ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

**Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et
noyaux associés (noyaux reproduisants)**

J. Analyse Math., 13 (1964), p. 115-256.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-ESPACES HILBERTIENS D'ESPACES VECTORIELS
 TOPOLOGIQUES ET NOYAUX ASSOCIÉS
 (NOYAUX REPRODUISANTS)

Par
 LAURENT SCHWARTZ
 à Paris, France

TABLE DES MATIÈRES

	Page
Introduction	116
§0. Espaces et anti-espaces	119
§1. Sous-espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique	124
§2. L'ensemble $\text{Hilb}(E)$ des sous-espaces hilbertiens de E	132
§3. Les noyaux relatifs à E	139
§4. Le noyau d'un sous-espace hilbertien de E : l'application canonique de $\text{Hilb}(E)$ dans $\mathcal{L}^+(E)$	141
§5. Le sous-espace hilbertien attaché à un noyau ≥ 0 . Caractère bijectif de l'application canonique de $\text{Hilb}(E)$ dans $\mathcal{L}^+(E)$	154
§6. Isomorphisme canonique de $\text{Hilb}(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$	159
§7. Conséquences de l'isomorphisme	161
§8. Effet d'une application linéaire continue	174
§9. Espaces de fonctions sur un ensemble X . Noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman	188
§10. Cas où $\bar{E}'$ est un sous-espace de E	208
§11. Applications à la théorie du potentiel	223
§12. Sous-espaces hermitiens et noyaux hermitiens associés	234
§13. Unicité et multiplicité des noyaux hermitiens	245
Index des notations	254
Index bibliographique	255

Introduction.

Le noyau attaché à un espace hilbertien a été introduit par S. Bergman, dans le cas de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$; seul ou avec d'autres auteurs, il l'a appliqué systématiquement à l'étude de certains problèmes relatifs aux fonctions holomorphes, en même temps qu'il a introduit d'autres noyaux relatifs à d'autres espaces et les a utilisés à des problèmes aux dérivées partielles (Voir Bergman, [1], Bergman et Schiffer[1]). C'est Aronszajn qui a montré qu'il y avait là un cas particulier d'une situation générale: à tout sous-espace hilbertien de l'espace des fonctions sur un ensemble X on peut attacher un noyau "reproduisant"; il a étudié les relations entre le noyau et l'espace, introduisant les opérations de multiplication par les scalaires et d'addition, et la structure d'ordre; en même temps lui aussi montrait les relations étroites entre les noyaux et la solution de certains problèmes aux limites aux dérivées partielles (voir Aronszajn). Notre but est d'étendre encore le formalisme. Si E est un espace vectoriel topologique quelconque, séparé, localement convexe et quasi-complet, on peut définir un ensemble $\text{Hilb}(E)$ des sous-espaces hilbertiens de E , muni d'une structure de "cône convexe saillant", défini par les opérations indiquées ci-dessus; on peut d'autre part introduire l'espace $\mathcal{L}^+(E)$ des noyaux ≥ 0 relatifs à E , un noyau ≥ 0 étant une application linéaire faiblement continue ≥ 0 de E' dans E ; il est muni lui aussi d'une structure de cône convexe saillant. Et il existe alors un isomorphisme canonique entre ces deux cônes.

Le §0 introduit des généralités sur les espaces et anti-espaces, qui pourraient ou devraient figurer dans la littérature élémentaire sur les espaces vectoriels ainsi que la notion de conjuguée et d'adjointe d'une application linéaire continue.

Le §1 introduit les sous-espaces préhilbertiens et hilbertiens d'un espace vectoriel topologique, et la notion importante de complété d'un sous-espace préhilbertien; la notion de Q -complété est moins nécessaire à la compréhension de la suite.

Le §2 introduit le cône $\text{Hilb}(E)$ des sous-espaces hilbertiens de E , et définit proprement les 3 structures fondamentales: multiplication par un scalaire ≥ 0 , addition, relation d'ordre.

Le §3 introduit les noyaux relatifs à E , et des considérations vectorielles topologiques.

Le §4 définit le noyau ≥ 0 associé à un sous-espace hilbertien de E , ou noyau reproduisant, ou encore l'application canonique de $\text{Hilb}(E)$ dans $\mathcal{L}^+(E)$. La Proposition 6 peut servir de définition. La Proposition 8 jouera un rôle fondamental dans la suite: elle redonne l'espace hilbertien à partir de son noyau, et montre donc que l'application canonique $\text{Hilb}(E) \rightarrow \mathcal{L}^+(E)$ est injective.

Le §5 établit le caractère bijectif de cette application: tout noyau ≥ 0 est le noyau associé à un sous-espace hilbertien unique (Proposition 10).

Le §6 établit l'isomorphisme entre les deux structures de cônes de $\text{Hilb}(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$: la bijection définie antérieurement conserve les 3 structures fondamentales.

Le §7 donne un certain nombre de conséquences de cet isomorphisme. En particulier la Proposition 14 établit l'existence et l'unicité de la différence de deux sous-espaces hilbertiens, $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$, si $\mathcal{H}_1 \geq \mathcal{H}_2$. Les Propositions 18 et 19 traitent des sommes infinies de sous-espaces hilbertiens et de noyaux, donc des bases hilbertiennes de sous-espaces hilbertiens (Corollaire 5 de la Proposition 19), la Proposition 20 des intégrales (sommes mesurables) de sous-espaces hilbertiens et de noyaux.

Le §8 étudie l'effet d'une application linéaire continue. Si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, u une application linéaire continue de E dans F , u définit deux applications qui se correspondent, l'une de $\text{Hilb}(E)$ dans $\text{Hilb}(F)$, l'autre de $\mathcal{L}^+(E)$ dans $\mathcal{L}^+(F)$ (Proposition 21). On en déduit le caractère fonctoriel des applications Hilb et $\mathcal{L}^+$ (page 188).

Le §9 rejoint le cas particulier étudié par Bergman et Aronszajn, où E est l'espace des fonctions complexes sur un ensemble X , muni de la topologie de la convergence simple. Les propositions démontrées ici sont souvent de simples reproductions de celles d'Aronszajn. Pour voir les rapports entre le cas particulier et le cas général, on pourra lire ce qui est écrit page 191. La Proposition 27 bis reconstruit le noyau de Bergman sur une variété analytique complexe.

Le §10 étudie une situation toute nouvelle, tirée de la théorie des distributions. L'espace $\mathcal{D}$, dont le dual $\mathcal{D}'$ est l'espace des distributions, est en même temps un sous-espace de $\mathcal{D}'$. Alors on étudie la situation où $\tilde{E}'$ (c.à.d. $\mathcal{D}$)

est un sous-espace de E (c.a.d. $\mathcal{D}'$). On définit en général la notion de sous-espaces normaux de E , qui rejoint celle d'espaces de distributions normaux. Si alors $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , normal, son antidual $\overline{\mathcal{H}'}$ est encore un sous-espace de E ; leurs noyaux $H, \overline{H'}$ sont reliés de façon très intéressante: ils sont en quelque sorte inverses l'un de l'autre, et chacun des deux sous-espaces peut être reconstruit avec le noyau de l'autre (Propositions 28 bis à 31). On en déduit des applications aux problèmes aux limites des types de Dirichlet et de Neumann (page 106).

Le §11 étudie en détail un certain nombre d'applications à la théorie classique du potentiel: charges et potentiels d'énergie finie, balayage, restriction à un ouvert et opérateur de Green. Le langage des sous-espaces hilbertiens et noyaux associés est ici très fécond.

Le §12 tente une généralisation aux espaces hermitiens (à métrique non positive) et aux noyaux hermitiens associés. On rencontre là de grandes difficultés. Il apparait que, quelles que soient les méthodes employées, un noyau hermitien est associé, non plus à un sous-espace hermitien, mais à une classe de sous-espaces hermitiens; l'application canonique $\text{Herm}(E) \rightarrow \mathcal{L}^h(E)$, qui étend l'application $\text{Hilb}(E) \rightarrow \mathcal{L}^+(E)$, est surjective, mais n'est plus injective. Néanmoins c'est peut-être là, non pas une monstruosité, mais une nouveauté pleine d'intérêt.

Le §13 donne des conditions suffisantes, et dans certains cas nécessaires et suffisantes (corollaires de la Proposition 41) pour qu'un noyau hermitien provienne d'un seul sous-espace hermitien.

Le présent travail a été précédé de publications résumées, qui, éventuellement, seront avantageusement lues avant (*).

D'autre part nous publierons ultérieurement des applications, aux opérateurs différentiels (voir par exemple Proposition 34) et aux représentations unitaires des groupes de Lie et distributions de type positif sur ces groupes.

(*) Voir Schwartz [4] et [5].

§0. Espaces et anti-espaces

Anti-espace. Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$, localement convexe séparé⁽¹⁾. On appelle anti-espace de E la donnée d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé $\bar{E}$, et d'un anti-isomorphisme de E sur $\bar{E}$, qu'on appelle généralement conjugaison et qu'on note $e \rightsquigarrow \bar{e}$. Bien entendu E est un anti-espace de $\bar{E}$, pour l'anti-isomorphisme réciproque $\bar{e} \rightsquigarrow e$. Il n'existe qu'un seul anti-espace, à un isomorphisme près. Autrement dit, si $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ sont deux anti-espaces de E , correspondant à des anti-isomorphismes $e \rightsquigarrow \bar{e}_1$, $e \rightsquigarrow \bar{e}_2$, il existe un isomorphisme unique i de $\bar{E}_1$ sur $\bar{E}_2$, vérifiant $i\bar{e}_1 = \bar{e}_2$ pour tout e de E . Dans la pratique, on rencontre de nombreux modèles d'anti-espaces:

Exemples. 1°) Plaçons sur E la structure initiale de groupe additif, mais la loi de multiplication "canulée" par les scalaires complexes, notée $e \rightsquigarrow \lambda \times e$, telle que

$$(0,1) \quad \lambda \times e = \bar{\lambda}e.$$

Muni de ces lois, et de la topologie initiale, E devient un nouvel espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$, noté $\bar{E}$. Alors $\bar{E}$ est un anti-espace de E , si on prend pour conjugaison l'identité, $e \rightsquigarrow e$. Tout espace E possède donc un anti-espace, et un seul à un isomorphisme près.

2°) Fréquemment un espace vectoriel topologique E est muni d'un anti-automorphisme $e \rightsquigarrow \bar{e}$. On peut alors prendre $\bar{E} = E$, la conjugaison étant l'anti-automorphisme donné. Pour anti-espace de $\bar{E}$, on pourra prendre, soit E , avec la conjugaison $\bar{e} \rightsquigarrow e$, soit E , avec la conjugaison $\bar{e} \rightsquigarrow \bar{e}$: l'isomorphisme canonique i entre ces deux anti-espaces, défini au début, est alors $e \rightsquigarrow \bar{e}$. En général, l'anti-automorphisme donné est une anti-involution, c. à d. vérifie en outre $\bar{\bar{e}} = e$, de sorte que cette difficulté technique n'intervient pas.

(1) Pour la plupart des définitions concernant les espaces vectoriels topologiques, nous renverrons à Bourbaki [1]. Un espace vectoriel topologique est localement convexe si l'origine a un système fondamental de voisinages convexes. Une application u est anti-linéaire si $u(x+y) = u(x) + u(y)$, et si, pour tout scalaire λ , on a $u(\lambda x) = \bar{\lambda}u(x)$. Un anti-isomorphisme est un homéomorphisme anti-linéaire.

Par exemple, si f est une fonction complexe sur un ensemble X , on définit $\bar{f}$ par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$, et beaucoup d'espaces fonctionnels de l'analyse admettent l'anti-involution $f \rightsquigarrow \bar{f}$, et sont ainsi leurs propres anti-espaces. Il en est de même des espaces de courants et distributions⁽²⁾.

3°) Soit $\bar{E}$ un anti-espace de E . Soit E' son dual (espace des formes linéaires continues sur E); on notera par $\langle e, e' \rangle$ le produit scalaire de $e \in E$ et $e' \in E'$. Pour $e' \in E'$, $\bar{e} \rightsquigarrow \langle e', \bar{e} \rangle$ est une forme linéaire continue sur $\bar{E}$, donc définit un élément $\bar{e}'$ de $\bar{E}$. Alors $e' \rightsquigarrow \bar{e}'$ est une bijection anti-linéaire de E' sur $\bar{E}'$; elle est un homéomorphisme, donc un anti-isomorphisme, si on munit E' et $\bar{E}'$ de topologies correspondantes (faible, forte, etc... Si $\mathfrak{S}$ est une famille de parties de E , $\bar{\mathfrak{S}}$ la famille des parties conjuguées dans $\bar{E}$, on pourra prendre sur E' et $\bar{E}'$ respectivement la $\mathfrak{S}$ -convergence et la $\bar{\mathfrak{S}}$ -convergence⁽³⁾). On peut donc prendre $\bar{E}'$ comme anti-espace $\bar{E}'$ de E' avec la conjugaison $e' \rightsquigarrow \bar{e}'$; on a donc la règle $\bar{E}' = \overline{E'}$ et

$$(0,2) \quad \langle \bar{e}', \bar{e} \rangle = \overline{\langle e', e \rangle}.$$

Compte tenu de la définition de la transposée⁽⁴⁾ et de la contragrédiente d'une application anti-linéaire, $e' \rightsquigarrow \bar{e}'$ est la contragrédiente de $e \rightsquigarrow \bar{e}$ d'après (0,2).

Par exemple, dans le cas 1.), $\bar{E}'$ n'est autre que l'anti-dual de E (espace des formes anti-linéaires continues sur E). Dans le cas 2.), $\bar{E}'$ n'est autre que E' , et $e' \rightsquigarrow \bar{e}'$ est une anti-involution sur E' , contragrédiente de l'anti-involution de E . C'est ainsi que, de l'anti-involution $\phi \rightsquigarrow \bar{\phi}$ sur l'espace $\mathcal{D}(X)$ des fonctions C^∞ à support compact sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ (ou des formes différentielles C^∞ à support compact sur une variété X de classe C^∞), on déduit l'anti-involution $T \rightsquigarrow \bar{T}$ sur l'espace $\mathcal{D}'(X)$ des distributions (ou des courants) sur X , par:

$$(0,3) \quad \langle \bar{T}, \bar{\phi} \rangle = \overline{\langle T, \phi \rangle};$$

elle fait de $\mathcal{D}'(X)$ son propre anti-espace.

(2) Pour les distributions, nous référerons à Schwartz [1]; pour les courants, à de Rham [1].

(3) Voir Bourbaki [1], Chapitre III, §3 n°1.

(4) La transposée d'une application linéaire continue u de E dans F est l'application linéaire u de F' dans E' définie par: $\langle u(x), y' \rangle = \langle x, {}^u(y') \rangle$, pour $x \in E, y' \in F'$; la transposée d'une application anti-linéaire u est l'application anti-linéaire u définie par $\langle u(x), y' \rangle = \overline{\langle x, {}^u(y') \rangle}$. La contragrédiente est toujours l'inverse de la transposée.

On aura parfois avantage à introduire des produits scalaires sesqui-linéaires⁽⁵⁾ sur $E \times \bar{E}'$, $E' \times \bar{E}$, $\bar{E} \times E'$, $\bar{E}' \times E$:

$$(0,4) \quad \begin{cases} (e|\bar{e}') = (e'|\bar{e}) = \langle e, e' \rangle (= \langle e', e \rangle) \\ (\bar{e}|e') = (\bar{e}'|e) = \overline{\langle e, e' \rangle} . \end{cases}$$

4°) Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien; on notera par $(e|f)_{\mathcal{H}}$ son produit scalaire interne, sesquilinéaire. On peut prendre pour modèle de $\overline{\mathcal{H}}$ son dual $\mathcal{H}'$, la conjugaison étant l'anti-isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$; si $h \in \mathcal{H}$, $\bar{h}$ sera alors l'élément de $\mathcal{H}' = \overline{\mathcal{H}}$ défini par:

$$(0,4 \text{ bis}) \quad \langle k, \bar{h} \rangle = (k|h)_{\mathcal{H}} , \quad \forall k \in \mathcal{H} .$$

Dans ce cas, on sera amené à prendre pour $\overline{\mathcal{H}'}$ l'espace $\mathcal{H}$ lui-même, suivant 3. et (0,2), en identifiant l'élément h de $\mathcal{H}$ à l'élément de $\overline{\mathcal{H}'}$, représenté par la forme linéaire continue sur $\overline{\mathcal{H}'}: \bar{k} \rightsquigarrow (h|k)_{\mathcal{H}}$; (0,2) s'écrit ici, pour $h \in \overline{\mathcal{H}'} = \mathcal{H}$, $\bar{k} \in \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}'$:

$$(0,4 \text{ ter}) \quad \langle h, \bar{k} \rangle = (h|k)_{\mathcal{H}} , \quad \text{ce qui est (0,4 bis) avec interversion de } h \text{ et } k .$$

Le produit scalaire (0,4) de $h \in \mathcal{H}$ et $k \in \overline{\mathcal{H}'} = \mathcal{H}$ n'est autre que leur produit scalaire $(h|k)_{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{H}$. Le système des 4 espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{H}'}$, se réduit donc à 2, $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}'}$ et $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}'$.

Si en outre on se donne une anti-involution sur $\mathcal{H}$, alors les 4 espaces deviennent canoniquement isomorphes. L'isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ est le suivant: à $h \in \mathcal{H}$ on associe l'élément de $\mathcal{H}'$ définissant la forme linéaire continue sur $\mathcal{H}: k \rightsquigarrow (k|h)$.

Cependant, en analyse, il sera en général impossible de faire ces identifications: $\mathcal{H}$ possèdera assez généralement une anti-involution naturelle, permettant d'identifier $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{H}}$, donc aussi $\mathcal{H}'$ et $\overline{\mathcal{H}'}$, mais les couples $\mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{H}'$, $\overline{\mathcal{H}'}$ devront être distingués bien qu'étant isomorphes. Ainsi, dans l'exemple 2, page 126, on aura $\overline{\mathcal{H}^s} = \mathcal{H}^{-s}$ par l'anti-involution naturelle de la conjugaison complexe $f \rightsquigarrow \bar{f}$, mais $(\mathcal{H}^s)' = (\overline{\mathcal{H}^s})' = \mathcal{H}^{-s} \neq \mathcal{H}^s$.

(5) Une forme sesqui-linéaire B sur $E \times F$ est une fonction à valeurs complexes telle que l'application partielle $e \rightarrow B(e, f)$ soit linéaire et l'application partielle $f \rightarrow B(e, f)$ anti-linéaire. $\equiv$ „tournant dangereux“. Voir N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Fascicule I, Paris 1939. Page VI.

(*) Z

Z
(*)

Désormais nous parlerons de l'anti-espace $\bar{E}$ de E sans spécifier quel modèle aura été choisi. On supposera cependant toujours identifiés $\bar{E}'$ et $\overline{E'}$ suivant 3.) et (0.2).

Conjugée d'une application linéaire ou anti-linéaire.

Soit u une application linéaire ou anti-linéaire continue de E dans F . Alors $\bar{u}$ est une application de même nature, de $\bar{E}$ dans $\bar{F}$, définie par

$$(0,5) \quad \bar{u}\bar{e} = \overline{ue}, \quad \forall e \in E.$$

Si en particulier $u = e' \in E'$, correspondant à $F = \mathbb{C}$, $\bar{u}$ est l'élément $\bar{e}'$ de $\bar{E}'$ défini par (0,2) à condition de prendre, pour $\bar{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ lui-même, et pour conjugaison la conjugaison usuelle $z \rightsquigarrow \bar{z}$.

L'application $u \rightsquigarrow \bar{u}$ est un anti-isomorphisme de $\mathcal{L}(E;F)$ (espace des applications linéaires continues de E dans F) sur $\mathcal{L}(\bar{E};\bar{F})$, de sorte qu'on peut considérer le deuxième comme anti-espace du premier. On a maintenant, pour $e \in E, f' \in F'$, la formule

$$(0,6) \quad \begin{aligned} \langle \bar{u}f', \bar{e} \rangle &= \overline{\langle uf', e \rangle} \\ &= \overline{\langle uf', e \rangle} = \overline{\langle f', ue \rangle} \\ &= \langle f', \overline{ue} \rangle = \langle \bar{f}', \bar{u}\bar{e} \rangle = \langle \bar{u}f', \bar{e} \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$(0,7) \quad \overline{u} = {}^t\bar{u} \in \mathcal{L}(F';\bar{E}').$$

Cet opérateur $\overline{u} = {}^t\bar{u}$ sera aussi noté u^* et appelé l'adjoint de u .

D'après (0,6) il vérifie

$$(0,7 \text{ bis}) \quad \langle u^*f', \bar{e} \rangle = \overline{\langle f', ue \rangle} \text{ ou } \langle \bar{f}', \overline{ue} \rangle$$

ou, avec (0,4) :

$$(0,7 \text{ ter}) \quad (u^*f' | e) = (\bar{f}' | ue).$$

L'intérêt de lettres telles que $f', e, \dots$ est qu'elles indiquent aussitôt dans quel

espace on opère. Mais elles présentent parfois l'inconvénient de tout noyer dans les signes et indices. On pourra préférer retenir (0,7 bis) et (0,7 ter) sous la forme:

$$(0,7 \text{ quarto}) \quad \left. \begin{aligned} \langle u^* \phi, \bar{\psi} \rangle &= \langle \phi, \overline{u \psi} \rangle \\ (u^* \phi | \psi) &= (\phi | u \psi) \end{aligned} \right\} \phi \in F', \psi \in E.$$

Si E et F sont hilbertiens et si on les identifie à $\bar{E}'$ et F' par 4.), u^* devient une application linéaire continue de F dans E , qui est bien l'adjointe usuelle.

