkeley, Cal., 1960. Traduit en russe.
[11] SCHWARTZ, éditions MIR, Moscou, 1964: Primenenie obobehonni'h functsii k izutchenin elementarni'h tchastits v reliativistskoï gvantovoï me'hanike; traduit de l'anglais par I.B. Alexandroff.