[Il en est de même si u est anti-linéaire, à cela près que les dernières égalités (0,6) sont à remplacer par

$$(0,8) \quad \begin{aligned} \dots \overline{\langle {}^t u f', e \rangle} &= \langle f', u e \rangle = \overline{\langle \bar{f}', \bar{u} \bar{e} \rangle} \\ &= \overline{\langle \bar{f}', \bar{u} \bar{e} \rangle} = \langle {}^t \bar{u} \bar{f}', \bar{e} \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui remplace ici (0,7 bis) est

$$(0,9) \quad \langle u^* \bar{f}', \bar{e} \rangle = \langle f', u e \rangle,$$

tandis que (0,7 ter) est remplacé par

$$(0,10) \quad (u^* \bar{f}' | e) = (u e | f').]$$

Enfin, si E, F, G , sont trois espaces, et si u applique E dans F et v applique F dans G , on a $\overline{v \circ u} = \bar{v} \circ \bar{u}$. Si u est inversible, $\bar{u}$ l'est aussi et $\bar{u}^{-1} = \overline{u^{-1}}$.

Toutes ces formules sont assez faciles et assez mécaniques. On a les règles générales:

1. Pour prendre la conjuguée d'une expression, on conjugue tout ce qui intervient dans cette expression (exemples: formules (0,2) ou (0,5)).

2. Au-dessus de chaque lettre, la parité du nombre des barres est la même de part et d'autre d'un signe = ; à condition de considérer que $*$ est l'équivalent d'une barre ($u^* = \overline{{}^t u}$), qu'une lettre placée après la verticale dans un produit scalaire ($(\alpha | \beta) = \langle \alpha, \bar{\beta} \rangle$), et que, si u est anti-linéaire, $u e$ contient une barre sur e . On vérifiera aisément cette règle dans (0,6) et (0,8).

§1. Sous-espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique.

Dans la suite, E sera toujours un espace vectoriel topologique, sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, séparé, localement convexe. On appellera sous-espace hilbertien (resp. préhilbertien) $\mathcal{H}$ de E la donnée d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de E , et d'une structure hilbertienne (resp. préhilbertienne) sur $\mathcal{H}$ [c. à d., rappelons-le, d'une forme hermitienne $(x, y) \rightsquigarrow (x|y)_{\mathcal{H}}$, linéaire en x , anti-linéaire en y , positive dans le cas préhilbertien, définie positive et telle que $\mathcal{H}$ soit complet pour la norme $x \rightsquigarrow \|x\|_{\mathcal{H}} = (x|x)^{1/2}$ dans le cas hilbertien], pour laquelle l'injection naturelle de $\mathcal{H}$ dans E soit continue. Cette dernière condition revient encore à dire que, sur $\mathcal{H}$, la topologie définie par la norme est plus fine que la topologie induite par E ; pour cela, il faut et il suffit que la boule unité de $\mathcal{H}$ soit bornée dans E . On notera bien que, suivant cette définition, deux structures hilbertiennes distinctes sur le même sous-espace vectoriel de E sont considérées comme définissant deux sous-espaces hilbertiens distincts de E .

La définition des sous-espaces hilbertiens et préhilbertiens ayant été donnée sans autre hypothèse sur E , nous supposons désormais toujours, sans même le mentionner dans l'énoncé, que E est quasi-complet⁽⁶⁾, pour sa topologie initiale. On considérera très fréquemment sa topologie affaiblie $\sigma(E, E')$; naturellement il n'est pas nécessairement quasi-complet pour cette dernière (sauf et seulement sauf s'il est semi-réflexif⁽⁷⁾). Par contre, il est quasi-complet pour la topologie $\tau(E, E')$ de Mackey, parce qu'elle est plus fine que la topologie initiale, et a un système fondamental de voisinages de 0 (les polaires des parties faiblement compactes convexes équilibrées de E') fermés pour la topologie initiale⁽⁸⁾. On se persuadera aisément que la topologie initiale

(6) Un espace vectoriel topologique est quasi-complet si toute partie fermée bornée est complète. Pour un espace métrisable, quasi-complet est équivalent à complet.

(7) Pour la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$, voir Bourbaki [1], chapitre IV, §2, n° 1. Comme toute partie bornée de E est toujours faiblement précompacte, il est équivalent de dire qu'une partie bornée faiblement fermée est faiblement complète ou qu'elle est faiblement compacte; et ceci est justement la condition de semi-réflexivité de Mackey (Bourbaki [1], Chapitre IV, §3, n° 3, Théorème 1).

(8) Pour la topologie τ de Mackey, voir Bourbaki [1], chapitre IV, §2, n° 3, théorème 2 et corollaire. De cette définition résulte bien que la topologie initiale de E est moins fine que $\tau(E, E')$. Le fait qu'un espace E , quasi-complet pour sa topologie initiale, le soit encore pour la topologie $\tau(E, E')$ résulte alors de Bourbaki [1], Chapitre I, §1, n° 5, Proposition 8.

ne joue aucun rôle dans la suite, et qu'on pourrait considérer simplement un couple d'espaces en dualité, E, E' , tels que E soit τ -quasi-complet. Nous avons préféré ne pas introduire cette topologie τ , souvent peu familière.

Proposition 0. *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de E , muni d'une structure préhilbertienne. S'il est sous-espace préhilbertien de E quand on munit E d'une topologie moins fine que la topologie initiale, mais ayant les mêmes parties bornées (par exemple la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ ⁽⁹⁾), il est sous-espace préhilbertien de E pour la topologie initiale. Soit E'^* le dual algébrique de E' (c. à d. l'espace de toutes les formes linéaires sur E' ; on a donc $E \subset E'^*$); munissons-le de la topologie faible $\sigma(E'^*, E')$ (il est alors complété faible de E). Si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E'^* , $\mathcal{H} \cap E$ (muni de la structure préhilbertienne induite par $\mathcal{H}$) est un sous-espace hilbertien de E : si $\mathcal{H}$ possède un sous-espace dense contenu dans E , ou une base hilbertienne contenue dans E , alors $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E .*

Démonstration.

Le début est évident puisque $\mathcal{H}$ est sous-espace préhilbertien de E si et seulement si la boule unité de $\mathcal{H}$ est bornée dans E : cela ne dépend par de la topologie de E , mais seulement de ses parties bornées.

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E'^* . Alors, soit $h_n, n = 1, 2, \dots$, une suite de Cauchy de $\mathcal{H}$ contenue dans E ; elle converge vers un élément de $\mathcal{H}$ pour la topologie de $\mathcal{H}$; mais c'est une suite de Cauchy de E , car $\mathcal{H} \cap E$, sous-espace préhilbertien de E affaibli, est aussi sous-espace préhilbertien de E pour sa topologie initiale; donc, E étant supposé quasi-complet pour sa topologie initiale, elle converge aussi vers un élément de E pour la topologie de E . Ses limites dans $\mathcal{H}$ et dans E coïncident, car elles sont sa limite dans E'^* . Cela prouve bien que $\mathcal{H} \cap E$ est complet, c'est un sous-espace hilbertien de E . Si $\mathcal{H}_0$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$ contenu dans E , son adhérence dans $\mathcal{H}$ est alors dans $\mathcal{H} \cap E$; si donc $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ est dans E . C'est ce qui se produira si $\mathcal{H}$ a une base hilbertienne dans E , car le sous-espace qu'elle engendre algébriquement est dense dans $\mathcal{H}$ et contenu dans E .

⁽⁹⁾ Toute partie faiblement bornée est aussi bornée pour la topologie initiale (Théorème de Mackey, voir Bourbaki [1], Chapitre IV, §2, n°4, Théorème 3).

Exemple 1. Sur un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , toute forme hermitienne définie positive définit une structure hilbertienne dont la topologie est identique à la topologie induite par E puisqu'elles sont toutes deux séparées⁽¹⁰⁾, donc elle définit un sous-espace hilbertien de E . Pour certains espaces E de dimension infinie assez "monstrueux", tous les sous-espaces hilbertiens sont de dimension finie.

Soit, par exemple, E un espace vectoriel de dimension infinie, muni de la topologie localement convexe la plus fine⁽¹¹⁾. Dans cette topologie, tout sous-espace vectoriel est fermé. Si alors $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , tous ses sous-espaces vectoriels sont fermés dans E donc dans $\mathcal{H}$, donc $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Exemple 2. Si E est l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions complexes sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H} = L^2$ est un sous-espace hilbertien de E . Usuellement, on pose aussi $\mathcal{H}^0 = L^2$, et on définit l'espace $\mathcal{H}^s$, s entier ≥ 0 ⁽¹²⁾, comme l'espace des fonctions (plus exactement: classes de fonctions, au sens de l'équivalence de Lebesgue) appartenant à L^2 , et dont les dérivées d'ordre $\leq s$, au sens des distributions, sont aussi des fonctions de L^2 (usuellement, on écrit H^s , nous écrivons ici $\mathcal{H}^s$). Pour tout indice de dérivation $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ d'ordre $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq s$, on choisit a_p , nombre > 0 ; alors on peut munir $\mathcal{H}^s$ du produit scalaire

$$(1,1) \quad (f|g)_{\mathcal{H}^s} = \sum_{|p| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} a_p D^p f D^p \bar{g} dx,$$

qui en fait un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'$.

En tant qu'espace vectoriel topologique, il est indépendant du choix des a_p , mais pas en tant qu'espace hilbertien.

⁽¹⁰⁾ Il n'y a qu'une topologie d'espace vectoriel séparée sur un espace vectoriel de dimension finie; voir Bourbaki [1], Chapitre I, § 2, n° 3, Théorème 2.

⁽¹¹⁾ Il existe sur tout espace vectoriel une topologie localement convexe plus fine que toutes les autres, définie par exemple par la famille de toutes les semi-normes. Toutes les semi-normes sont alors continues, donc aussi toutes les formes linéaires, donc tous les hyperplans sont fermés, donc aussi tous les sous-espaces vectoriels, qui sont tous des intersections d'hyperplans.

⁽¹²⁾ Les espaces $\mathcal{H}^s$ sont d'un usage courant en théorie des équations aux dérivées partielles. On en trouvera par exemple une étude très complète dans Hörmander [1], Chapitre II, Définition 2.4.1, avec la notation $\mathcal{H}_{(s)}$.

On définit $\mathcal{H}^{-s}$ comme dual de $\mathcal{H}^s$, muni de son injection naturelle dans $\mathcal{D}'$ transposée de l'injection naturelle dense de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}^s$, et de sa norme de dual de $\mathcal{H}^s$, il est encore un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'$ (sa structure hilbertienne dépendant du choix des a_p).

On définit plus généralement les $\mathcal{H}^s$ pour s réel quelconque par la transformation de Fourier, mais nous n'en ferons pas usage ici. Si maintenant X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(X)$, pour s entier ≥ 0 , est le sous-espace de $\mathcal{D}'(X)$ (espace des distributions sur X) formé des fonctions de $L^2(X)$ dont les dérivées d'ordre $\leq s$, au sens des distributions, sont dans $L^2(X)$; on le munit du produit scalaire $(1,1)$, où $\int_{\mathbb{R}^n}$ est remplacé par $\int_X$, qui dépend des a_p et en fait un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'(X)$. $\mathcal{D}(X)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}^s(X)$ pour $s \geq 1$; soit $\mathcal{H}_0^s$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{H}^s(X)$. Alors on définit $\mathcal{H}^{-s}(X)$ comme le dual de $\mathcal{H}_0^s(X)$, muni de l'injection naturelle dans $\mathcal{D}'(X)$ transposée de l'injection dense de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{H}_0^s(X)$; c'est encore un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'(X)$.

Exemple 3. Soit X un espace de Riemann orienté de dimension n , de classe C^∞ . Il existe alors une opération $*$, qui fait correspondre à toute forme différentielle ω de degré p une forme différentielle $*\omega$ ou ω^* de degré $n - p$; l'opération $*$ est antilinéaire. Soit $\mathcal{H}$ l'espace des classes de formes différentielles mesurables, telles que la forme ≥ 0 de degré n : $\omega \wedge \omega^*$, soit intégrable; on peut munir $\mathcal{H}$ du produit scalaire:

$$(1,2) \quad (\alpha | \beta)_{\mathcal{H}} = \int_X \alpha \wedge \beta^* \quad .$$

$\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de l'espace $\mathcal{D}'(X)$ des courants sur X ; on l'utilise dans la théorie des formes harmoniques⁽¹³⁾. Si X est compact, $\mathcal{H}$, en tant qu'espace vectoriel topologique, ne dépend pas de la structure riemannienne de X , c. à d. de l'opération $*$ ($\mathcal{H}$ est l'espace des classes de formes mesurables, à coefficients L^2 sur tout compact dans toute carte locale de X); mais sa structure hilbertienne en dépend. Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le sous-

⁽¹³⁾ Voir de Rham [1], Chapitre V, §24 et 25.

espace $\mathcal{H}^0$ de $\mathcal{H}$ formé des formes de degré 0 n'est autre que $L^2(X)$, avec sa norme usuelle.

Exemple 4. Soit X un espace topologique localement compact, μ une mesure de Radon ≥ 0 sur X . Pour toute $f \in L^2(X, \mu)$ (f est une classe de fonctions, et non une fonction), on peut définir la mesure de Radon $f\mu$, où f est une fonction quelconque de la classe f . Nous appellerons $\Lambda^2(X, \mu)$ l'espace de ces mesures, muni du produit scalaire

$$(1,2 \text{ bis}) \quad (f\mu | g\mu)_{\Lambda^2(X, \mu)} = (f | g)_{L^2(X, \mu)} \\ = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

$\Lambda^2(X, \mu)$ est un espace préhilbertien; mais comme $f \rightarrow f\mu$ est une isométrie de L^2 sur Λ^2 , il est hilbertien comme L^2 lui-même. Il est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'^0(X)$ des mesures de Radon sur X . Par ailleurs, si $f\mu$ converge faiblement vers 0 dans Λ^2 (et a fortiori si elle converge fortement), elle converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{D}'^0$, car, pour $\phi \in \mathcal{D}'^0(X)$:

$$(1,2 \text{ ter}) \quad \langle f\mu, \phi \rangle = (f\mu | \bar{\phi}\mu)_{\Lambda^2}.$$

Donc $\Lambda^2(X, \mu)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'^0(X)$ faible, et aussi de $\mathcal{D}'^0(X)$ fort, qui a les mêmes parties bornées puisque $\mathcal{D}'^0(X)$ est complet⁽¹⁴⁾.

Remarquons que $\Lambda^2(X, \mu)$ est muni d'une anti-involution naturelle, la conjugaison complexe, induite par celle de $\mathcal{D}'^0(X)$: $f\mu \rightsquigarrow \bar{f}\mu = \bar{f}\mu$. On peut donc, suivant 4° page 121, identifier les 4 espaces Λ^2 , $\bar{\Lambda}^2$, $(\Lambda^2)'$, $(\bar{\Lambda}^2)'$; l'élément $f\mu$ de Λ^2 est, par exemple, identifié à l'élément de $(\Lambda^2)'$ définissant la forme linéaire continue sur Λ^2 : $g\mu \rightsquigarrow \int_X f g d\mu$. La formule (1,2 ter) peut

ainsi être remplacée par

⁽¹⁴⁾ $\mathcal{D}'^0$ est l'espace des fonctions continues à support compact, muni de la topologie limite inductive usuelle (Schwartz [1], chapitre III, §1). Il est complet (loc. cit. chapitre III, théorème I) donc les parties faiblement bornées de son dual $\mathcal{D}'^0$ sont aussi fortement bornées (Bourbaki [1], Chapitre IV §3, n° 2, Proposition 1).

(1,2 quarto) $\langle f\mu, \phi \rangle_{\mathcal{D}'^0, \mathcal{D}^0} = \langle f\mu, \phi \mu \rangle_{\Lambda^2, (\Lambda^2)'} .$

Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et si μ est la mesure de Lebesgue dx , on identifie en général la fonction f , sa classe $f \cdot$, et la mesure ou la distribution $f dx$; on identifie donc $L^2(X, dx)$ et $\Lambda^2(X, dx)$, ainsi que leurs duals et anti-espaces.

Complété d'un sous-espace préhilbertien de E .

Soit $\mathcal{H}_0$ un sous-espace préhilbertien de E . On appelle complété de $\mathcal{H}_0$ dans E tout sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E , induisant sur $\mathcal{H}_0$ sa structure préhilbertienne, et dans lequel $\mathcal{H}_0$ soit dense.

Proposition 1. *Soit $\mathcal{H}_0$ un sous-espace préhilbertien de E , j son injection naturelle dans E ; soit $\hat{\mathcal{H}}_0$ le complété de $\mathcal{H}_0$ ⁽¹⁵⁾, $\hat{j}$ l'application linéaire continue de $\hat{\mathcal{H}}_0$ dans E prolongeant j . Pour que $\mathcal{H}_0$ ait un complété $\mathcal{H}$ dans E , il faut et il suffit que j soit injective; ou encore il faut et il suffit que la boule unité B_0 de $\mathcal{H}_0$ soit fermée dans $\mathcal{H}_0$ pour la topologie induite par E . Dans ce cas, $\mathcal{H}$ est unique; c'est l'image de $\hat{\mathcal{H}}_0$ par $\hat{j}$, muni de la structure hilbertienne transportée par $\hat{j}$ de celle de $\hat{\mathcal{H}}_0$.*

Démonstration. Le complété $\hat{\mathcal{H}}_0$ n'est pas en général un sous-espace de E . Mais j , étant linéaire continue, se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\hat{j}$ de $\hat{\mathcal{H}}_0$ dans E ; en fait, comme $\mathcal{H}_0$ est normé, son complété $\hat{\mathcal{H}}_0$ coïncide avec son quasi-complété $\hat{\mathcal{H}}_0$, donc $\hat{j}$ envoie $\hat{\mathcal{H}}_0$ dans le quasi-complété $\hat{E}$, c. à d. dans E (supposé quasi-complet). On a un diagramme commutatif

(1,3)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_0 & \xrightarrow[\subset]{j} & E \\ & \searrow & \nearrow \hat{j} \\ & \hat{\mathcal{H}}_0 & \end{array}$$

où $\mathcal{H}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0$ est l'injection canonique de $\mathcal{H}_0$ dans son complété. Le fait que j soit injective n'entraîne nullement, en général, que $\hat{j}$ le soit.

⁽¹⁵⁾ Il est peut-être ambigu de dire "le" complété. Il y en a plusieurs définitions possibles; tous les complétés sont de toute façon canoniquement isomorphes. $\hat{\mathcal{H}}_0$ désigne donc n'importe quel espace hilbertien dont $\mathcal{H}_0$ soit un sous-espace vectoriel dense, avec la structure préhilbertienne induite.

1) Supposons qu'il existe un complété $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_0$ dans E . Puisque $\mathcal{H}$ est complet, et $\mathcal{H}_0$ dense dans $\mathcal{H}$, il existe un *isomorphisme* canonique de $\widehat{\mathcal{H}}_0$ sur $\mathcal{H}$ et on a le diagramme commutatif:

$$(1,4) \quad \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{H}_0 & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\subset} & E \\ & \searrow & \nearrow & & \nearrow \\ & & \widehat{\mathcal{H}}_0 & & \end{array}$$

Alors j est bien injective, $\mathcal{H}$ est bien unique, puisqu'il est l'image $j(\widehat{\mathcal{H}}_0)$, sa structure est la transportée par j de celle de $(\widehat{\mathcal{H}}_0)$. La boule unité B_0 de $\mathcal{H}_0$ est l'intersection $B \cap \mathcal{H}_0$ de la boule unité B de $\mathcal{H}$ avec $\mathcal{H}_0$; B est faiblement compacte dans $\mathcal{H}$, donc dans E , donc fermée dans E ; donc B_0 est bien fermée dans $\mathcal{H}_0$ pour la topologie induite par E .

2°) Supposons j injective. Si alors nous appelons $\mathcal{H}$ l'image $j(\widehat{\mathcal{H}}_0)$, muni de la structure hilbertienne transportée par j de celle de $\widehat{\mathcal{H}}_0$, alors $\mathcal{H}$ est hilbertien et l'injection $\mathcal{H} \rightarrow E$ est continue puisque j est continue, donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E ; comme $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\widehat{\mathcal{H}}_0$, il est dense dans $\mathcal{H}$, et $\mathcal{H}$ est le complété de $\mathcal{H}_0$ dans E .

3°) Supposons que la boule unité B_0 de $\mathcal{H}_0$ soit fermée dans $\mathcal{H}_0$ pour la topologie induite par E . Soit h un élément de $\widehat{\mathcal{H}}_0$ tel que $j(h) = 0$. Il existe une suite d'éléments h_n de $\mathcal{H}_0$, qui, pour $n \rightarrow \infty$, convergent vers h dans $\widehat{\mathcal{H}}_0$; $j(h_n) = h_n$, donc h_n converge vers $j(h) = 0$ dans E . Soit $\varepsilon > 0$; il existe N tel que, pour $m \geq N$, $n \geq N$, $\|h_m - h_n\|_{\mathcal{H}_0} \leq \varepsilon$; pour $n \rightarrow \infty$, $h_m - h_n$ converge vers h_m dans E , et comme la boule de rayon ε de $\mathcal{H}_0$ est fermée pour la topologie induite par E , on a $\|h_m\|_{\mathcal{H}_0} \leq \varepsilon$ pour $m \geq N$. Cela prouve que h_m converge vers 0 dans $\mathcal{H}_0$ pour $m \rightarrow \infty$, donc $h = 0$, et j est injective; nous sommes ramenés à 2°), et la Proposition 1 est démontrée.

Contre-exemple. Soit $E = L^2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{H}_0$ le sous-espace des fonctions continues de L^2 , muni du produit scalaire:

$$(1,5) \quad (f|g)_{\mathcal{H}_0} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx + f(0)\overline{g(0)}.$$

$\mathcal{H}_0$ est un sous-espace préhilbertien de E .

On peut identifier $\hat{\mathcal{H}}_0$ au produit $L^2 \times \mathbb{C}$, muni du produit scalaire:

$$(1,6) \quad ((f, \alpha) | (g, \beta))_{\hat{\mathcal{H}}_0} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx + \alpha \bar{\beta},$$

l'injection canonique de $\mathcal{H}_0$ dans $\hat{\mathcal{H}}_0$ étant définie par $f \rightsquigarrow (f, f(0))$.

Alors l'application j de $\hat{\mathcal{H}}_0$ dans E est définie par $(f, \alpha) \rightsquigarrow f$, seule application linéaire continue de $\hat{\mathcal{H}}_0$ dans E qui, composée avec l'injection de $\mathcal{H}_0$ dans $\hat{\mathcal{H}}_0$, donne l'injection de $\mathcal{H}_0$ dans $E: f \rightsquigarrow (f, f(0)) \rightsquigarrow f$. Alors j n'est pas injective; son noyau est $\{0\} \times \mathbb{C}$. Il est visible ici que B_0 n'est pas fermée dans $\mathcal{H}_0$ pour la topologie induite par E . Car l'adhérence $\bar{B}_0$ de B_0 dans E est la boule unité de L^2 (toute $f \in L^2$, de norme ≤ 1 , est limite, dans L^2 , de $f_n \in L^2$, continues, vérifiant $\|f_n\|_{L^2} \leq 1, f_n(0) = 0$, donc appartenant à B_0); alors $\bar{B}_0 \cap \mathcal{H}_0$ est strictement plus grande que B_0 , et contient par exemple, toute fonction $f \in L^2$, continue, vérifiant $\|f\|_{L^2} \leq 1, |f(0)| > 1$, donc n'appartenant pas à B_0 .

Q-complété dans E d'un sous-espace préhilbertien $\mathcal{H}_0$ de E .

Supposons que les conditions énoncées dans la Proposition 1 ne soient pas réalisées. Alors j n'est pas injective; soit $\mathcal{N} = (j)^{-1}(\{0\})$ son noyau; on a sûrement $\mathcal{N} \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$. $\hat{\mathcal{H}}_0/\mathcal{N}$ est un espace hilbertien, et j se factorise en $\hat{\mathcal{H}}_0 \xrightarrow{\pi} \hat{\mathcal{H}}_0/\mathcal{N} \xrightarrow{j} E$, où π est l'application canonique de $\hat{\mathcal{H}}_0$ sur le quotient $\hat{\mathcal{H}}_0/\mathcal{N}$, et où $j \cdot$ est injective. On peut alors, sur $\mathcal{H} = j(\hat{\mathcal{H}}_0)$, transporter par $j \cdot$ la structure hilbertienne de $\hat{\mathcal{H}}_0/\mathcal{N}$; $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , dans lequel $\mathcal{H}_0$ est dense. Mais il induit sur $\mathcal{H}_0$ une norme plus faible que celle de $\mathcal{H}_0$, à savoir celle de $\hat{\mathcal{H}}_0/\mathcal{N}$; nous dirons que $\mathcal{H}$ est le Q-complété de $\mathcal{H}_0$ dans E , Q étant l'initiale de quotient. Dans l'exemple qui précède, le Q-complété de $\mathcal{H}_0$ dans L^2 est L^2 . On peut caractériser $\mathcal{H}$ comme suit:

Proposition 1 bis. *Le Q-complété $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_0$ dans E est le plus petit sous-espace hilbertien de E contenant $\mathcal{H}_0$, et sa norme est la plus grande norme de sous-espace hilbertien de E qui induise sur $\mathcal{H}_0$ une norme plus faible que celle de $\mathcal{H}_0$ (c. à d. telle que l'injection de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}$ soit de norme ≤ 1).*

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E contenant $\mathcal{H}_0$. Alors l'injection j de $\mathcal{H}_0$ dans E se factorise en $\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow E$, composée d'injections continues. Par prolongement continu, j se factorise en $\hat{\mathcal{H}}_0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow E$, donc $j(\hat{\mathcal{H}}_0) = \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$; $\mathcal{H}$ est bien le plus petit sous-espace hilbertien de E contenant $\mathcal{H}_0$. Si en outre $\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{K}$ a une norme ≤ 1 , alors $\hat{\mathcal{H}}_0 \rightarrow \mathcal{K}$ a une norme ≤ 1 , donc, par passage au quotient, $\hat{\mathcal{H}}_0/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{K}$ a une norme ≤ 1 , donc aussi $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$; la norme induite par $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}$ est plus petite que celle de $\mathcal{H}$.

§2. L'ensemble $\text{Hilb}(E)$ des sous-espaces hilbertiens de E .

Nous appellerons $\text{Hilb}(E)$ l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de E . Il possède une structure remarquable.

1°) Il existe une loi de multiplication des éléments de $\text{Hilb}(E)$ par les nombres réels ≥ 0 .

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , λ un nombre réel ≥ 0 . Nous appellerons $\lambda\mathcal{H}$ l'espace $\{0\}$ si $\lambda = 0$, et, si $\lambda > 0$, l'espace $\mathcal{H}$ muni d'un nouveau produit scalaire, obtenu en multipliant l'ancien par $\frac{1}{\lambda}$ (les relations ultérieures montreront la nécessité de ce choix):

$$(2,1) \quad (h|k)_{\lambda\mathcal{H}} = \frac{1}{\lambda} (h|k)_{\mathcal{H}} \quad .$$

On a donc

$$(2,2) \quad \|h\|_{\lambda\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|h\|_{\mathcal{H}} \quad .$$

On a bien évidemment l'associativité

$$(2,3) \quad (\lambda\mu)\mathcal{H} = \lambda(\mu\mathcal{H}), \quad \lambda \geq 0, \mu \geq 0.$$

2°) Il existe une loi d'addition sur $\text{Hilb}(E)$.

Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, deux sous-espaces hilbertiens de E ; nous allons définir un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ (attention, on n'a pas nécessairement $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$).

Tout d'abord considérons la somme hilbertienne $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$; c'est le produit $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, muni du produit scalaire

$$(2,4) \quad ((h_1, h_2) | (k_1, k_2))_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = (h_1 | k_1)_{\mathcal{H}_1} + (h_2 | k_2)_{\mathcal{H}_2} \quad .$$

On a donc aussi

$$(2,5) \quad \| h_1, h_2 \|_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}^2 = \| h_1 \|_{\mathcal{H}_1}^2 + \| h_2 \|_{\mathcal{H}_2}^2 \quad .$$

Bien entendu ce n'est pas un sous-espace de E . Mais il existe une application naturelle Φ de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ dans E , définie par:

$$(2,6) \quad \Phi(h_1, h_2) = h_1 + h_2 \quad .$$

Φ est linéaire et continue. Son noyau $\mathcal{N}$ est l'ensemble des couples (h_1, h_2) tels que $h_1 + h_2 = 0$, son image est la somme $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Le noyau $\mathcal{N}$ est fermé puisque Φ est continu, alors $(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$ est encore un espace hilbertien, et l'on a un diagramme commutatif:

$$(2,7) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\Phi} & E \\ \pi \searrow & & \nearrow \Phi \cdot \\ & (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N} & \end{array}$$

où π est l'application canonique de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ sur le quotient $(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$, et où $\Phi \cdot$ est linéaire continue injective. Si $\mathcal{K}$ est l'orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, π est un isomorphisme (pour la structure hilbertienne) de $\mathcal{K}$ sur $(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$.

Alors nous appellerons $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ l'espace somme, image de Φ , muni de la structure hilbertienne transportée par $\Phi \cdot$ de celle de $(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$. $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ est bien un espace hilbertien, son injection dans E est continue puisque $\Phi \cdot$ est continue; c'est donc bien un sous-espace hilbertien de E . En outre, Φ est un isomorphisme (pour la structure hilbertienne) de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Pour un élément $h \cdot$ de $(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$, la norme-quotient est définie par:

$$\begin{aligned}
 (2,8) \quad \|h\|_{(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}}^2 &= \inf_{\pi(h_1, h_2) = h} \|(h_1, h_2)\|_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}^2 \\
 &= \inf_{\pi(h_1, h_2) = h} (\|h_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|h_2\|_{\mathcal{H}_2}^2) .
 \end{aligned}$$

On en déduit, pour un élément h de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, la formule :

$$(2,9) \quad \|h\|_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2}^2 = \inf_{h_1 + h_2 = h} (\|h_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|h_2\|_{\mathcal{H}_2}^2).$$

Notons que, dans (2,8) comme dans (2,9), Inf est en réalité un Min, et qu'on a exactement

$$(2,10) \quad \|h\|_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2}^2 = \|h_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|h_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 ,$$

pour l'unique élément (h_1, h_2) de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ appartenant à l'orthogonal $\mathcal{N}$ du noyau $\mathcal{N}$ et tel que $h_1 + h_2 = h$.

En outre, pour h et k dans $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, on a

$$(2,11) \quad (h|k)_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2} = (h_1|k_1)_{\mathcal{H}_1} + (h_2|k_2)_{\mathcal{H}_2} ,$$

avec $h_1 + h_2 = h, k_1 + k_2 = k$, pourvu que l'un au moins des éléments $(h_1, h_2), (k_1, k_2)$, de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, soit orthogonal à $\mathcal{N}$.

On peut donc définir $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ sans passer par $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ et Φ , en disant simplement que, en tant qu'espace vectoriel, c'est la somme des sous-espaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ de E , et que sa norme est donnée par (2,9); mais c'est la méthode ci-dessus qui montre que cette norme est hilbertienne (parce qu'un quotient $(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$ d'un Hilbert par un sous-espace fermé est un Hilbert).

Si $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, $\mathcal{N}$ est réduit à $\{0\}$; il y a, pour $h \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, un seul couple (h_1, h_2) de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ tel que $h_1 + h_2 = h$, Φ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ sur $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, sont deux sous-espaces fermés orthogonaux et leur structure hilbertienne est induite par celle de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

On a les formules

$$(2,11 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \lambda(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = \lambda\mathcal{H}_1 + \lambda\mathcal{H}_2, \lambda \geq 0. \\ (\lambda + \mu)\mathcal{H} = \lambda\mathcal{H} + \mu\mathcal{H}, \lambda \text{ et } \mu \geq 0. \end{cases}$$

La première formule est triviale; montrons la deuxième qui l'est moins. Les deux membres coïncident en tant qu'espaces vectoriels, il s'agit de montrer que leurs normes coïncident. Bornons-nous au cas où λ et μ sont > 0 , le résultat étant trivial autrement.

Soit $h \in \mathcal{H}$. Cherchons sa norme dans $\lambda\mathcal{H} + \mu\mathcal{H}$. Soient h_1, h_2 , deux éléments de $\mathcal{H}$ tels que $h_1 + h_2 = h$; à quelle condition (h_1, h_2) est-il dans $\mathcal{H}$, orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\lambda\mathcal{H} \oplus \mu\mathcal{H}$? On doit avoir

$$(2,11 \text{ ter}) \quad (h_1 | k_1)_{\lambda\mathcal{H}} + (h_2 | k_2)_{\mu\mathcal{H}} = 0 \quad , \quad \text{ou}$$

$$(2,12) \quad \frac{1}{\lambda}(h_1 | k_1)_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\mu}(h_2 | k_2)_{\mathcal{H}} = 0 \quad ,$$

pour tout couple (k_1, k_2) de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ tel que $k_1 + k_2 = 0$. Cela revient à dire que

$$(2,13) \quad \left(\frac{h_1}{\lambda} - \frac{h_2}{\mu} | k_1 \right)_{\mathcal{H}} = 0$$

pour tout k_1 de $\mathcal{H}$ ou encore $\frac{h_1}{\lambda} - \frac{h_2}{\mu} = 0$.

Les deux équations

$$(2,14) \quad \begin{cases} h_1 + h_2 = h \\ \frac{h_1}{\lambda} - \frac{h_2}{\mu} = 0 \end{cases}$$

donnent

$$(2,15) \quad h_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} h, \quad h_2 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} h$$

Alors

$$(2,16) \quad \begin{aligned} \|h\|_{\lambda\mathcal{H} + \mu\mathcal{H}}^2 &= \|h_1\|_{\lambda\mathcal{H}}^2 + \|h_2\|_{\mu\mathcal{H}}^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\mu^2}{(\lambda + \mu)^2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{\lambda + \mu} \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|h\|_{(\lambda + \mu)\mathcal{H}}^2 \quad , \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la deuxième formule (2,11 ter).

La loi d'addition dans $\text{Hilb}(E)$ est trivialement commutative, et a pour élément neutre le sous-espace hilbertien $\{0\}$. D'autre part elle est associative:

$$(2,17) \quad (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) + \mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_1 + (\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3)$$

Chacun des deux membres peut se noter $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$, et se définir directement comme le sous-espace somme, muni de la norme

$$(2,18) \quad \|h\|_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3}^2 = \inf_{h_1 + h_2 + h_3 = h} (\|h_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|h_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \|h_3\|_{\mathcal{H}_3}^2),$$

la démonstration du caractère de sous-espace hilbertien de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ utilisant l'application naturelle Φ de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ dans E , définie par $\Phi(h_1, h_2, h_3) = h_1 + h_2 + h_3$.

3°) Il existe dans $\text{Hilb}(E)$ une relation d'ordre.

Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, deux sous-espaces hilbertiens de E . Nous dirons que $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$, si $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, et si l'injection de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ est continue de norme ≤ 1 , ce qui se traduit par

$$(2,19) \quad \|h\|_{\mathcal{H}_1} \geq \|h\|_{\mathcal{H}_2} \text{ pour } h \in \mathcal{H}_1.$$

Cela revient aussi à dire que la boule unité ouverte (resp. fermée) de $\mathcal{H}_1$ est contenue dans la boule unité ouverte (resp. fermée) de $\mathcal{H}_2$.

Par exemple, si nous reprenons l'Exemple 2 de la p. 126, on a $\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^t(X)$ pour $s \leq t$, si le système des $a_p, |p| \leq s$, se prolonge par celui des $a_p, |p| \leq t$.

Bien remarquer que l'inégalité $\leq$ se traduit par l'inclusion $\subset$, mais par une relation inversée $\geq$ entre les normes. Il s'agit bien d'une relation d'ordre parce que, si $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_2 \leq \mathcal{H}_1$, les deux espaces vectoriels sont les mêmes avec la même norme, donc le même produit scalaire, en vertu de la relation bien connue

$$(2,19 \text{ bis}) \quad 4(h|k)_{\mathcal{H}} = \|h+k\|_{\mathcal{H}}^2 - \|h-k\|_{\mathcal{H}}^2 + i\|h+ik\|_{\mathcal{H}}^2 - i\|h-ik\|_{\mathcal{H}}^2.$$

On a trivialement, pour $\mathcal{H} \neq \{0\}$:

$$(2,20) \quad \lambda \mathcal{H} \leq \mathcal{H} \Leftrightarrow \lambda \leq 1.$$

D'autre part, $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \supseteq \mathcal{H}_1$ et $\supseteq \mathcal{H}_2$. En effet, d'une part $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{H}_1$, et d'autre part, pour $h \in \mathcal{H}_1$, on a :

$$(2,21) \quad \begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \|(h, 0)\|_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}^2 \\ &\geq \inf_{h_1+h_2=h} \|(h_1, h_2)\|_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}^2 = \|h\|_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2}^2 . \end{aligned}$$

Proposition 2. Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, deux sous-espaces hilbertiens de E . Pour que $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, il faut et il suffit qu'il existe une constance $c \geq 0$ telle que $\mathcal{H}_1 \leq c\mathcal{H}_2$.

Démonstration

La condition est trivialement suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Soit donc $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$. L'injection de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ est continue d'après le théorème du graphe fermé⁽¹⁶⁾ (le graphe de cette injection est la diagonale de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$; comme l'injection de $\mathcal{H}_1$ dans E est continue, il est fermé dans $\mathcal{H}_1 \times E$, donc dans $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$). Soit $\sqrt{c}$ sa norme; alors on a, pour $h \in \mathcal{H}_1$,

$$(2,22) \quad \|h\|_{c\mathcal{H}_2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \|h\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|h\|_{\mathcal{H}_1} ,$$

ce qui démontre la proposition.

Corollaire. Pour que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ soient le même sous-espace vectoriel de E (avec des structures hilbertiennes éventuellement différentes), il faut et il suffit qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$(2,23) \quad \mathcal{H}_1 \leq c\mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_2 \leq c\mathcal{H}_1 .$$

On dit alors que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont équivalents, $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$.

Soit Γ un cône convexe saillant (c. à d. tel que $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$) dans un espace vectoriel F . Alors il existe sur Γ une structure analogue à celle que nous venons de définir sur $\text{Hilb}(E)$: la multiplication par les scalaires ≥ 0 et l'addition sont induites par celles de F ; d'autre part, Γ définit une structure d'ordre sur F , donc a fortiori sur Γ , par

⁽¹⁶⁾ Bourbaki [1], Chapitre I, §3, n°3, Corollaire 5 du Théorème 1.

$$(2,24) \quad u \leq v \Leftrightarrow v - u \in \Gamma.$$

Cette structure d'ordre sur Γ possède, par rapport à l'addition, une propriété fondamentale: pour que $u \leq v$, il faut et il suffit qu'il existe un $w \in \Gamma$ tel que $v = u + w$, et ce w est unique (c'est $w = v - u$).

Nous démontrerons (Théorème 1) que $\text{Hilb}(E)$, pour l'ensemble des 3 structures dont nous l'avons muni, est isomorphe à un cône Γ , convexe, saillant, dans un espace vectoriel F ; il en résultera (Proposition 14) que: pour que $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$, il faut et il suffit qu'il existe $\mathcal{H}_2 \in \text{Hilb}(E)$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, et un tel sous-espace hilbertien $\mathcal{H}_2$ est unique.

Proposition 3. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux sous-espaces hilbertiens de E . Pour que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, il faut et il suffit que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ soient étrangers pour la relation d'ordre, c. à d. que $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_2$, implique $\mathcal{H} = \{0\}$.

Démonstration.

La condition est trivialement nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Supposons $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ étrangers. Sur $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, définissons le produit scalaire

$$(2,25) \quad (h|k) = (h|k)_{\mathcal{H}_1} + (h|k)_{\mathcal{H}_2}.$$

Il définit sur $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ une structure de sous-espace préhilbertien de E . Mais il est complet; car, si (h_n) , $n = 1, 2, \dots$, est une suite de Cauchy, elle est a fortiori une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_1$ et dans $\mathcal{H}_2$, donc elle converge vers une limite dans chacun de ces deux espaces; ces deux limites coïncident, car la convergence dans $\mathcal{H}_1$ ou dans $\mathcal{H}_2$ implique la convergence dans E ; elles sont donc égales à un élément h de $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$, et h_n converge vers h dans $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. Donc $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ est un sous-espace hilbertien de E ; il vérifie $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \leq \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \leq \mathcal{H}_2$, donc $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, ce qui démontre la proposition.

Remarque. Les 3 structures définies sur $\text{Hilb}(E)$ peuvent s'étendre à l'ensemble des sous-espaces préhilbertiens de E . Alors le complété, s'il existe, ou le Q -complété d'un sous-espace préhilbertien $\mathcal{H}_0$ de E (Proposition 1 bis) est, au sens de la relation d'ordre $\leq$, le plus petit sous-espace hilbertien de E qui soit plus grand que $\mathcal{H}_0$.

§3. Les noyaux relatifs à E .

Soit E' le dual de E . On appellera noyau relatif à E une application linéaire de $\bar{E}'$ dans E , continue pour les topologies faibles $\sigma(\bar{E}', \bar{E})$, $\sigma(E, E')$. On sait qu'elle est alors a fortiori continue pour la topologie forte de $\bar{E}'$ et la topologie initiale de E ⁽¹⁷⁾.

Pour $\bar{e}' \in \bar{E}'$, $H\bar{e}'$ est un élément de E ; on peut donc, pour $f' \in E'$, définir le produit scalaire $\langle H\bar{e}', f' \rangle$; il jouera un rôle essentiel dans la suite. On peut aussi l'écrire $(H\bar{e}' | f')$ suivant (0,4). L'adjoint $H^* = {}^t\bar{H} = {}^t\bar{H}$ applique aussi $\bar{E}'$ dans E , c'est encore un noyau (donc $\mathcal{L}(\bar{E}; E)$ est muni d'une anti-involution naturelle); il est défini par (0,7 bis) ou (0,7 ter):

$$(3,1) \quad \begin{cases} \forall e' \in E', \forall f' \in E', \langle H^* \bar{e}', f' \rangle = \overline{\langle Hf', e' \rangle}, \\ \text{ou } (H^* \bar{e}' | f') = (\bar{e}' | Hf'). \end{cases}$$

On dit qu'un noyau H est hermitien si $H^* = H$; cela se traduit par

$$(3,2) \quad \begin{aligned} \langle H\bar{e}, f' \rangle &= \overline{\langle Hf', e' \rangle}, \quad e' \in E', f' \in E', \text{ ou} \\ (H\bar{e}' | f') &= (\bar{e}' | Hf'); \end{aligned}$$

ce qui est équivalent, comme il est bien connu, à

$$(3,3) \quad \forall e' \in E', \langle H\bar{e}', e' \rangle \text{ ou } (H\bar{e}' | \bar{e}') \text{ est réel.}$$

Enfin, H est dit ≥ 0 si

$$(3,4) \quad \forall e' \in E', \langle H\bar{e}', e' \rangle \geq 0;$$

un noyau ≥ 0 est hermitien.

Proposition 4. *Toute application linéaire hermitienne de $\bar{E}'$ dans E est un noyau (autrement dit est faiblement continue).*

⁽¹⁷⁾ Si u est continue de $\sigma(\bar{E}', \bar{E})$ dans $\sigma(E, E')$, elle l'est a fortiori de $\sigma(\bar{E}', \bar{E})$ dans $\sigma(E, E')$ donc, d'après Bourbaki [1], chapitre IV, §4, n°2, Proposition 6, de $\bar{E}'$ fort dans E'' fort, donc a fortiori de $\bar{E}'$ fort dans E initial, la topologie initiale de E étant moins fine que la topologie induite par E'' .

Démonstration.

Si $\bar{e}'$ converge vers 0 dans $\sigma(\bar{E}', \bar{E})$, donc e' vers 0 dans $\sigma(E', E)$, $\langle H\bar{f}', e' \rangle$ converge vers 0 pour tout f' fixé, donc aussi $\langle H\bar{e}', f' \rangle$ d'après l'hermiticité, et $H\bar{e}'$ converge bien vers 0 dans $\sigma(E, E')$.

Au lieu de considérer les applications linéaires de $\bar{E}'$ dans E , on peut considérer les formes sesquilinéaires sur $E' \times E'$ (ou sur $\bar{E}' \times \bar{E}'$). Un noyau H définit la forme $\tilde{H}$

$$(3,5) \quad \tilde{H}(e', f') = \langle Hf', e' \rangle .$$

Proposition 5. *Pour qu'une forme sesquilinéaire sur $E' \times E'$ soit définie par un noyau suivant (3,5), il faut et il suffit qu'elle soit séparément faiblement continue, et ce noyau est alors unique. La forme est hermitienne (resp. ≥ 0), si et seulement si le noyau est hermitien (resp. ≥ 0).*

Démonstration.

1°) Soit H un noyau. Si e' converge faiblement vers 0, alors, pour f' fixé, le 2e membre de (3,5) converge bien vers 0. Si f' converge faiblement vers 0, Hf' converge vers 0 dans E en vertu de la continuité faible de H , donc $\langle Hf', e' \rangle$ converge encore vers 0 pour e' fixé.

2°) Soit B une forme sesquilinéaire séparément faiblement continue sur $E' \times E'$. Pour f' fixé dans $\bar{E}'$, $e' \rightarrow B(e', f')$ est une forme linéaire faiblement continue sur E' , donc il existe un élément unique Hf' de E tel que

$$(3,6) \quad B(e', f') = \langle Hf', e' \rangle .$$

H est une application linéaire de $\bar{E}'$ dans E . Si f' converge faiblement vers 0 dans E' , $B(e', f')$ converge vers 0 pour tout e' fixé, donc Hf' converge faiblement vers 0: H est faiblement continue, c'est un noyau. La fin de l'énoncé est évidente.

Remarque 1. Plus généralement, la forme $\tilde{H}^*$ associée à l'adjoint H^* de H est la symétrique hermitienne de $\tilde{H}$:

$$(3,6 \text{ bis}) \quad \tilde{H}^*(e', f') = \overline{\tilde{H}(f', e')} .$$

Remarque 2. Soit E'^* le dual algébrique de E' . Toute forme linéaire sur E' est continue pour la topologie $\sigma(E', E'^*)$, donc toute forme sesquilinéaire sur $E' \times E'$ est séparément continue; mais E' est le dual de $\sigma(E'^*, E')$, et sa topologie faible correspondante est $\sigma(E', E'^*)$; donc toute forme sesquilinéaire sur $E' \times E'$ provient d'un noyau H relatif à E'^* muni de la topologie $\sigma(E'^*, E')$.

Soit $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ ⁽¹⁸⁾ l'espace des noyaux relatifs à E . Alors l'ensemble $\mathcal{L}^+(E) = \mathcal{L}^+(\bar{E}'; E)$ des noyaux ≥ 0 de E est un cône convexe saillant de $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ (il est saillant parce que, si H et $-H$ sont ≥ 0 , on a $\langle H\bar{e}', e' \rangle = 0$ pour tout $e' \in E'$, donc $\langle H\bar{f}', e' \rangle = 0$ quels que soient e' et f' de E' , d'après la relation

$$(3,7) \quad 4\langle e', H\bar{f}' \rangle = \langle e' + f', H(\overline{e' + f'}) \rangle - \langle e' - f', H(\overline{e' - f'}) \rangle \\ + i\langle e' + if', H(\overline{e' + if'}) \rangle - i\langle e' - if', H(\overline{e' - if'}) \rangle,$$

donc $H\bar{f}' = 0$ pour tout f' , donc $H = 0$).

Nous allons précisément montrer qu'il y a un isomorphisme naturel entre $\text{Hilb}(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$.

Sauf mention expresse du contraire nous munirons $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ de la topologie de la convergence simple faible (la moins fine pour laquelle chaque application $H \rightsquigarrow \langle H\bar{f}', e' \rangle$ soit continue).

— §4. Le noyau d'un sous-espace hilbertien de E : l'application canonique de $\text{Hilb}(E)$ dans $L^+(E)$.

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , j son injection dans E . Alors l'adjointe j^* est une application linéaire faiblement continue de $\bar{E}'$ dans $\bar{\mathcal{H}}'$. Appelons θ l'isomorphisme canonique de $\bar{\mathcal{H}}'$ sur $\mathcal{H}$. Alors $j\theta j^*$:

$$(4.1) \quad \bar{E}' \xrightarrow{j^*} \bar{\mathcal{H}}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E$$

est une application linéaire faiblement continue H de $\bar{E}'$ dans E ; nous dirons que c'est le noyau de $\mathcal{H}$, ou noyau associé à $\mathcal{H}$. On notera qu'en fait il ap-

⁽¹⁸⁾ Dans cette notation, $\bar{E}'$ et E sont supposés munis des topologies $\sigma(\bar{E}', \bar{E})$ et $\sigma(E, E')$.

plique $\bar{E}'$ dans $\mathcal{H}$, et qu'il est faiblement et fortement continu de $\bar{E}'$ dans $\mathcal{H}$; nous ferons souvent (si cela n'introduit pas de causes d'erreur) cette confusion entre $j\theta j^*$ et θj^* . Si en outre on identifie $\bar{\mathcal{H}}'$ à $\mathcal{H}$, alors H , en tant qu'opérateur $\bar{E}' \rightarrow \mathcal{H}$, n'est autre que j^* .

Remarque. Si E est hilbertisable, c. à d. s'il est susceptible de structures hilbertiennes définissant sa topologie, et si $\mathcal{H}$ est E muni d'une de ces structures hilbertiennes, H est l'isomorphisme canonique de $\bar{E}'$ sur E défini par $\mathcal{H}$. Inversement, si H est le noyau associé à un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E , et si $H(\bar{E}') = E$, on a nécessairement $\mathcal{H} = E$, donc E est hilbertisable, et $\mathcal{H}$ est une structure hilbertienne sur E .

Proposition 6. *Le noyau H de $\mathcal{H}$ est l'unique application de $\bar{E}'$ dans $\mathcal{H}$ telle que*

$$(4,2) \quad \forall e' \in E', \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad (h | H\bar{e}')_{\mathcal{H}} = \langle h, e' \rangle (= (h | \bar{e}')).$$

En particulier, pour $e' \in E', f' \in E'$, on a :

$$(4,3) \quad (H\bar{f}' | H\bar{e}')_{\mathcal{H}} = \langle H\bar{f}', e' \rangle, \text{ donc}$$

$$(4,4) \quad \|H\bar{e}'\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle H\bar{e}', e' \rangle \geq 0 :$$

H est un noyau ≥ 0 .

Démonstration. On a

$$(4,5) \quad \begin{aligned} \langle h, e' \rangle &= \langle jh, e' \rangle_{E, E'} = (jh | \bar{e}')_{E, \bar{E}'} \\ &= (h | j^* \bar{e}')_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}'} = (h | \theta j^* \bar{e}')_{\mathcal{H}} = (h | H\bar{e}')_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

c. à d. (4,2); $H\bar{e}'$ est bien, pour $\bar{e}'$ donné, le seul élément de $\mathcal{H}$ à vérifier cette égalité quel que soit $h \in \mathcal{H}$ puisqu'elle détermine son produit scalaire avec tout élément h de $\mathcal{H}$. On obtient (4,3) en prenant $h = H\bar{f}'$ (mais (4,3) n'est plus une caractérisation de H , car, par exemple, $H = 0$ vérifie (4,3) quels que soient $e' \in E', f' \in E'$).

En faisant $f' = e'$, on obtient (4,4), qui exprime bien que H est ≥ 0 , c.q.f.d.

Alors $\mathcal{H} \rightarrow H$ est une application de $\text{Hilb}(E)$ dans $\mathcal{L}^+(E)$ que nous appellerons l'application canonique; nous montrerons que c'est un isomorphisme.

Proposition 7. *L'image $H(\bar{E}')$ est un sous-espace dense $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$. On peut la caractériser ainsi: $h \in \mathcal{H}$ appartient à $\mathcal{H}_0$, si et seulement si la forme linéaire $k \rightarrow (k|h)_{\mathcal{H}}$ est continue sur $\mathcal{H}$ pour la topologie induite par la topologie initiale ou la topologie affaiblie de E .*

Démonstration. Comme j est injective, $j^* \bar{E}'$ est faiblement dense dans $\bar{\mathcal{H}}'$ ⁽¹⁹⁾, donc fortement dense puisque $\mathcal{H}$ est réflexif; comme θ est un homéomorphisme, $\theta j^*(\bar{E}') = H(\bar{E}')$ est dense dans $\mathcal{H}$. (On peut aussi dire: si $h \in \mathcal{H}$ est orthogonal à $H(\bar{E}')$, (4,2) montre que $\langle h, e' \rangle = 0$ pour tout e' , donc que $h = 0$).

Si h est de la forme $H\bar{e}'$, (4,2) (où l'on remplace h par k) montre bien que la forme linéaire $k \rightarrow (k|h) = \langle k, e' \rangle$ est continue sur $\mathcal{H}$ pour la topologie induite par la topologie affaiblie de E . Inversement, si elle est continue pour la topologie induite par E , le théorème de Hahn-Banach montre qu'il existe un élément e' de E' tel que

$$(4,5 \text{ bis}) \quad \forall k \in \mathcal{H}, (k|h)_{\mathcal{H}} = \langle k, e' \rangle;$$

mais $\langle k, e' \rangle = (k|H\bar{e}')_{\mathcal{H}}$, on doit donc avoir $h = H\bar{e}'$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire. *Si E' est faiblement séparable (c. à d. admet un sous-ensemble dénombrable faiblement dense), tous les sous-espaces hilbertiens de E sont séparables.*

Démonstration. Soit D un sous-ensemble dénombrable faiblement total de E' . H étant faiblement continue et surjective de $\bar{E}'$ sur $\mathcal{H}_0$, $H(\bar{D})$ est faiblement total, donc fortement total, dans $\mathcal{H}_0$; comme $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$, $H(\bar{D})$ est total dans $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ est séparable.

Remarque. Si E est un Banach séparable, son dual E' est faiblement séparable. Plus généralement, si E est un espace séparable, et si $\{0\}$ est inter-

⁽¹⁹⁾ Bourbaki [1], Chapitre IV, §4,n^o.1, Proposition 3. $\mathcal{H}$ étant réflexif, le dual de $\bar{\mathcal{H}}'$ est $\bar{\mathcal{H}}$; un sous-espace vectoriel de $\bar{\mathcal{H}}'$ dense pour $\sigma(\bar{\mathcal{H}}', \bar{\mathcal{H}})$, est alors dense dans $\bar{\mathcal{H}}'$ fort (Bourbaki [1], Chapitre IV, §2,n^o.3, Corollaire 1 de la Proposition 4).

section dénombrable de voisinages, alors E' est faiblement séparable. Soit en effet A' une partie équicontinue faiblement fermée de E' . Sur A' , la structure uniforme de la convergence faible, c. à d. de la convergence simple sur E , est identique à celle de la convergence sur un sous-ensemble dense de E , d'après le théorème d'Ascoli⁽²⁰⁾; comme alors E a un ensemble dénombrable dense, A' a une structure uniforme ayant un système fondamental dénombrable d'entourages, donc est métrisable. D'autre part A' est faiblement compacte, aussi d'après Ascoli; et un espace métrisable compact est séparable. Ainsi toute partie équicontinue faiblement fermée est faiblement séparable. Mais, $\{0\}$ étant dans E l'intersection d'une suite V_n de voisinages de 0, il en résulte par polarité que E' est l'adhérence faible de l'enveloppe convexe équilibrée de la réunion des V_n^0 ⁽²¹⁾; chaque V_n^0 est équicontinu faiblement fermé, donc faiblement séparable d'après ce que nous venons de voir, donc aussi l'enveloppe convexe équilibrée de leur réunion, donc aussi E' ^(21 bis).

Par exemple les espaces $E = \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{S}$, de la théorie des distributions, sont séparables, et $\{0\}$ est intersection dénombrable de voisinages⁽²²⁾; donc E' est faiblement séparable, et même fortement parce que ces E sont réflexifs. D'ailleurs $\mathcal{D}$ nous suffit; ensuite tout sous-espace hilbertien d'un espace de distributions est sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'$ donc séparable.

Il est d'ailleurs bon de remarquer que le précédent corollaire n'a rien à voir avec les espaces hilbertiens. Par exemple, si $\mathcal{H}$ est un sous-espace de Banach de E avec injection continue, si $\mathcal{H}$ est réflexif, et si E' est faiblement séparable, alors $\mathcal{H}$ est séparable. En effet, de l'injectivité de $\mathcal{H} \rightarrow E$ on déduit que la transposée $E' \rightarrow \mathcal{H}'$ a une image faiblement dense; E' étant faiblement séparable, $\mathcal{H}'$ est faiblement séparable, donc fortement

⁽²⁰⁾ Pour les théorèmes d'Ascoli, voir Bourbaki [1], chapitre III, §3, n^o.5, Proposition 5. Un espace uniforme à base dénombrable d'entourages est métrisable, théorème de Weil; Bourbaki [2], §2, n^o.4, Théorème 1.

⁽²¹⁾ Bourbaki [1], Chapitre IV, §1, n^o.3, Corollaire de la Proposition 3.

^(21 bis) Tout ce raisonnement est celui qui est fait dans Bourbaki [1], Chapitre IV, §2, n^o.2, corollaire de la Proposition 3; mais ce corollaire introduit une hypothèse trop forte (E métrisable).

⁽²²⁾ Les polynômes sont denses dans $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est séparable. Chacun de ses sous-espaces $\mathcal{D}_K$, K compact de $\mathbb{R}^n$, est donc séparable; donc $\mathcal{D}$, réunion dénombrable de $\mathcal{D}_K$, est séparable. Enfin $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$ qui est donc séparable. Dans chacun de ces espaces, $\{0\}$ est l'intersection de la suite de voisinages $V_m = \{\phi; |D^p \phi(x)| \leq 1/m \text{ pour } |x| \leq m, |p| \leq m\}$.

puisque $\mathcal{H}$ est réflexif, donc son dual $\mathcal{H}'$ est faiblement séparable comme vu plus haut, donc séparable pour sa topologie initiale. La conclusion ne subsiste pas si $\mathcal{H}$ n'est pas réflexif; par exemple L^∞ , sous-espace de Banach non réflexif de $\mathcal{D}'$, n'est pas séparable.

Proposition 7 bis. *Pour que $\mathcal{H}_0 = H(\bar{E}')$ coïncide avec $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que la topologie faible de $\mathcal{H}$ soit induite par la topologie faible de E . Si E est un espace de Fréchet, il faut et il suffit que la topologie initiale de $\mathcal{H}$ soit induite par celle de E ; et aussi il faut et il suffit que $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{H}_0$ soit fermé dans E , ou que H soit un homomorphisme faible (ou fort, si E est réflexif)⁽²³⁾.*

Démonstration. $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ revient à dire, si l'on se reporte à la définition (4,1) de H , que $j^*(\bar{E}') = \bar{\mathcal{H}'}$. Comme $j^*(\bar{E}')$ est dense parce que j est une injection⁽²⁴⁾, cela revient à dire que $j^*(\bar{E}')$ est fermé dans $\mathcal{H}'$, donc que j est un homomorphisme faible⁽²⁵⁾, ce qui revient encore à dire que la topologie affaiblie de $\mathcal{H}$ est induite par la topologie affaiblie de E .

Supposons que E soit un Fréchet. Alors j est un homomorphisme faible si et seulement si c'est un homomorphisme fort, c.à d. si la topologie initiale de $\mathcal{H}$ est induite par la topologie initiale de E ; ou si et seulement si $j(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ est fermé dans E ⁽²⁶⁾. Si j est un tel homomorphisme, c'est un monomorphisme; comme θ est un isomorphisme, et j^* un épimorphisme faible (fort si E est réflexif) comme adjoint d'un monomorphisme⁽²⁷⁾, $H = j\theta j^*$ est un homomorphisme faible de $\bar{E}'$ dans E (un homomorphisme fort si E est réflexif); d'autre part $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ est fermé dans E . Inversement, si H est un homomor-

(23) Rappelons que u est un homomorphisme de E dans F si elle est linéaire continue, et si l'image d'un ouvert de E est un ouvert de $u(E)$. Un monomorphisme est un homomorphisme injectif, un épimorphisme est un homomorphisme surjectif.

(24) Voir note (19), page 143.

(25) Bourbaki [1], Chapitre IV §4,n^o.1, Proposition 4.

(26) Dieudonné-Schwartz [1], Théorème 7 page 92. Bourbaki [1], chapitre 1, §3,n^o.3, Corollaire 3 du Théorème 1.

(27) Le transposé (ou l'adjoint) d'un homomorphisme est un homomorphisme faible d'image faiblement fermée (Dieudonné-Schwartz [1], Théorème 7 page 92); le transposé d'une application injective a une image faiblement dense (note (19) page 143) donc le transposé d'un monomorphisme est un épimorphisme faible. Mais j^* envoie $\bar{E}'$ dans $\bar{\mathcal{H}'}$, métrisable de dual $\mathcal{H}$; donc si c'est un homomorphisme faible c'est un homomorphisme fort (Bourbaki [1], Chapitre IV, §4,n^o.2, Exercice 3 b).

phisme faible, θj^* est a fortiori un homomorphisme faible, et comme θ est un isomorphisme, j^* est un homomorphisme faible, donc aussi $j^{(28)}$. Si d'autre part $\mathcal{H}_0$ est fermé dans E , il l'est dans $\mathcal{H}$, et comme il est dense, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.

Proposition 8. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , H son noyau. Alors un élément h de E'^* (dual algébrique de E' ou complété faible de E) appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si

$$(4,6) \quad \text{Sup}_{e' \in E'} \frac{|\langle h, e' \rangle|}{\langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2}} < \infty^{(29)};$$

en outre, dans ce cas, on a :

$$(4,7) \quad \text{Sup}_{e' \in E'} \frac{|\langle h, e' \rangle|}{\langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2}} = \|h\|_{\mathcal{H}} .$$

Démonstration.

1°) Si $h \in \mathcal{H}$, on a, d'après (4,2) et (4,4):

$$(4,8) \quad |\langle h, e' \rangle| = |(h|H\bar{e}')_{\mathcal{H}}| \leq \|h\|_{\mathcal{H}} \|H\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{H}} \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} ;$$

le premier membre $l(h)$ de (4,6) est alors fini et majoré par $\|h\|_{\mathcal{H}}$.

2°) Supposons inversement $l(h) < \infty$. La forme antilinéaire $\bar{e}' \rightsquigarrow \langle h, e' \rangle$ est alors nulle sur l'ensemble des $\bar{e}'$ tels que $H\bar{e}' = 0$; elle définit donc une forme antilinéaire $H\bar{e}' \rightsquigarrow \langle h, e' \rangle$ sur $H(\bar{E}') = \mathcal{H}_0$. En outre, sa norme est $\leq l(h)$. Donc il existe un élément k de $\mathcal{H}$ tel que

$$(4,9) \quad \langle h, e' \rangle = (k|H\bar{e}')_{\mathcal{H}}; \text{ et } \|k\| \leq l(h).$$

L'égalité (4,2) appliquée à k montre alors que

$$(4,10) \quad \langle h, e' \rangle = \langle k, e' \rangle \text{ pour tout } e' \in E',$$

donc $k = h$; ce qui prouve que $h \in \mathcal{H}$ et que $\|h\|_{\mathcal{H}} \leq l(h)$, ou $= l(h)$ d'après 1°).

⁽²⁸⁾ Dieudonné-Schwartz [1], Théorème 7 page 92.

⁽²⁹⁾ Si le dénominateur est nul et non le numérateur pour un élément e' la borne supérieure est sûrement infinie; si les deux sont nuls, on ne tient pas compte de cet élément e' pour le calcul de la borne supérieure.

Remarque. Il est commode de poser $\|h\|_{\mathcal{H}} = +\infty$ pour $h \notin \mathcal{H}$; alors (4,7) est vraie pour tout h de E^* .

Corollaire 1. L'application canonique de $\text{Hilb}(E)$ dans $\mathcal{L}^+(E)$ est injective.

En effet, la Proposition 8 montre que la connaissance de H détermine $\mathcal{H}$, avec sa structure hilbertienne.

Corollaire 2. Si $h \in E'^*$ vérifie (4,6), alors $h \in E$.

Proposition 9. Soit B_0 l'ensemble des $H\bar{e}'$, $e' \in E'$, tels que $\langle H\bar{e}', e' \rangle \leq 1$, et B_0 son adhérence dans E .

Alors

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda \bar{B}_0 .$$

Démonstration. B_0 est la boule unité de $\mathcal{H}_0$; comme $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$ (Proposition 7), son adhérence B dans $\mathcal{H}$ est la boule unité de $\mathcal{H}$, et, comme celle-ci est faiblement compacte dans $\mathcal{H}$ donc dans E , elle est fermée dans E , et coïncide donc avec $\bar{B}_0$, adhérence de B_0 dans E . Comme alors on a $\mathcal{H} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda B$, on a bien $\mathcal{H} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda \bar{B}_0$.

Remarque. Ceci donne une nouvelle caractérisation de $\mathcal{H}$ à partir de H , donc redémontre le corollaire de la Proposition 8.

Exemple 1. Considérons l'exemple 3 de la page 127. Choisissons pour $\bar{\mathcal{D}}$ l'espace $\mathcal{D}$ lui-même, et pour conjugaison la conjugaison usuelle des formes, $\phi \rightsquigarrow \bar{\phi}$ (qui commute avec $*$). Alors (1,2) montre, d'après (4,2) où l'on fait $h = \alpha$, $e' = *\beta$, que $H*\bar{\beta} = \beta$, de sorte que $H\phi = *^{-1}\bar{\phi}$; H est bien une application linéaire continue de $\bar{E}' = \bar{\mathcal{D}}$ dans $E = \mathcal{D}'$.

On peut aussi prendre $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$, la conjugaison étant cette fois $*^{-1}$: $\phi \rightsquigarrow *^{-1}\phi$. Mais ce n'est pas une anti-involution: pour une forme ϕ de degré $n - p$, $*^{-1}*^{-1}\phi = (-1)^{p(n-p)}\phi$. On pourra éventuellement particulariser les degrés, pour éviter des erreurs.

On considérera $\mathcal{H} \subset \bar{\mathcal{D}}^p = E$; on prendra pour E' l'espace $\bar{\mathcal{D}}^{n-p}$, avec

avec $\langle T, \phi \rangle = \int_X T \wedge \phi$. On prendra alors pour $\bar{E}'$ l'espace $\mathcal{D}$, avec l'antisonomorphisme $\phi \rightsquigarrow *^{-1}\phi$, de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$; il n'est plus question ici d'involution puisque $E' \neq \bar{E}'$. Le produit $(T|\phi)$ suivant (0,4) ($T=e, \phi = \bar{e}' = *^{-1}\psi$, avec $e' = \psi = *\phi$) est alors $\langle T, *\phi \rangle$; c'est bien celui qu'on considère dans la théorie de Hodge-de Rham.

Alors (1,2) montre, toujours d'après (4,2) avec $h = \alpha, e' = *\beta$, que $H(*^{-1}*\beta) = \beta$ ou $H\beta = \beta$; H est l'identité, ou plus exactement l'injection canonique de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$; c'est l'injection canonique de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ si l'on ne spécifie pas les degrés.

Dans cet exemple, H n'est pas le même opérateur de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, suivant qu'on choisit la conjugaison usuelle ou $*^{-1}$; ce n'est pas étonnant, puisque H est un opérateur de $\bar{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{D}'$, et non de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$.

Exemple 1 bis. Supposons que X soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et prenons $\mathcal{H} = L^2(X)$. Prenons pour conjugaison la conjugaison usuelle. On a

$$(f|\phi)_{L^2} = \int_X f(x)\bar{\phi}(x)dx = \langle f, \bar{\phi} \rangle;$$

c'est (4,2) avec $H\bar{\phi} = \bar{\phi}$, H est l'application identique, ou l'injection naturelle de $\bar{E}' = \mathcal{D}$ dans $E = \mathcal{D}'$ (cas particulier de ce que nous venons de voir dans l'exemple 1, pour le degré $p = 0$, si l'on identifie formes de degré 0 et n par la mesure de Lebesgue).

Exemple 1 ter. Reprenons l'Exemple 4 de la page 128. La formule (1,2ter) où l'on remplace ϕ par $\bar{\phi}$, est la formule (4,2), avec $h = f\mu, e' = \bar{\phi}, \bar{e}' = \phi$, si l'on prend $H\phi = \phi\mu$, qui définit bien H comme application linéaire continue de $\bar{E}' = \mathcal{D}^0(X)$ (ou $\mathcal{D}(X)$ si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) dans $E = \mathcal{D}'^0(X)$ (ou $\mathcal{D}'(X)$).

Exemple 2. Reprenons l'Exemple 2 de la p. 126. Appelons D l'opérateur différentiel

$$(4,11) \quad D = \sum_p (-1)^{|p|} a_p D^{2p}$$

Alors on démontre que les noyaux des sous-espaces hilbertiens $\mathcal{H}^{-s}(X)$,

$\mathcal{H}_0^s(X), \mathcal{H}^s(X)$, de $\mathcal{D}'(X)$ (s entier ≥ 0), sont respectivement l'opérateur différentiel D , et ses opérateurs de Green et de Neumann relativement à l'ouvert X de $\mathbb{R}^n$, tous considérés comme opérateurs de $\tilde{E}' = \mathcal{D}'(X)$ dans $E = \mathcal{D}'(X)$. On pourrait le voir dès maintenant, mais nous préférons le voir plus tard avec des méthodes appropriées (exemple pages 220 et 222).

Exemple 3. Soit $E = \mathcal{D}'(X)$, espace des distributions sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$. Alors $E' = \mathcal{D}(X)$; la conjugaison complexe établit sur ces espaces des anti-involutions contragrédientes, qui font de chacun son propre anti-espace. Un noyau H est alors une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$; le théorème des noyaux⁽³⁰⁾ dit que c'est une distribution $H_{x, \xi}$ sur $X \times X$, l'application H de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ étant définie par

$$(4,12) \quad \phi \rightsquigarrow (H \cdot \phi)_x = \int_X H_{x, \xi} \phi(\xi) d\xi \quad .$$

Le conjugué $\bar{H}$ est défini par la distribution conjuguée $\bar{H}_{x, \xi}$, le transposé tH par la distribution symétrique $({}^tH)_{x, \xi} = H_{\xi, x}$, et l'adjoint par $(H^*)_{x, \xi} = \overline{H_{\xi, x}}$; un noyau H est hermitien si $H_{x, \xi} = \overline{H_{\xi, x}}$. Un noyau H est de type positif si

$$(4,13) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(X), \iint_{X \times X} H_{x, \xi} \phi(x) \overline{\phi(\xi)} dx d\xi \geq 0;$$

alors il est hermitien, et $\bar{H}$ est aussi de type positif.

Si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'(X)$, son noyau H est défini par (4,2):

$$(4,14) \quad \begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{D}, \forall T \in \mathcal{H}, (T|H \cdot \bar{\phi})_{\mathcal{H}} &= \langle T, \phi \rangle \quad \text{ou} \\ (T|H \cdot \phi)_{\mathcal{H}} &= \langle T, \bar{\phi} \rangle = (T|\phi). \end{aligned}$$

Ici (4,3) et (4,4) deviennent:

⁽³⁰⁾ Théorème des noyaux, Schwartz [2], page 143 et Schwartz [3], Chapitre I, §4, Proposition 25.

$$(4,15) \quad \begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{D}, \forall \psi \in \mathcal{D}, (H \cdot \bar{\psi} | H \cdot \bar{\phi})_{\mathcal{H}} &= \langle H \cdot \bar{\psi}, \phi \rangle \\ &= \iint_{X \times X} H_{x,\xi} \phi(x) \overline{\psi(\xi)} dx d\xi \quad . \end{aligned}$$

$$(4,16) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}, \|H \cdot \bar{\phi}\|_{\mathcal{H}}^2 = \iint_{X \times X} H_{x,\xi} \phi(x) \bar{\phi}(\xi) dx d\xi \geq 0 \quad .$$

On les utilisera aussi sous la forme

$$(4,17) \quad \begin{aligned} (H \cdot \phi | H \cdot \psi)_{\mathcal{H}} &= \langle H \cdot \phi, \bar{\psi} \rangle \\ \|H \cdot \phi\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle H \cdot \phi, \bar{\phi} \rangle = \iint_X H_{x,\xi} \overline{\phi(x)} \phi(\xi) dx d\xi \quad . \end{aligned}$$

Soit maintenant $X = \mathbb{R}^n$, et E l'un des sous-espaces suivants de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{D}'$; $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}'_M$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_C$, $\mathcal{O}_C$ ⁽³¹⁾. Toute application linéaire faiblement continue de E' dans E est fortement continue⁽³²⁾ donc continue de E'_c dans E (dans tous ces espaces E , les parties bornées de E sont relativement compactes donc $E'_c = E'$ fort), et inversement⁽³³⁾. $\mathcal{L}(E'; E) = E \varepsilon E = E \hat{\otimes}_\varepsilon E$, parce que ces espaces sont complets et ont la propriété d'approximation⁽³⁴⁾. D'autre part, pour tous ces espaces *sauf* $\mathcal{D}$, $E_x \hat{\otimes}_\varepsilon E_\xi$ est l'espace $E_{x,\xi}$ analogue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ⁽³⁵⁾, ce qui donne la structure des noyaux correspondants; pour un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E , on aura les formules (4,12) à (4,7), pour $\phi, \psi, \dots \in E'$. Par exemple, si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, H sera tempérée, $H \in \mathcal{S}'_{x,\xi}$, et les formules précédentes seront vraies pour $\phi, \psi, \dots$ dans $\mathcal{S}$.

Exemple 4. Soit E un espace hilbertien. On peut identifier $\bar{E}'$ à E (voir

⁽³¹⁾ Pour tous les espaces de distributions, voir Schwartz [1].

⁽³²⁾ Voir note (17), page 139.

⁽³³⁾ Une application linéaire continue de E'_c dans E est continue de $\sigma(E'_c, (E'_c)')$ dans $\sigma(E, E')$ d'après Bourbaki [1], chapitre IV, §4,n°.2, Proposition 6; mais $(E'_c)' = E$ Bourbaki [1], Chapitre IV, §2,n°.3, corollaire du Théorème 2.

⁽³⁴⁾ Pour le produit ε , le produit tensoriel $\hat{\otimes}_\varepsilon$ et la propriété d'approximation, voir Schwartz [3], Préliminaires et Chapitre I, §1.

⁽³⁵⁾ Schwartz [3], Chapitre I, §4, Proposition 28, page 98.

Exemple 4 page 121). Alors un noyau H est simplement un opérateur linéaire continu de E dans lui-même. Son adjoint H^* est ce qu'on appelle usuellement l'adjoint, et l'hermiticité et la positivité sont l'hermiticité et la positivité usuelles.

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E (attention, il y a ici une confusion possible. Il s'agit d'un sous-espace hilbertien au sens donné au §1, mais il n'a pas nécessairement la structure induite par celle de E !). Son noyau H est un opérateur linéaire continu hermitien ≥ 0 de E dans E , qui se définit comme suit. Soit j l'injection $\mathcal{H} \rightarrow E$, j^* son adjointe $E \rightarrow \mathcal{H}$ (en identifiant $\bar{\mathcal{H}}$ à $\mathcal{H}$). La formule (4,1) devient

$$(4,18) \quad E \xrightarrow{j^*} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E, H = jj^* ,$$

qu'on confondra souvent avec j^* (voir page 142), application de E dans $\mathcal{H}$. H est caractérisé par (4,2) :

$$(4,19) \quad \forall h \in \mathcal{H}, \forall \xi \in E, (h | H\xi)_{\mathcal{H}} = (h | \xi)_E .$$

(4,3) et (4,4) deviennent :

$$(4,20) \quad \begin{aligned} (H\xi | H\eta)_{\mathcal{H}} &= (H\xi | \eta)_E \\ \| H\xi \|_{\mathcal{H}}^2 &= (H\xi | \xi)_E \geq 0 . \end{aligned}$$

Le sous-espace $\mathcal{H}$ est fermé dans E si et seulement si H est un homomorphisme (Proposition 1 bis), et alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 = H(E)$. On a $\mathcal{H} = E$ (en tant qu'ensembles) si et seulement si H est inversible (car H , en tant qu'application de $\bar{E}$ sur E , doit être l'isomorphisme canonique de $\bar{E}$ sur E pour la structure hilbertienne $\mathcal{H}$; voir remarque page 142). Si $\mathcal{H}$ est un sous-espace fermé de E , avec la structure hilbertienne induite, H est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}$, comme le montre (4,19).

Proposition 9 bis. Soit $\mathcal{K}$ un sous-espace hilbertien de E , de noyau K , considéré comme opérateur de $\bar{E}$ dans $\mathcal{K}$; soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathcal{K}$, et soit A son noyau par rapport à $\mathcal{H}$ au sens de l'Exemple 4, page 150, opérateur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$; alors le noyau H de $\mathcal{H}$ relativement à E , considéré comme opérateur de $\bar{E}$ dans $\mathcal{H}$, est $H = AK : \bar{E} \xrightarrow{K} \mathcal{K} \xrightarrow{A} \mathcal{H}$.

2

Démonstration. Identifions aussi $\overline{\mathcal{H}'}$ à $\mathcal{H}$. Alors K et H sont les applications $\overline{E}' \rightarrow \mathcal{H}$ et $\overline{E}' \rightarrow \mathcal{H}$, adjointes des injections $\mathcal{H} \rightarrow E, \mathcal{H} \rightarrow E$. Mais $\mathcal{H} \rightarrow E$ se factorise en $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow E$, donc $\overline{E}' \xrightarrow{H} \mathcal{H}$ se factorise en $\overline{E}' \xrightarrow{K} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, et $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est justement A .

Corollaire. Si $\mathcal{H}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{K}$, avec la structure hilbertienne induite, H est égal à AK , où A est le projecteur orthogonal de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{H}$.

Il suffit d'appliquer la Proposition 9 bis à l'exemple qui la précède immédiatement.

Proposition 9 ter. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , de noyau H . Pour que l'injection j de $\mathcal{H}$ dans E soit compacte (autrement dit pour que la boule unité de $\mathcal{H}$ soit compacte dans E), il faut que H appartienne à $\mathcal{H} \hat{\otimes}_\varepsilon \overline{E}$, et il suffit qu'il appartienne à $E \varepsilon \overline{E}$ ⁽³⁶⁾.

Démonstration. Dire que j est compacte, c'est dire que la boule unité B de $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans E ; mais elle est faiblement compacte dans $\mathcal{H}$ donc dans E , elle est alors compacte dans E .

1°) Supposons j compacte. Alors, par polarité, l'image par ${}^t j$ de la polaire de B dans E' est contenue dans la polaire de B dans $\mathcal{H}'$, donc ${}^t j$ est continue de E'_c dans $\mathcal{H}'$, et j^* est continue de $\overline{E}'_c$ dans $\overline{\mathcal{H}'}$; alors $H = \theta j^*$, considéré comme opérateur de $\overline{E}'$ dans $\mathcal{H}$, est continu de $\overline{E}'_c$ dans $\mathcal{H}$, donc $H \in \mathcal{H} \varepsilon \overline{E}$; comme $\mathcal{H}$, hilbertien, a la propriété d'approximation stricte, $H \in \mathcal{H} \hat{\otimes}_\varepsilon \overline{E}$, comme l'affirme l'énoncé. Naturellement $H = j \theta j^*$ est l'image par $j \otimes I$ de $\theta j^* \in \mathcal{H} \hat{\otimes}_\varepsilon E$, donc appartient à $E \hat{\otimes}_\varepsilon \overline{E} = E \varepsilon \overline{E}$.

2°) Réciproquement, supposons $H \in E \varepsilon \overline{E} = \mathcal{L}(\overline{E}'_c; E)$. Soit A' une partie équicontinue faiblement compacte de E' , $\overline{A'}$ sa conjuguée dans $\overline{E}'$. Comme H est dans $E \varepsilon \overline{E}$, $H(\overline{A'})$ est compacte dans E ⁽³⁷⁾, et la restriction de H à

⁽³⁶⁾ Voir Schwartz [3], Chapitre I, Proposition 11 et Corollaire 1. Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfait à la condition d'approximation stricte, parce que tout opérateur u de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ est adhérent dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ aux $P.u$, où les P sont les projecteurs orthogonaux de rang fini, et $\|P.u\| \leq \|u\|$.

⁽³⁷⁾ Schwartz [3], Chapitre I, §1, Proposition 5, page 35.

$\overline{A'}$ est continue de $\overline{E'}$ faible dans E fort. Supposons que $e' \in \overline{A'}$ converge faiblement vers e'_0 ; alors

$$(4,21) \quad \begin{aligned} & \langle H\overline{e'}, e' \rangle - \langle H\overline{e'_0}, e'_0 \rangle \\ &= \langle H(\overline{e' - e'_0}), e' \rangle + \langle H\overline{e'_0}, e' - e'_0 \rangle; \end{aligned}$$

$H(\overline{e' - e'_0})$ converge fortement vers 0, et $e' \in A'$ équicontinue, donc le premier terme converge vers 0; le deuxième aussi, puisque e' converge faiblement vers e'_0 ; donc $\langle H\overline{e'}, e' \rangle$ converge vers $\langle H\overline{e'_0}, e'_0 \rangle$. Cela prouve que $H\overline{e'}$, qui converge faiblement vers $H\overline{e'_0}$ dans $\mathcal{H}$, a une norme $\langle H\overline{e'}, e' \rangle^{1/2}$ qui converge vers celle de $H\overline{e'_0}$, donc $H\overline{e'}$ converge vers $H\overline{e'_0}$ *fortement* dans $\mathcal{H}$ ⁽³⁸⁾. Ainsi $H = \theta j^*$ est continue de $\overline{A'}$ (muni de la topologie faible) dans $\mathcal{H}$ fort; donc $H(\overline{A'})$ est compacte dans $\mathcal{H}$. Comme H est faiblement continue de $\overline{E'}$ dans $\mathcal{H}$, cela prouve que H appartient à $\mathcal{H} \varepsilon \overline{E} = \mathcal{L}(\overline{E'_c}; \mathcal{H})$. Mais $H = \theta j^*$, où θ est un isomorphisme, donc j^* est continue de $\overline{E'_c}$ dans $\overline{\mathcal{H}'}$, j continue de E'_c dans $\mathcal{H}'$; par polarité, cela prouve que $j(B)$ est relativement compacte dans E , j est compacte.

Remarque 1. Cette proposition prouve (compte tenu de la Proposition 10 que nous montrerons plus loin) que, même si E ne vérifie pas la propriété d'approximation stricte, tous les éléments ≥ 0 de $E \varepsilon \overline{E}$ (au sens de la positivité des noyaux) sont dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon \overline{E}$.

Remarque 2. Supposons que, dans E , toute partie bornée soit relativement compacte. Alors tout sous-espace hilbertien de E a une injection compacte. Mais aussi tout noyau H transforme les parties équicontinues de E' en parties bornées donc relativement compactes, et l'espace $\mathcal{L}(\overline{E'}; E)$ des noyaux est identique (topologie mise à part) à $E \varepsilon \overline{E}$. C'est ce que nous avons déjà appliqué à la fin de l'exemple 3, page 149.

38. Dans un espace de Hilbert, la convergence faible avec convergence des normes entraîne la convergence forte. Si en effet x_j converge faiblement vers x , $\frac{1}{2}(x + x_j)$ converge aussi faiblement vers x , donc $\liminf. \|\frac{1}{2}(x + x_j)\| \geq \|x\|$; mais si $\|x_j\|$ converge vers $\|x\|$, on a aussi $\limsup. \|\frac{1}{2}(x + x_j)\| \leq \|x\|$; donc $\lim. \|\frac{1}{2}(x + x_j)\| = \|x\|$. Mais alors l'inégalité de la médiane $\|x_j\|^2 + \|x\|^2 = 2(\|\frac{1}{2}(x + x_j)\|^2 + \frac{1}{2}\|x - x_j\|^2)$ montre que x_j converge fortement vers x .

§5. Le sous-espace hilbertien attaché à un noyau ≥ 0 .

Caractère bijectif de l'application canonique de $\text{Hilb}(E)$ dans $\mathcal{L}^+(E)$.

Proposition 10. *L'application canonique de $\text{Hilb}(E)$ dans $\mathcal{L}^+(E)$ est une bijection.*

Démonstration.

Première démonstration

Nous avons déjà vu (corollaire de la Proposition 8, ou remarque suivant la Proposition 9) que cette application est injective. Mais nous allons le revoir une troisième fois, et montrer en outre qu'elle est surjective.

Soit donc H un noyau ≥ 0 . Considérons $\mathcal{H}_0 = H(\bar{E}')$ (voir Proposition 7). S'il existe un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de noyau H , la structure préhilbertienne induite sur $\mathcal{H}_0$ est connue, puisqu'on a (4,3). Inversement, (4,3) définit bien une forme hermitienne sur $\mathcal{H}_0$; pour $u \in \mathcal{H}_0$, $v = H\bar{e}' \in \mathcal{H}_0$, on posera en effet

$$(5,1) \quad (u | v)_{\mathcal{H}_0} = \langle u, e' \rangle;$$

le résultat ne dépend que de $v = H\bar{e}'$ et non de e' , car, si $u = H\bar{f}'$, on a

$$(5,2) \quad \langle u, e' \rangle = \langle H\bar{f}', e' \rangle = \overline{\langle H\bar{e}', f' \rangle} = \overline{\langle v, f' \rangle},$$

à cause de l'hermiticité de H . Cette forme hermitienne est ≥ 0 , à cause de la positivité de H . Elle fait donc de $\mathcal{H}_0$ un espace préhilbertien. Sa topologie est plus fine que celle qui est induite par E . Pour le voir, nous devons montrer que la boule unité de $\mathcal{H}_0$, soit

$$B_0 = \{H\bar{e}', e' \in E'; \langle H\bar{e}', e' \rangle \leq 1\},$$

est bornée dans E , ou, ce qui revient au même, faiblement bornée; cela revient à dire que, pour tout f' fixé dans E' , l'ensemble des nombres $|\langle H\bar{e}', f' \rangle|$ est borné pour $H\bar{e}' \in B_0$; ce qui résulte de l'inégalité de Schwarz:

$$(5,3) \quad |\langle H\bar{e}', f' \rangle| \leq \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle H\bar{f}', f' \rangle^{1/2} .$$

Ce résultat nous montre en particulier que $\mathcal{H}_0$ est séparé, donc que sa forme hermitienne (5,1) est définie positive.

Alors, s'il existe un $\mathcal{H}$ de noyau H , il est nécessairement le complété de $\mathcal{H}_0$ dans E (Propositions 7 et 1); donc il est unique. Pour montrer qu'un tel complété existe, nous devons montrer que l'application j définie à la Proposition 1 est injective. Or, considérons l'égalité

$$(5,4) \quad (k | H\bar{e}')_{\hat{\mathcal{H}}_0} = \langle j(k), e' \rangle,$$

pour $k \in \hat{\mathcal{H}}_0$, $e' \in E'$; pour e' fixé, elle est vraie si $k \in \mathcal{H}_0$ d'après (5,1); les deux membres dépendent continuellement de $k \in \hat{\mathcal{H}}_0$, parce que j est continue de $\hat{\mathcal{H}}_0$ dans E , et que c'est une forme linéaire continue sur E ; donc (5,4) est vraie pour tous $e' \in E'$, $k \in \hat{\mathcal{H}}_0$. Alors, si $j(k) = 0$, k est orthogonal à $\mathcal{H}_0$ dans $\hat{\mathcal{H}}_0$, donc nul, et j est bien injective. (On peut aussi montrer l'existence du complété de $\mathcal{H}_0$ dans E en utilisant l'autre critère donné à la Proposition 1: la boule unité B_0 est fermée dans $\mathcal{H}_0$ pour la topologie induite par E . En effet $u \in B_0$ est équivalent à: $u \in \mathcal{H}_0$ et

$$(5,5) \quad |\langle u, f' \rangle| \leq 1 \text{ pour tout } f' \in E' \text{ tel que } Hf' \in B_0;$$

pour f' donné, l'ensemble des u tels que $|\langle u, f' \rangle| \leq 1$ est fermé dans E , donc B_0 est l'intersection de $\mathcal{H}_0$ et d'un ensemble de parties fermées de E , donc vérifie bien le critère voulu).

Soit alors $\mathcal{H} = j(\hat{\mathcal{H}}_0)$ le complété de $\mathcal{H}_0$ dans E . Pour un $h \in \mathcal{H}$, soit k l'élément de $\hat{\mathcal{H}}_0$ tel que $j(k) = h$; (5,4) revient à (4,2), car $(k | H\bar{e}')_{\hat{\mathcal{H}}_0} = (h | H\bar{e}')_{\mathcal{H}}$, donc le noyau de $\mathcal{H}$ est bien H . Nous avons donc bien montré qu'étant donné un noyau $H \geq 0$, il existe un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ et un seul qui l'admette comme noyau associé, $\text{Hilb}(E) \rightarrow \mathcal{L}^+(E)$ est bien bijective.

Il sera utile dans la suite de retenir, en termes rapides, cette méthode de construction de $\mathcal{H}$ à partir de H :

(5,5 bis) *Sur $\mathcal{H}_0 = H(\bar{E}')$ on définit le produit scalaire (5,1); il fait de $\mathcal{H}_0$ un sous-espace préhilbertien de E , et $\mathcal{H}$ est le complété de $\mathcal{H}_0$ dans E .*

Deuxième démonstration

Bien entendu, cette deuxième démonstration que nous allons donner n'est pas essentiellement distincte de la première. Le caractère injectif de l'application canonique étant déjà surabondamment prouvé, nous nous bornerons à montrer sa surjectivité. Soit donc H un noyau ≥ 0 . Il définit sur E' une structure d'espace préhilbertien (en général non séparé) par la forme hermitienne (3,5); nous appellerons E'_H cette structure. Alors E'_H a un dual $(E'_H)'$, que nous appellerons $\mathcal{H}$, qui est un espace hilbertien et qui est aussi le dual de l'espace séparé complété $\hat{E}'_H$ associé à E'_H . $\mathcal{H}$ est un sous espace du dual algébrique E'^* de E' (complété faible de E); c'est l'ensemble des $h \in E'^*$ qui vérifient

$$\begin{aligned} (5,5\text{ter}) \quad |\langle h, e' \rangle| &\leq \text{constante} \times \|e'\|_{E'_H} \\ &= \text{constante} \tilde{H}(e', e') \\ &= \text{constante} \times \langle H\bar{e}', e' \rangle, \end{aligned}$$

c. à d. (4,6). Sa topologie est plus fine que $\sigma(E'^*, E')$, c'est donc un sous-espace hilbertien de E'^* faible. Par ailleurs, si $\hat{L}$ est l'anti-isomorphisme canonique de $\hat{E}'_H$ sur son dual $\mathcal{H}$, alors sa composée L :

$E'_H \rightarrow \hat{E}'_H \xrightarrow{\hat{L}} \mathcal{H}$ avec l'application canonique de E'_H dans $\hat{E}'_H$ est anti-linéaire continue de E'_H dans $\mathcal{H}$ et a les propriétés suivantes:

1°) L'image $L(E'_H) = \mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$, parce que l'image de E'_H dans $\hat{E}'_H$ est dense et que $\hat{L}(E'_H) = \mathcal{H}$;

2°) Quel que soit $h \in \mathcal{H}$ et quel que soit $e' \in E'$, d'image $\hat{e}'$ dans $\hat{E}'_H$:

$$(5,6) \quad (h | Le')_{\mathcal{H}} = (h | \hat{L}\hat{e}')_{\mathcal{H}} = \langle h, \hat{e}' \rangle = \langle h, e' \rangle;$$

3°) Quels que soient $e' \in E', f' \in E'$, d'images $\hat{e}'$ et $\hat{f}'$ dans $\hat{E}'_H$:

$$(5,7a) \quad (Lf' | Le')_{\mathcal{H}} = (Lf' | \hat{L}\hat{e}')_{\mathcal{H}} = \langle Lf', \hat{e}' \rangle = \langle Lf', e' \rangle.$$

$$(5,7b) \quad (Lf' | Le')_{\mathcal{H}} = (\hat{L}f' | \hat{L}\hat{e}')_{\mathcal{H}} = (\hat{e}' | \hat{f}')_{\hat{E}'_H} = (e' | f')_{E'_H} = \langle Hf', e' \rangle.$$

La comparaison de (5,7a) et (5,7b) montre que $Lf' = Hf'$. Donc $\mathcal{H}_0 = L(E')$

n'est autre que $\mathcal{H}_0 = H(\bar{E}')$ déjà antérieurement considéré, et, sur $\mathcal{H}_0$, la structure préhilbertienne induite par $\mathcal{H}$ est celle qui est définie par (4,3) en vertu de (5,7a). Donc $\mathcal{H}$ est le complété de $\mathcal{H}_0$ dans E'^* faible. La Proposition 0 montre alors que $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E lui-même. Alors (5,6) montre que $\mathcal{H}$ a pour noyau H , c'est l'espace hilbertien cherché.

La présente construction de $\mathcal{H}$ à partir de H s'exprime en termes rapides comme suit: Sur E' , le noyau H définit, par (3,5), une structure d'espace préhilbertien (en général non séparé) E'_H . $\mathcal{H}$ est le dual de E'_H (a priori sous-espace hilbertien de E'^* faible, il est en fait sous-espace hilbertien de E).

On voit la différence entre les deux démonstrations: la première ne sort jamais de E , mais montre que $\mathcal{H}_0$ a un complété dans E ; la deuxième donne d'emblée l'espace hilbertien $\mathcal{H}$ dans E'^* , et il faut montrer qu'il est dans E .

Corollaire. *Toute forme B sesquilinéaire ≥ 0 sur $E' \times E'$, séparément faiblement continue, est fortement continue. Toute forme A sesquilinéaire sur $E' \times E'$, vérifiant la majoration*

$$(5,8) \quad |A(e', f')| \leq \text{const.} (B(e', e'))^{1/2} (B(f', f'))^{1/2}, \quad e' \in E', f' \in E',$$

ou même seulement la majoration

$$(5,8 \text{ bis}) \quad |A(e', e')| \leq \text{const.} B(e', e'), \quad e' \in E',$$

est séparément faiblement continue, et est fortement continue.

Démonstration. Supposons vérifiée (5,8). B , étant ≥ 0 et séparément faiblement continue, est définie par un noyau $H \geq 0$ suivant (3,5) (Proposition 5): $B(e', f') = \langle Hf', e' \rangle$, ou $B = \tilde{H}$. Alors la forme linéaire h sur E' définie par $e' \rightarrow A(e', f')$, pour f' fixé, vérifie (4,6) à cause de (5,8); d'après La Proposition 8, h est dans $\mathcal{H}$, sous-espace hilbertien de E de noyau H , donc dans E : elle est faiblement continue sur E' . Le même raisonnement montre que, pour e' fixé, $f' \rightarrow A(\bar{e}', f')$ est faiblement continue, donc A est bien séparément faiblement continue.

Si maintenant e' et f' convergent fortement vers 0 dans E' , $H\bar{e}'$ et Hf' convergent fortement vers 0 dans $\mathcal{H}$, donc leur produit scalaire dans $\mathcal{H}$,

qui est $\langle Hf', e' \rangle = B(e', f')$, converge vers 0; d'autre part $B(e', e')$ et $B(f', f')$ convergent vers 0, pour la même raison, donc aussi $A(e', f')$ d'après (5,8); A et B sont fortement continues sur $E' \times E'$.

Supposons seulement vérifiée (5,8 bis). Il suffira d'utiliser le lemme:

Lemme. Soient A, B , deux formes sesquilineaires sur $E' \times E'$, $B \geq 0$.
L'inégalité

$$(5,9) \quad \forall e' \in E', \forall f' \in E', |A(e', f')| \leq (B(e', e'))^{1/2} (B(f', f'))^{1/2}$$

est équivalente, si A est hermitienne, à l'inégalité

$$(5,10) \quad \forall e' \in E', |A(e', e')| \leq B(e', e');$$

quelle que soit A , elle est entraînée par l'inégalité

$$(5,11) \quad \forall e' \in E', |A(e', e')| \leq \frac{1}{2} B(e', e').$$

Démonstration

(5,9) entraîne toujours (5,10). Inversement, supposons (5,10) réalisée et A hermitienne. On a

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Re} A(e', f') &= A(e' + f', e' + f') - A(e' - f', e' - f') \\ |4 \operatorname{Re} A(e', f')| &\leq B(e' + f', e' + f') + B(e' - f', e' - f') \\ &= 2(B(e', e') + B(f', f')) \end{aligned}$$

En remplaçant f' par $\lambda f'$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et que $A(e', \lambda f')$ soit réel, on en déduit:

$$(5,12) \quad |A(e', f')| \leq \frac{1}{2} (B(e', e') + B(f', f')), \quad \forall e' \in E', \forall f' \in E'.$$

Il nous reste à montrer que (5,12) entraîne (5,9). C'est vrai si $B(e', e')$ ou $B(f', f')$ est nul; si en effet, par exemple, $B(e', e') = 0$, on remplace, dans (5,12), f' par tf' , $t \in \mathbb{C}$, et on obtient $|\bar{t} A(e', f')| \leq \frac{1}{2} |t|^2 B(f', f')$, ce qui, en faisant tendre $t \neq 0$ vers 0, donne $A(e', f') = 0, \forall f' \in E'$, c. à d. (5,9). Si

maintenant $B(e', e')$ et $B(f', f')$ sont tous deux $\neq 0$, on remplace, dans (5,12), e' et f' par $\frac{e'}{(B(e', e'))^{1/2}}$ et $\frac{f'}{(B(f', f'))^{1/2}}$ respectivement, ce qui donne

$$(5,13) \quad \frac{|A(e', f')|}{(B(e', e'))^{1/2} (B(f', f'))^{1/2}} \leq \frac{1}{2} (1 + 1) = 1,$$

c.à d. (5,9).

Si maintenant A est quelconque mais vérifie (5,10), on aura

$$\begin{aligned} 4A(e', f') &= A(e' + f', e' + f') - A(e' - f', e' - f') \\ &\quad + iA(e' + if', e' + if') - iA(e' - if', e' - if'); \\ |4A(e', f')| &\leq \frac{1}{2}(B(e' + f', e' + f') + B(e' - f', e' - f')) \\ &\quad + B(e' + if', e' + if') + B(e' - if', e' - if') \\ &= 2(B(e', e') + B(f', f')), \end{aligned}$$

c.à d. (5.12), d'où de nouveau (5,9).

Remarque. Si A ne vérifie pas de majoration du type (5,8), elle n'est pas en général séparément faiblement continue, et, si elle l'est, elle n'est pas en général fortement continue sur $E' \times E'$.

§6. Isomorphisme canonique de $\text{Hilb}(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$

Théorème. *L'application canonique $\text{Hilb}(E) \rightarrow \mathcal{L}^+(E)$ définie au §5 est un isomorphisme de $\text{Hilb}(E)$ sur $\mathcal{L}^+(E)$ pour les structures définies sur ces ensembles.*

Ce théorème est le résultat de 3 propositions:

Proposition 11. *Si le sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E a pour noyau H , le sous-espace $\lambda\mathcal{H}$, $\lambda \geq 0$, a pour noyau λH .*

Démonstration.

D'après la définition de $\lambda\mathcal{H}$ (formule (2,1)), on a, quels que soient $h \in \lambda\mathcal{H}$, $e' \in E'$:

$$(6,1) \quad (h | \lambda H \bar{e}')_{\lambda \mathcal{H}} = \frac{1}{\lambda} (h | \lambda H \bar{e}')_{\mathcal{H}} = (h | H \bar{e}')_{\mathcal{H}} = \langle h, e' \rangle,$$

donc, d'après la Proposition 6, λH est bien le noyau de $\lambda \mathcal{H}$.

Proposition 12. *Si les sous-espaces hilbertiens $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, de E , ont pour noyaux H_1, H_2 , le noyau de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ est $H_1 + H_2$.*

Démonstration. Reprenons les notations de la page 133. L'élément $(H_1 \bar{e}', H_2 \bar{e}')$ de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, pour $e' \in E'$, est orthogonal au noyau $\mathcal{N}$ de l'application Φ . En effet, soit $(k_1, k_2) \in \mathcal{N}$, c. à d. tel que $k_1 + k_2 = 0$. Alors :

$$(6,2) \quad \begin{aligned} & ((k_1, k_2) | ((H_1 \bar{e}', H_2 \bar{e}'))_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}) \\ &= (k_1 | H_1 \bar{e}')_{\mathcal{H}_1} + (k_2 | H_2 \bar{e}')_{\mathcal{H}_2} = \langle k_1, e' \rangle + \langle k_2, e' \rangle \\ &= \langle k_1 + k_2, e' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Mais le produit scalaire de 2 vecteurs de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, si l'un d'eux est orthogonal à $\mathcal{N}$, est conservé par Φ , d'après (2,11). Donc, quels que soient $h = h_1 + h_2 \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $e' \in E'$:

$$(6,3) \quad \begin{aligned} (h | (H_1 + H_2) \bar{e}')_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2} &= (h_1 + h_2 | H_1 \bar{e}' + H_2 \bar{e}')_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2} \\ &= ((h_1, h_2) | (H_1 \bar{e}', H_2 \bar{e}'))_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} \\ &= (h_1 | H_1 \bar{e}')_{\mathcal{H}_1} + (h_2 | H_2 \bar{e}')_{\mathcal{H}_2} = \langle h_1, e' \rangle + \langle h_2, e' \rangle \\ &= \langle h_1 + h_2, e' \rangle = \langle h, e' \rangle, \end{aligned}$$

donc, d'après la Proposition 6, $H_1 + H_2$ est bien le noyau de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Proposition 13. *Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, deux sous-espaces hilbertiens de E , et H_1, H_2 leurs noyaux. La relation $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ est équivalente à la relation $H_1 \leq H_2$.*

1°) Supposons $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$. Alors, pour tout $e' \in E'$, $H_1 \bar{e}' \in \mathcal{H}_1$ donc $\in \mathcal{H}_2$, et, d'après (4,7):

$$(6,4) \quad \begin{aligned} & \langle H_1 \bar{e}', e' \rangle^{1/2} = \| H_1 \bar{e}' \|_{\mathcal{H}_1} \geq \| H_1 \bar{e}' \|_{\mathcal{H}_2} \\ & = \sup_{f' \in \bar{E}'} \frac{|\langle H_1 \bar{e}', f' \rangle|}{(H_2 f', f')^{1/2}} \geq \frac{|\langle H_1 \bar{e}', e' \rangle|}{\langle H_2 \bar{e}', e' \rangle^{1/2}} \end{aligned}$$

donc finalement

$$(6,5) \quad \langle H_1 \bar{e}', e' \rangle^{1/2} \leq \langle H_2 \bar{e}', e' \rangle^{1/2}, \text{ ou } H_1 \leq H_2.$$

2°) Inversement, supposons $H_1 \leq H_2$. Alors, pour $h \in E$:

$$(6,6) \quad \sup_{e' \in \bar{E}'} \frac{|\langle h, e' \rangle|}{\langle H_1 \bar{e}', e' \rangle^{1/2}} \geq \sup_{e' \in \bar{E}'} \frac{|\langle h, e' \rangle|}{\langle H_2 \bar{e}', e' \rangle^{1/2}};$$

d'après la Proposition 8, $h \in \mathcal{H}_1$ implique que le premier membre de (6,6) soit fini, donc le deuxième est fini et $h \in \mathcal{H}_2$; en outre $\|h\|_{\mathcal{H}_1} \geq \|h\|_{\mathcal{H}_2}$, et par suite $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$. Ceci achève la démonstration de la Proposition 13, donc du théorème.

§7. Conséquences de l'isomorphisme.

Proposition 14. Soient $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1$, deux sous-espaces hilbertiens de E . Pour qu'il existe un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}_2$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, il faut et il suffit que $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$, et $\mathcal{H}_2$ est alors unique. On écrit $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$.

Démonstration. Soient H, H_1 , les noyaux de $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1$. L'existence de $\mathcal{H}_2$ est équivalente à celle d'un noyau $H_2 \geq 0$ tel que $H = H_1 + H_2$, et alors $\mathcal{H}_2$ est unique puisque son noyau $H_2 = H - H_1$ est unique; or l'existence de H_2 est bien équivalente à la relation $H - H_1 \geq 0$ ou $H \geq H_1$, elle-même équivalente à $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$.

Proposition 15. Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, deux sous-espaces hilbertiens de E , de noyaux H_1, H_2 . Pour que $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $H_1 \leq cH_2$.

Corollaire. Pour que $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$, c. a. d. pour que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ soient

le même sous-espace vectoriel de E (avec des structures hilbertiennes éventuellement différentes), il faut et il suffit qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $H_1 \leq cH_2$, $H_2 \leq cH_1$.

Cette proposition et son corollaire résultent de la Proposition 2 et de son corollaire, en appliquant le théorème.

Proposition 16. Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, deux sous-espaces hilbertiens de E , de noyaux H_1, H_2 . Pour que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, il faut et il suffit que H_1 et H_2 soient étrangers, c. a. d. que tout noyau $K \geq 0$ vérifiant $K \leq H_1$, $K \leq H_2$, soit nul.

Cela résulte de la Proposition 3 par le théorème.

Proposition 17. Soient $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1$ deux sous-espaces hilbertiens de E , de noyaux H, H_1 . Pour que $\mathcal{H}_1$ soit un sous-espace de $\mathcal{H}$ avec la structure hilbertienne induite, il faut et il suffit que $H - H_1 \geq 0$ et que H_1 et $H - H_1$ soient étrangers; alors l'espace $\mathcal{H}_2$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ est l'orthogonal de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$ avec la structure hilbertienne induite.

Démonstration. 1°) Supposons que $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et qu'il ait la structure hilbertienne induite. Si alors $\mathcal{H}_2$ est l'orthogonal de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$, on a bien $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ (page 134). Si H_2 est le noyau de $\mathcal{H}_2$, on a $H_1 + H_2 = H$ ou $H_2 = H - H_1 \geq 0$; or $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, donc H_1 et $H - H_1$ sont étrangers (Proposition 16).

2°) Réciproquement, supposons que $H - H_1 \geq 0$ et que H_1 et $H_2 = H - H_1$ soient étrangers. Alors, si $\mathcal{H}_2$ est le sous-espace hilbertien de noyau H_2 , on aura $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$; donc $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ avec la structure hilbertienne induite.

Proposition 18. 1°) Soit $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ un ordonné filtrant décroissant de sous-espaces hilbertiens de E , de noyaux H_i .

Alors $\text{Inf}_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ existe, et a pour noyau $\text{Inf}_{i \in I} H_i = H$, qui est aussi $\lim_i H_i$, dans $\mathcal{L}(\bar{E}; E)$ muni de la topologie de la convergence simple faible. $\mathcal{H}$ est le sous-espace de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$ formé des h tels que

$$(7,1) \quad \begin{cases} \text{Sup}_{i \in I} \|h\|_{\mathcal{H}_i} < \infty, \text{ et alors} \\ \|h\|_{\mathcal{H}} = \text{Sup}_{i \in I} \|h\|_{\mathcal{H}_i} = \lim_i \|h\|_{\mathcal{H}_i} \\ (h|k)_{\mathcal{H}} = \lim_{i \in I} (h|k)_{\mathcal{H}_i} \end{cases}$$

2) Soit $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ un ordonné filtrant croissant de sous-espaces hilbertiens de E , de noyaux H_i . Pour qu'il soit majoré dans $\text{Hilb}(E)$, il faut et il suffit que $\text{Sup}_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle < +\infty$ pour tout $e' \in E'$. Dans ce cas, $\text{Sup}_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ existe, et il a pour noyau $\text{Sup}_{i \in I} H_i = H$, qui est aussi $\lim_i H_i$ pour la topologie de la convergence simple faible. $\mathcal{H}$ est le Q -complété dans E du sous-espace préhilbertien $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$ muni de la structure

$$(7,2) \quad \begin{cases} \|h\| = \text{Inf}_{i \in I} \|h\|_{\mathcal{H}_i} = \lim_i \|h\|_{\mathcal{H}_i} \\ (h|k) = \lim_i (h|k)_{\mathcal{H}_i} \end{cases} .$$

Démonstration. 1°) Partons d'abord d'un ordonné filtrant décroissant. I est un ensemble d'indices, ordonné, filtrant à droite; pour $j \geq i$, on a $\mathcal{H}_j \leq \mathcal{H}_i, H_j \leq H_i$. Les limites sont prises suivant le filtre des sections droites de I . Pour tout $e' \in E', \lim_i \langle H_i \bar{e}', e' \rangle$ existe et vaut $\text{Inf}_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle$; alors (3,7) montre que $\lim_i \langle H_i \bar{f}', e' \rangle$ existe pour tous e', f' de E' ; appelons le $A(e', f')$. A est une forme hermitienne ≥ 0 sur $E' \times E'$. Quel que soit $i \in I$, on a $A(e', e') \leq \langle H_i \bar{e}', e' \rangle$, donc, d'après le corollaire de la Proposition 10, A est séparément faiblement continue, et il existe (Proposition 5) un noyau $H \geq 0$ tel que $A(e', f') = \langle H \bar{f}', e' \rangle$. H est la limite des H_i dans $\mathcal{L}(E'; E)$ (pour la convergence simple faible) et il est trivialement la borne inférieure des H_i dans $\mathcal{L}^+(E)$. La correspondance entre les structures d'ordre entre $\text{Hilb}(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$ montre que nécessairement les $\mathcal{H}_i$ ont une borne inférieure $\mathcal{H}$ dans $\text{Hilb}(E)$, et que le noyau de $\mathcal{H}$ est H . Avec les conventions de la remarque qui suit la Proposition 8, on a :

$$(7,3) \quad \begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{H}} &= \text{Sup}_{e' \in E'} \frac{|\langle h, e' \rangle|}{\langle H \bar{e}', e' \rangle^{1/2}} = \text{Sup}_{e' \in E'} \left(\text{Sup}_{i \in I} \frac{|\langle h, e' \rangle|}{\langle H_i \bar{e}', e' \rangle^{1/2}} \right) \\ &= \text{Sup}_{i \in I} \left(\text{Sup}_{e' \in E'} \frac{|\langle h, e' \rangle|}{\langle H_i \bar{e}', e' \rangle^{1/2}} \right) = \text{Sup}_{i \in I} \|h\|_{\mathcal{H}_i} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}$ est bien le sous-espace de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$ formé des h tels que $\text{Sup}_{i \in I} \|h\|_{\mathcal{H}_i} < \infty$, et on a bien la première relation (7,1); la seconde résulte de (2,19 bis).

2°) Prenons maintenant un ordonné filtrant croissant; I a les mêmes propriétés mais $j \geq i$ entraîne $\mathcal{H}_j \supseteq \mathcal{H}_i$, $H_j \supseteq H_i$. Supposons les $\mathcal{H}_i$ majorés par un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de noyau K ; alors

$$\text{Sup}_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle \leq \langle K \bar{e}', e' \rangle < +\infty.$$

Inversement, supposons cette condition réalisée: $\text{Sup}_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle < +\infty$. Alors $\lim_i \langle H_i \bar{e}', e' \rangle$ existe et vaut $\text{Sup}_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle$; (3,7) montre que $\lim_i \langle H f', e' \rangle$ existe; appelons-le $A(e', f')$. A est une forme hermitienne ≥ 0 sur $E' \times E'$ (a priori non nécessairement séparément faiblement continue). D'après la remarque qui suit la Proposition 5, A provient d'un noyau H relatif à E'^* , définissant un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E'^* . $\mathcal{H}$ majore tous les $\mathcal{H}_i$, donc $\mathcal{H} \cap E$ (hilbertien d'après la Proposition 0) les majore aussi: l'ordonné filtrant croissant est majoré. En outre H est limite simple faible et borne supérieure des H_i dans $\mathcal{L}(\bar{E}'; E'^*)$, donc $\mathcal{H}$ est borne supérieure des $\mathcal{H}_i$ dans $\text{Hilb}(E'^*)$. Comme $\mathcal{H} \cap E$ majore les $\mathcal{H}_i$ et minore $\mathcal{H}$, on a nécessairement $\mathcal{H} \cap E = \mathcal{H}$, ou $\mathcal{H} \subset E$, $H \in \mathcal{L}(\bar{E}'; E)$. Déterminons cet $\mathcal{H}$. D'abord $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_i$, donc $\mathcal{H} \supset \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$, qui est un espace vectoriel parce que l'ordonné est filtrant. Sur $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$, $h \rightsquigarrow \text{Inf}_{i \in I} \|h\|_{\mathcal{H}_i} = \lim_i \|h\|_{\mathcal{H}_i}$ est une semi-norme; la formule (2,19 bis) montre alors qu'on peut y définir un produit scalaire $(h|k) = \lim_i (h|k)_{\mathcal{H}_i}$, hermitien ≥ 0 , et que $\|h\| = (h|h)$, donc $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$ est préhilbertien. En outre, $\|h\|_{\mathcal{H}_i} \geq \|h\|_{\mathcal{H}}$ donc $\text{Inf}_{i \in I} \|h\|_{\mathcal{H}_i} \geq \|h\|_{\mathcal{H}}$. L'injection $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}$ est donc continue, et a fortiori l'injection $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i \rightarrow E$ (donc $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$ est séparé). Ainsi $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$ est un sous-espace préhilbertien de E , qui est évidemment le plus petit sous-espace préhilbertien de E majorant les $\mathcal{H}_i$. D'après la Proposition 1 bis (ou la remarque page 138), il y a bien une borne supérieure des $\mathcal{H}_i$; à savoir le Q -complété de $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$ dans E , qui est donc $\mathcal{H}$.

Nous avons démontré, en passant, le résultat:

Corollaire. *Si les A_i sont des formes hermitiennes ≥ 0 séparément faiblement continues sur $E' \times E'$, si elles constituent un ordonné filtrant croissant, et si, pour tout $e' \in E'$, $\text{Sup}_{i \in I} A_i(e', e') < +\infty$, elles ont une limite simple sur $E' \times E'$, qui est encore séparément faiblement continue.*

Remarque 1. $\text{Hilb}(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$ ne sont pas réticulés. Il existe une borne inférieure d'un ensemble filtrant décroissant mais pas de borne inférieure de deux éléments quelconques. (Il suffit, pour le voir, de remarquer que, pour $E = \mathbb{C}^2$, on a $E' = \mathbb{C}^2$, et qu'il n'existe pas, en général, de borne inférieure de deux formes hermitiennes ≥ 0 sur $\mathbb{C}^2$). De même il existe une borne supérieure d'un ordonné filtrant croissant majoré, mais pas en général de borne supérieure de deux éléments. (Un ensemble à 2 éléments est majoré par leur somme).

Remarque 2. Un ordonné filtrant croissant de $\text{Hilb}(E)$ n'est pas nécessairement majoré. C'est le cas de $I =$ ensemble des réels ≥ 0 , et $\mathcal{H}_t = t\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ fixé $\neq \{0\}$, t réel ≥ 0 .

Remarque 3. Dans le cas d'un ordonné filtrant décroissant, $\mathcal{H} = \text{Inf}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ peut être différent de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$. C'est le cas pour $I =$ ensemble des réels > 0 , $\mathcal{H}_t = \frac{1}{t}\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ fixé $\neq \{0\}$, $t > 0$. Alors $\bigcap_{t > 0} \mathcal{H}_t = \mathcal{H}$, et cependant $\text{Inf}_{t > 0} \mathcal{H}_t = \{0\}$.

Remarque 4. Dans le cas d'un ordonné filtrant croissant majoré, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$, sous-espace préhilbertien de E , peut n'avoir pas de complété dans E . Soit, par exemple, $\mathcal{H}_0$ un sous-espace préhilbertien de E , mais n'ayant pas de complété dans E (voir contre-exemple (1,5)). Si les $\mathcal{H}_i$ sont les sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{H}_0$, munis de la structure induite, ce sont des sous-espaces hilbertiens de E . Ils constituent un ordonné filtrant croissant, majoré par le Q -complété $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_0$ dans E . Alors $\bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_0$ qui n'a pas de complété dans E , et $\text{Sup}_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$.

Sommes infinies de sous-espaces hilbertiens de E .

Soit $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces hilbertiens de E . On peut définir

leur somme hilbertienne abstraite $\hat{\bigoplus} \mathcal{H}_i$; un élément de cette somme est une famille $(h_i)_{i \in I}$, $h_i \in \mathcal{H}_i$, telle que $\sum_{i \in I} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 < +\infty$, avec

$$(7,4) \quad \|(h_i)_{i \in I}\|_{\hat{\bigoplus} \mathcal{H}_i}^2 = \sum_{i \in I} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2.$$

Les éléments $(h_i)_{i \in I}$, pour lesquels tous les h_i sont nuls sauf un nombre fini, forment un sous-espace dense $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ de $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$.

Proposition 19. *Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes:*

1°) *L'application linéaire Φ_0 de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ dans E , définie par*

$$(7,5) \quad \Phi_0((h_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} h_i,$$

est continue;

2) *Les sommes finies $\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i$, J parties finies de E , sont majorées dans $\text{Hilb}(E)$;*

3) *Pour tout $e' \in E'$, $\sum_{i \in I} \langle H_i \tilde{e}', e' \rangle < +\infty$.*

Si elles sont réalisées, on dit que la famille $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ est sommable. Alors Φ_0 se prolonge en une application linéaire continue Φ de $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ dans E , définie encore par (7,5) (la condition $\sum_{i \in I} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 < +\infty$ impliquant que $\sum_{i \in I} h_i$ soit sommable dans E). Soit $\mathcal{N}$ le noyau de Φ ; Φ se factorise en

$$\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i \xrightarrow{\pi} (\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i) / \mathcal{N} \xrightarrow{\Phi^*} E.$$

On appelle $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$ l'image $\Phi(\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i)$, avec la structure hilbertienne transportée par Φ^ de celle de $(\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i) / \mathcal{N}$. Les éléments de $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$ sont ceux qui peuvent s'exprimer par des sommes $\sum_{i \in I} h_i$, sommables dans E , avec $h_i \in \mathcal{H}_i$, $\sum_{i \in I} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 < \infty$, et on a*

$$(7,6) \quad \|h\|^2 = \text{Inf}_{\substack{\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i \\ (\sum_{i \in I} h_i) = h}} \left(\sum_{i \in I} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 \right).$$

En outre $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$ est égal à la borne supérieure des sommes finies $\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i$,

J finie $\subset I$; et son noyau est $\sum_{i \in I} H_i$, sommable pour la topologie $\mathcal{L}_s(E'; E)$ de la convergence simple.

Démonstration. Supposons 1° réalisée. Alors Φ_0 se prolonge en une application linéaire continue Φ de $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ dans E . Si $(h_i)_{i \in I}$ est un élément de $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$, il est limite des éléments $((h_i)_{i \in J}, (0)_{i \in I-J})$, suivant l'ordonné filtrant des parties finies J de I ; son image par Φ est donc nécessairement la limite de $\sum_{i \in J} h_i$, suivant cet ordonné filtrant, c. à d. la somme $\sum_{i \in I} h_i$, sommable dans E .

Compte tenu de la définition de la norme quotient dans $(\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i) / \mathcal{N}$ et de ce que Φ transporte la structure hilbertienne, $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$ défini dans l'énoncé a bien la norme (7,6). Mais, si J est une partie finie de I , un élément k de $\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i$ est de la forme $\sum_{i \in J} k_i$, et l'on a, d'après (2,9):

$$(7,7) \quad \|k\|_{\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i}^2 = \inf_{\substack{(\sum_{i \in J} k_i) = k \\ i \in J}} \|k_i\|_{\mathcal{H}_i}^2;$$

donc $\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i$ est un sous-espace de $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$, avec une injection de norme ≤ 1 : les $\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i$ sont majorées par $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$, et l'on a bien 2°).

Supposons maintenant 2°) réalisée. Comme le noyau de $\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i$ est $\sum_{i \in J} H_i$, la Proposition 11 montre que l'on a 3°).

Supposons enfin que l'on ait 3°). Pour voir que Φ_0 est continue, nous devons montrer que l'image Φ_0 de la boule unité B_0 de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ est faiblement bornée. Soit donc $e' \in E'$. $\Phi_0(B_0)$ est l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in J} h_i$, telles que $\sum_{i \in J} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 \leq 1$. Pour $h \in \Phi_0(B_0)$, $h = \sum_{i \in J} h_i$, on a

$$(7,8) \quad \begin{aligned} |\langle h, e' \rangle| &\leq \sum_{i \in J} |\langle h_i, e' \rangle| = \sum_{i \in J} |(h_i | H_i \bar{e}')_{\mathcal{H}_i}| \\ &\leq \left(\sum_{i \in J} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in J} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

donc $\Phi_0(B_0)$ est bien faiblement bornée, Φ_0 est bien continue, on a 1°), et les 3 conditions données sont bien équivalentes. Supposons les réalisées. La Proposition 18 dit que la série $\sum_{i \in I} H_i$ est sommable pour la topologie de la convergence simple faible; nous devons montrer ici qu'elle l'est pour la convergence simple forte. Or $\sum_{i \in I} \|H_i \bar{e}'\|_{\mathcal{H}_i}^2 = \sum_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle < +\infty$; donc l'image par Φ de $(H_i \bar{e}')_{i \in I} \in \hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$, c'est à dire $\sum_{i \in I} H_i \bar{e}'$, est sommable dans E , ce qui prouve notre assertion. Mais toujours la Proposition 18 dit que $\sum_{i \in I} H_i = \text{Sup}_{J \text{ finie } \subset I} (\sum_{i \in J} H_i)$ est le noyau de $\text{Sup}_{J \text{ finie } \subset I} (\sum_{i \in J} \mathcal{H}_i)$; si nous montrons que c'est aussi le noyau de $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$, nous aurons achevé la démonstration.

Or l'élément $(H_i \bar{e}')_{i \in I}$ de $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ est orthogonal au noyau $\mathcal{N}$ de Φ ; cela se voit comme pour le cas fini, formule (6,2). On a donc, comme dans (6,3), pour $h = \sum_{i \in I} h_i \in \sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$:

$$\begin{aligned}
 (7,9) \quad \langle \sum_{i \in I} h_i, e' \rangle &= \sum_{i \in I} \langle h_i, e' \rangle \\
 &= \sum_{i \in I} (h_i | H_i \bar{e}')_{\mathcal{H}_i} = ((h_i)_{i \in I} | (H_i \bar{e}')_{i \in I})_{\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i} \\
 &= \left(\sum_{i \in I} h_i \mid \left(\sum_{i \in I} H_i \right) \bar{e}' \right)_{\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i},
 \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $\sum_{i \in I} H_i$ est le noyau de $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$, c.q.f.d.

Corollaire 1. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , somme directe hilbertienne de sous-espaces fermés (deux à deux orthogonaux) $\mathcal{H}_i$, $i \in I$. Alors le noyau H de $\mathcal{H}$ est la somme $\sum_{i \in I} H_i$ des noyaux des $\mathcal{H}_i$, la série étant sommable pour la topologie $\mathcal{L}_s(\bar{E}'; E)$ de la convergence simple.

En effet, dans ce cas, $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i = \mathcal{H}$ (ici $\mathcal{N} = \{0\}$, Φ est un isomorphisme de $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ sur $\mathcal{H}$).

Corollaire 2. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , et soit $(e_i)_{i \in I}$ une

base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Alors le noyau de $\mathcal{H}$ est $\sum_i e_i \otimes \bar{e}_i$, série sommable dans $\mathcal{L}_s(\bar{E}'; E)$.

Démonstration. Soit $e \in E$. L'élément $\bar{e}$ de $\bar{E}$ définit la forme linéaire $f' \rightsquigarrow \overline{\langle e, f' \rangle}$ sur $\bar{E}'$. Alors $e \otimes \bar{e} \in E \otimes \bar{E} \subset E \varepsilon \bar{E}$ est la forme sesquilinéaire $(f', g') \rightsquigarrow \langle e, f' \rangle \overline{\langle e, g' \rangle}$ sur $E' \times E'$, ou le noyau $H_e: f' \rightsquigarrow \overline{\langle e, f' \rangle} e$.

Au vecteur e de E nous pouvons associer le sous-espace hilbertien $\mathcal{H}_e = Ce$ de E , muni du produit scalaire:

$$(7,10) \quad (\alpha e | \beta e)_{\mathcal{H}_e} = \alpha \bar{\beta}.$$

Alors $H_e = e \otimes \bar{e}$ est le noyau de $\mathcal{H}_e$, car, quels que soient $h = \alpha e \in \mathcal{H}_e$, et $f' \in E'$, on a;

$$(7,11) \quad \langle h, f' \rangle = \alpha \langle e, f' \rangle = (\alpha e | \overline{\langle e, f' \rangle} e)_{\mathcal{H}_e} = (h | H_e f')_{\mathcal{H}_e}.$$

Si alors les e_i forment une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ est la somme directe hilbertienne des sous-espaces $\mathcal{H}_{e_i}$, et il suffit d'appliquer le Corollaire 1 pour obtenir le résultat.

Corollaire 3. (Décomposition en carrés d'un noyau ≥ 0). Tout noyau $H \geq 0$ relatif à E admet une décomposition en somme $\sum_{i \in I} e_i \otimes \bar{e}_i$, $e_i \in E$, la série étant sommable pour la topologie de la convergence simple; I est dénombrable si E' est faiblement séparable. (Appliquer le corollaire précédent, et le corollaire de la Proposition 7).

Corollaire 4. Soit $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces hilbertiens de E , de noyaux H_i . Pour qui'il existe un sous-espace hilbertien de E , qui admette les $\mathcal{H}_i$ comme sous-espaces fermés orthogonaux avec structures hilbertiennes induites, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées:

1°) Quel que soit $e' \in E'$, $\sum_{i \in I} \langle H_i \bar{e}', e' \rangle < + \infty$;

2°) Le système des $\mathcal{H}_i$ est Hilbert-libre dans E , en ce sens que, si des $h_i \in \mathcal{H}_i$ vérifient $\sum_{i \in I} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 < + \infty$, $\sum_{i \in I} h_i = 0$ (série sommable dans E), alors tous les h_i sont nuls.

Démonstration. L'existence d'un tel espace revient exactement à dire que la famille $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ est sommable, c. à d. la première condition, et que l'application Φ de la Proposition 19 est un isomorphisme de $\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$ sur $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$ (noyau $\mathcal{N} = \{0\}$), c. à d. la deuxième condition.

Corollaire 5. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . Pour qu'il existe un sous-espace hilbertien de E les admettant comme base hilbertienne, il faut et il suffit que les 2 conditions suivantes soient réalisées:

1°) Quel que soit $f' \in E'$, $\sum_{i \in I} |\langle e_i, f' \rangle|^2 < +\infty$;

2°) Le système des e_i est Hilbert-libre dans E , en ce sens que, si des $c_i \in \mathbb{C}$ vérifient $\sum_{i \in I} |c_i|^2 < +\infty$, $\sum_{i \in I} c_i e_i = 0$ (série sommable dans E), alors tous les c_i sont nuls.

Il suffit d'appliquer le Corollaire 4 aux $\mathcal{H}_{e_i}$ (notations du Corollaire 2).

Intégrale de sous-espaces hilbertiens de E .

Soit Z un espace localement compact muni d'une mesure $\mu \geq 0$. Soit $\zeta \rightarrow \mathcal{H}(\zeta)$ une application de Z dans $\text{Hilb}(E)$; nous dirons qu'elle est μ -intégrable (ou encore que la famille $(\mathcal{H}(\zeta))_{\zeta \in Z}$ de sous-espaces hilbertiens est μ -intégrable) si, pour tout $e' \in E'$, la fonction $\zeta \rightarrow \langle H(\zeta)\bar{e}', e' \rangle$ (où $H(\zeta)$ est le noyau de $\mathcal{H}(\zeta)$) est μ -intégrable. Cela revient à dire que $\zeta \rightarrow H(\zeta)$ est scalairement μ -intégrable dans $\mathcal{L}(E'; E)$ muni de la topologie de la convergence simple faible.

Proposition 20. Soit $\zeta \rightarrow \mathcal{H}(\zeta)$ une famille μ -intégrable de sous-espaces hilbertiens de E et supposons le dual E' faiblement séparable. Appelons μ -mesurable tout champ de vecteurs $\zeta \rightarrow h(\zeta) \in \mathcal{H}(\zeta)$ telle que la fonction $\zeta \rightarrow h(\zeta)$ sur Z a valeurs dans E soit scalairement μ -mesurable; ces champs définissent sur les $\mathcal{H}(\zeta)$ une structure S de champ μ -mesurable d'espaces hilbertiens⁽³⁹⁾. Appelons $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)$ l'espace des classes (modulo l'éga-

⁽³⁹⁾ Nous suivons ici les notations et la terminologie de Dixmier [1].

lité μ -presque partout) de champs de vecteurs μ -mesurables $\zeta \rightarrow h(\zeta)$ tels que

$$\int_Z \|h(\zeta)\|_{\mathcal{H}(\zeta)}^2 d\mu(\zeta) < +\infty \text{ avec}$$

$$(7,12) \quad \|h(\zeta)_{\zeta \in Z}\|_{\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)}^2 = \int_Z \|h(\zeta)\|_{\mathcal{H}(\zeta)}^2 d\mu(\zeta).$$

Il existe une application linéaire continue Φ de $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)$ dans E'^* (muni de la topologie $\sigma(E'^*, E')$) définie par:

$$(7,13) \quad \Phi((h(\zeta))_{\zeta \in Z}) = \int_Z h(\zeta) d\mu(\zeta) \in E'^*,$$

le deuxième membre étant l'intégrale faible d'une fonction scalairement intégrable. Soit $\mathcal{N}$ le noyau de Φ . Alors Φ se factorise en

$$\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta) \xrightarrow{\pi} \left(\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta) \right) / \mathcal{N} \xrightarrow{\Phi} E.$$

On appelle $\mathcal{H} = \int_Z \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)$ le sous-espace hilbertien de E'^* , transporté par Φ du quotient $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta) / \mathcal{N}$.

C'est l'ensemble des $h \in E'^*$ qui peuvent s'écrire

$$\int_Z h(\zeta) d\mu(\zeta), (h(\zeta))_{\zeta \in Z} \in \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta),$$

avec la norme:

$$(7,14) \quad \|h\|^2 = \inf_{\int_Z h(\zeta) d\mu(\zeta) = h} \int_Z \|h(\zeta)\|_{\mathcal{H}(\zeta)}^2 d\mu(\zeta).$$

Le noyau de $\mathcal{H} = \int_Z \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)$ relativement à E'^* est

$$H = \int_Z H(\zeta) d\mu(\zeta) \in \mathcal{L}(\bar{E}'; E'^*)$$

(intégrable faible de $\zeta \rightarrow H(\zeta)$, fonction scalairement intégrable à valeurs dans $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ muni de la topologie de la convergence simple faible).

Démonstration. Soit $e'_n, n = 1, 2, \dots$, une suite faiblement totale dans E' . Considérons les champs de vecteurs $\zeta \rightarrow h_n(\zeta) = H(\zeta)\bar{e}'_n$. Pour tout ζ , les $H(\zeta)\bar{e}'_n$ forment une suite faiblement totale, donc fortement totale, dans $H(\zeta)(\bar{E}') \subset \mathcal{H}(\zeta)$, donc dans $\mathcal{H}(\zeta)$ lui-même.

D'autre part la fonction $\zeta \rightarrow (h_m(\zeta) | h_n(\zeta))_{\mathcal{H}(\zeta)} = \langle H(\zeta)\bar{e}'_m, \bar{e}'_n \rangle$ est mesurable d'après l'hypothèse faite sur les noyaux $H(\zeta)$.

Donc ⁽⁴⁰⁾ il existe une structure unique S de champ mesurable d'espaces hilbertiens sur la famille des $\mathcal{H}(\zeta)$, pour laquelle les $\zeta \rightarrow h_n(\zeta)$ soient des champs mesurables. Si $\zeta \rightarrow h(\zeta)$ est un champ mesurable pour cette structure S , il appartient à la tribu engendrée par les $\zeta \rightarrow \phi(\zeta)h_n(\zeta)$, où ϕ est une fonction complexe mesurable sur Z . Alors la fonction $\zeta \rightarrow \langle h(\zeta), e' \rangle$ appartient à la tribu engendrée par les fonctions $\zeta \rightarrow \langle \phi(\zeta)h_n(\zeta), e' \rangle = \phi(\zeta)\langle H(\zeta)\bar{e}'_n, e' \rangle$; celles-ci sont mesurables d'après l'hypothèse faite sur les noyaux $H(\zeta)$, donc $\zeta \rightarrow \langle h(\zeta), e' \rangle$ est mesurable, $\zeta \rightarrow h(\zeta)$ est scalairement mesurable sur Z à valeurs dans E . Inversement, s'il en est ainsi, $\zeta \rightarrow (h(\zeta) | h_n(\zeta))_{\mathcal{H}(\zeta)} = \langle h(\zeta), e'_n \rangle$ est mesurable, donc $\zeta \rightarrow h(\zeta)$ est un champ mesurable pour la structure S . La structure S est donc bien celle que nous avons décrite dans l'énoncé, pour laquelle les champs mesurables sont les applications $\zeta \rightarrow h(\zeta) \in \mathcal{H}(\zeta)$, scalairement μ -mesurables sur Z à valeurs dans E (en particulier, S est indépendante du choix des e'_n).

Montrons que (7,13) a un sens. Si $\zeta \rightarrow h(\zeta)$ est dans $\int_Z^\oplus \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)$, c'est un champ mesurable pour la structure S , donc scalairement mesurable à valeurs dans E . Pour montrer que cette fonction à valeurs dans E est sca-

⁽⁴⁰⁾ Dixmier [1], Proposition 4 page 144.

lairement intégrable donc que (7,13) a un sens, il suffit de montrer que $\zeta \rightarrow |\langle h(\zeta), e' \rangle|$ est intégrable. Or

$$(7,15) \quad |\langle h(\zeta), e' \rangle| = |(h(\zeta) | H(\zeta) \bar{e}')_{\mathcal{H}(\zeta)}| \leq \|h(\zeta)\|_{\mathcal{H}(\zeta)} \langle H(\zeta) \bar{e}', e' \rangle^{1/2}$$

fonction intégrable comme produit de 2 fonctions de L^2 ; en outre:

$$(7,16) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{Z}} h(\zeta) d\mu(\zeta), e' \right| = \left| \int_{\mathcal{Z}} \langle h(\zeta), e' \rangle d\mu(\zeta) \right| \\ & \leq \int_{\mathcal{Z}} |\langle h(\zeta), e' \rangle| d\mu(\zeta) = \int_{\mathcal{Z}} |(h(\zeta) | H(\zeta) \bar{e}')_{\mathcal{H}(\zeta)}| d\mu(\zeta) \\ & \leq \left(\int_{\mathcal{Z}} \|h(\zeta)\|_{\mathcal{H}(\zeta)}^2 d\mu(\zeta) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{Z}} \langle H(\zeta) \bar{e}', e' \rangle d\mu(\zeta) \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

donc Φ est continue de $\int_{\mathcal{Z}}^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)$ dans E'^* , puisque l'image de la boule unité est bornée.

Alors on peut décrire l'espace $\int_{\mathcal{Z}} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta) = \mathcal{H} \subset E$ suivant l'énoncé, et sa norme est (7,14). Posons $H = \int_{\mathcal{Z}} H(\zeta) d\mu(\zeta)$, intégrale faible de $\zeta \rightarrow H(\zeta)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ muni de la topologie de la convergence simple faible; H est une application linéaire de $\bar{E}'$ dans E'^* , avec

$$(7,17) \quad \langle H \bar{f}', e' \rangle = \int_{\mathcal{Z}} \langle H(\zeta) \bar{f}', e' \rangle d\mu(\zeta).$$

Montrons que H est le noyau de $\mathcal{H} \subset E'^*$. Comme dans les Propositions 12 et 19, on voit immédiatement que le champ $\zeta \rightarrow H(\zeta) \bar{e}'$ est, dans $\int_{\mathcal{Z}}^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta)$, orthogonal à $\mathcal{N}$. De la même manière encore on en déduit, pour $h = \int_{\mathcal{Z}} h(\zeta) d\mu(\zeta) \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
(7,18) \quad \langle h, e' \rangle &= \left\langle \int_{\mathcal{Z}} h(\zeta) d\mu(\zeta), e' \right\rangle = \int_{\mathcal{Z}} \langle h(\zeta), e' \rangle d\mu(\zeta) \\
&= \int_{\mathcal{Z}} (h(\zeta) | H(\zeta) \bar{e}')_{\mathcal{H}(\zeta)} d\mu(\zeta) \\
&= (h(\zeta)_{\zeta \in \mathcal{Z}} | (H(\zeta) \bar{e}')_{\zeta \in \mathcal{Z}})_{\int_{\mathcal{H}(\zeta)} d\mu(\zeta)} \\
&= \left(\int_{\mathcal{Z}} h(\zeta) d\mu(\zeta) \middle| \int_{\mathcal{Z}} H(\zeta) \bar{e}' d\mu(\zeta) \right)_{\mathcal{H}} = (h | H \bar{e}')_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

qui, d'après (4,2), montre bien que H est le noyau de $\mathcal{H}$.

Remarque. On aura souvent à montrer que $\mathcal{H} \subset E$. Il suffira, pour cela (Proposition 0), que $H(\bar{E}') \subset E$, c. à d. que l'intégrable faible $\int_{\mathcal{Z}} H(\zeta) d\mu(\zeta) \in \mathcal{L}(\bar{E}'; E'^*)$ soit un élément de $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$. On dispose pour cela de nombreux critères: non seulement tous ceux qui concernent l'intégrale faible en général ⁽⁴¹⁾, mais, par exemple, les Propositions 18, 2°, et 19.

§8. Effet d'une application linéaire continue.

Soient E, F , des espaces localement convexes séparés quasi-complets, u une application linéaire faiblement continue de E dans F ⁽⁴²⁾. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E ; appelons $\mathcal{N} = \mathcal{H} \cap u^{-1}(\{0\})$ le noyau ^(42bis) de la restriction de u à $\mathcal{H}$. Alors cette restriction se factorise en $\mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H}/\mathcal{N} \xrightarrow{u} F$, où u est linéaire continue injective, donc est une bijection de $\mathcal{H}/\mathcal{N}$ sur l'image $u(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}$ par u . Nous appellerons alors $u(\mathcal{H})$ le sous-espace hilbertien de F , obtenu en transportant sur $u(\mathcal{H})$ la structure hilbertienne de $\mathcal{H}/\mathcal{N}$ par la bijection u .

⁽⁴¹⁾ Voir Bourbaki [3], Chapitre VI, §1.

⁽⁴²⁾ Rappelons que, si E est métrisable, une application linéaire de E dans F , faiblement continue, est continue pour les topologies initiales (Bourbaki [1], Chapitre IV §4,n°2, corollaire de la Proposition 7). En particulier, la restriction de u à $\mathcal{H}$ est continue de $\mathcal{H}$ dans F .

^(42bis) Noyau veut dire ici: image réciproque de $\{0\}$, et n'a rien à voir avec les noyaux associés aux sous-espaces hilbertiens dans cet article!

On voit donc que la norme de $u(\mathcal{H})$ est simplement définie par :

$$(8,1) \quad \|k\|_{u(\mathcal{H})} = \inf_{\substack{h \in \mathcal{H} \\ u(h)=k}} \|h\|_{\mathcal{H}}$$

On peut encore dire que $u(\mathcal{H})$ est le plus petit sous-espace hilbertien de F (pour la relation d'ordre $\leq$) tel que u soit une application linéaire continue de norme ≤ 1 de $\mathcal{H}$ dans cet espace. En effet, si $\mathcal{M}$ est un sous-espace hilbertien de F contenant $u(\mathcal{H})$, et tel que $u: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$ soit de norme ≤ 1 , alors $u: \mathcal{H}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ est aussi de norme ≤ 1 , donc l'injection de $u(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{M}$ est de norme ≤ 1 , et $u(\mathcal{H}) \leq \mathcal{M}$. Nous avons d'ailleurs traité antérieurement divers exemples: dans la définition même de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ au §2, 2°, Φ est une application linéaire continue de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ dans E , et $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ n'est autre que l'image $\Phi(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ au sens ci-dessus. Il en est de même dans les Propositions 19 et 20: $\sum_{i \in I} \mathcal{H}_i = \Phi(\hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i)$, et

$$\int \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta) = \Phi \left(\int_{\mathcal{Z}}^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta) \right).$$

D'autre part, l'espace $\lambda \mathcal{H}$, $\lambda \geq 0$, défini au §2, 1°, n'est autre que l'image de $\mathcal{H}$ par l'homothétie $e \rightsquigarrow \sqrt{\lambda} e$ de E dans E .

Un autre cas important a été implicitement rencontré un grand nombre de fois. Supposons que E soit un sous-espace de F , muni d'une topologie telle que l'injection u de E dans F soit faiblement continue. Alors tout sous-espace hilbertien de E est a fortiori sous-espace hilbertien de F , ce qui revient à l'identifier à son image par u . Pour des sous-espaces hilbertiens de E , la multiplication par les scalaires ≥ 0 , l'addition, la relation d'ordre, dans E ou dans F , sont identiques; si $\mathcal{H} \geq \mathcal{H}_1$, la différence $\mathcal{H} - \mathcal{H}_1$ est la même dans E ou dans F (et même déjà dans $\mathcal{H}$).

Si maintenant u est anti-linéaire faiblement continue de E dans F , on définira $u(\mathcal{H})$ avec la structure hilbertienne "anti-transportée" de $\mathcal{H}/\mathcal{N}$ sur lui par u ;

$$(8,1 \text{ bis}) \quad (u(\alpha) | u(\beta))_{u(\mathcal{H})} = (\beta | \alpha)_{\mathcal{H}/\mathcal{N}}, \alpha \in \mathcal{H}/\mathcal{N}, \beta \in \mathcal{H}/\mathcal{N}$$

de sorte qu'on a encore (8,1).

Que u soit linéaire ou anti-linéaire, soit $\mathcal{N}$ l'orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}$. Alors la restriction de u à $\mathcal{N}$ est un isomorphisme (ou un anti-isomorphisme), et $u(\mathcal{H})$ a la structure transportée (ou anti-transportée) de celle de $\mathcal{H}$ par u . Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathcal{H}$ est égal à (ou conjugué de) celui de leurs images par u dans $u(\mathcal{H})$ toutes les fois que l'un deux est dans $\mathcal{N}$. On en déduit que la boule unité fermée (resp. ouverte) $u(\mathcal{H})$ est exactement l'image par u de la boule unité fermée (resp. ouverte) de $\mathcal{H}$. Si enfin E, F, G , sont 3 espaces vectoriels localement convexes quasi-complets, si u (resp. v) est une application linéaire ou anti-linéaire faiblement continue de E dans F (resp. de F dans G), on a, d'après (8,1), si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E :

$$(8,1\text{ter}) \quad (v \circ u)(\mathcal{H}) = v(u(\mathcal{H})).$$

Proposition 21. *Si u est une application linéaire ou anti-linéaire faiblement continue de E dans F , et si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , de noyau H , le noyau de $u(\mathcal{H})$ relativement à F est $u(H) = uHu^*$: $F' \xrightarrow{u^*} E' \xrightarrow{H} E \xrightarrow{u} F$. En outre l'ensemble des Hu^*f' , $f' \in F'$, est un sous-espace dense de $\mathcal{H}$, orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit d'abord u linéaire. Cherchons l'orthogonal de l'ensemble $Hu^*(F')$ des Hu^*f' dans $\mathcal{H}$. Soit h un élément de $\mathcal{H}$:

$$(8,2) \quad (h | Hu^*f')_{\mathcal{H}} = \langle h, {}^t u f' \rangle_{E, E'} \quad (\text{car } \overline{u^* f'} = {}^t u f') = \langle u h, f' \rangle_{F, F'};$$

donc h est orthogonal à $Hu^*(F')$, si et seulement si $uh = 0$, ou $h \in \mathcal{N}$: $\mathcal{N}$ est l'orthogonal cherché. Alors l'orthogonal $\mathcal{H}$ de $\mathcal{N}$ est bien l'adhérence dans $\mathcal{H}$ de l'ensemble $Hu^*(F')$.

Alors le produit scalaire $(h | Hu^*f')_{\mathcal{H}}$ est toujours égal à celui des images dans $u(\mathcal{H})$:

$$(8,3) \quad \langle u h, f' \rangle_{F, F'} = (h | Hu^*f')_{\mathcal{H}} = (u h | u Hu^*f')_{u(\mathcal{H})} \quad ,$$

ce qui prouve bien, d'après la Proposition 6 que uHu^* est le noyau de $u(\mathcal{H})$ dans F .

Si maintenant u est anti-linéaire, on aura le même résultat, mais avec la modification :

$$(8,4) \quad \langle uh, f' \rangle_{F, F'} = \overline{(h | \overline{H u^* f'})_{\mathcal{H}}} = (uh | u H u^* f')_{u(\mathcal{H})}.$$

Remarque. La Proposition 21 est en fait ce qui a servi de définition au noyau de $\mathcal{H}$ dans E . Le noyau de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ est l'isomorphisme canonique A de $\overline{\mathcal{H}'}$ sur $\mathcal{H}$; si j est l'injection de $\mathcal{H}$ dans E , alors le noyau de $\mathcal{H} = j(\mathcal{H})$ dans E est $j A j^*$ (formule (4,1)).

Exemple 1. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la transformation de Fourier ⁽⁴³⁾. On a ${}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}$, à cause de la symétrie de la fonction $(x, \xi) \rightsquigarrow \exp(-2i\pi\langle x, \xi \rangle)$. Supposons connue la formule de réciprocity $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I$ (qui entraîne la bijectivité de $\mathcal{F}$); on a donc aussi $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = I$. Le sous-espace hilbertien L^2 de $\mathcal{S}'$ a pour noyau l'identité I (plus exactement l'injection canonique de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$). L'image $\mathcal{F}(L^2)$ a donc pour noyau $\overline{\mathcal{F}}I\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}^* = I$; c'est L^2 lui-même. $\mathcal{F}$ étant injective, est donc une isométrie de L^2 sur L^2 : la formule de réciprocity, comme il est bien connu, a pour conséquence celle de Parseval-Plancherel.

Exemple 2. Soit $E = \mathcal{D}'(X)$, espace des distributions sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'(X)$, de noyau $H_{x,\xi} \in \mathcal{D}'(X \times X)$. Soit p une fonction complexe indéfiniment dérivable sur X . L'image $p\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ par la multiplication par p a pour noyau $p(x)\overline{p(\xi)}H_{x,\xi}$, définissant l'application $\phi \rightsquigarrow p(H \cdot \overline{p}\phi)$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$.

En effet la transposée de la multiplication par p est la multiplication par $\overline{p}$, donc son adjointe est la multiplication par $\overline{p}$; le noyau de $p\mathcal{H}$ est donc bien $\phi \rightsquigarrow p(H \cdot \overline{p}\phi)$ d'après la Proposition 21. Cela s'écrit $\phi \rightsquigarrow p(x) \int_x H_{x,\xi} \overline{p(\xi)} \phi(\xi) d\xi$, il est donc bien défini par la distribution $p(x)\overline{p(\xi)}H_{x,\xi}$.

Exemple 3. Reprenons la situation de l'exemple 2. Soit D^p une dérivation partielle d'indice $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. (Pas de rapport entre ce p et le

⁽⁴³⁾ Voir Schwartz [1], Chapitre VII.

précédent!). Sa transposée et son adjointe sont égales à $(-1)^{|p|} D^p$. L'image $D^p \mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ par D^p a donc pour noyau $\phi \rightsquigarrow (-1)^{|p|} D^p (H \cdot D^p \phi) = (1)^{|p|} D_x^p \int_x H_{x,\xi} D_\xi^p \phi(\xi) d\xi$, défini par la distribution $D_x^p D_\xi^p H_{x,\xi}$.

Plus généralement, si D est un opérateur différentiel à coefficients C^∞ , de la forme

$$(8,4 \text{ bis}) \quad DT = \sum_{|p| \leq m} a_p(x) D^p T_x,$$

son conjugué, son transposé, son adjoint sont donnés par

$$(8,4 \text{ ter}) \quad \begin{aligned} \bar{D}T &= \sum_{|p| \leq m} \bar{a}_p D^p T \\ {}^tDT &= \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_p T) \\ D^*T &= \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (\bar{a}_p T) \end{aligned}$$

Alors l'image $D\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ par D a son noyau défini par $\phi \rightsquigarrow D(H \cdot D^* \phi)$ donc par la distribution $D_x \bar{D}_\xi H_{x,\xi}$.

Si on applique le Corollaire 2 que nous verrons plus loin, on a $D\mathcal{H} = 0$ si et seulement si $D_x H_{x,\xi} = 0$ ou $\bar{D}_\xi H_{x,\xi} = 0$.

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace hilbertien de F , de noyau M . Pour que $u(\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}$ (resp. $u(\mathcal{H}) \supset \mathcal{M}$), il faut et il suffit qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que:*

$$(8,5) \quad uHu^* \leq cM \text{ (resp. } M \leq cuHu^* \text{)}.$$

Il suffit en effet d'appliquer la Proposition 15.

Corollaire 2. *On a $u(\mathcal{H}) = \{0\}$ (ou $\mathcal{H} \subset u^{-1}(\{0\})$) si et seulement si $uH = 0$ (ou $Hu^* = 0$).*

En effet, $u(\mathcal{H}) = 0$ équivaut à $\mathcal{H} = \{0\}$, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}$. Comme $Hu^*(F')$ est dense dans $\mathcal{H}$ cela équivaut à $Hu^* = 0$, ou $uH = 0$ par passage aux adjoints ($H^* = H$).

Corollaire 3. *Soit G un sous-espace vectoriel dense de E , muni d'une topologie localement convexe quasi-complète telle que l'injection u de G dans E soit faiblement continue. Alors E' s'identifie à un sous-espace faiblement dense de G' , avec une injection u^* faiblement continue. Pour qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E soit sous-espace hilbertien de G , il faut et il suffit que son noyau H relatif à E se prolonge en une application linéaire $\hat{H} \geq 0$ faiblement continue de G' dans G . Il est inutile de supposer $\hat{H} \geq 0$ si tout point de G' est faiblement adhérent à une partie G' -bornée de E' (ce qui se produit toujours si G est un Banach réflexif).*

Démonstration. Puisque u est injective, $u^*(\bar{E}')$ est faiblement dense dans G' , et, puisque $u(G)$ est dense dans E , u^* est injective; donc u^* est bien une injection faiblement continue permettant d'identifier $\bar{E}'$ à un sous-espace faiblement dense de $\bar{G}'$. Il est alors équivalent de dire que H se prolonge en un noyau ≥ 0 $\hat{H}: \bar{G}' \rightarrow G$, c. à d. que $H = uHu^*: \bar{E}' \xrightarrow{u^*} \bar{G}' \xrightarrow{H} G \xrightarrow{u} E$, ou de dire que $\mathcal{H} = u(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ étant le sous-espace hilbertien de G de noyau H .

Supposons maintenant que H se prolonge en un noyau $\hat{H} = \bar{G}' \rightarrow G$, mais qu'on ne sache pas que $\hat{H} \geq 0$. Par contre, nous supposons tout point g' de G' faiblement adhérent à une partie $A_{g'}$, G' -bornée dans E' ; nous devons montrer que $\mathcal{H}$ est encore un sous-espace hilbertien de G . Soit $\mathcal{H}_0 = H(\bar{E}') \subset G$. Montrons que l'injection de $\mathcal{H}_0$ dans G est continue. Soit $B_0 = \{H\bar{e}'; e' \in E', \langle H\bar{e}', e' \rangle \leq 1\}$ la boule unité de $\mathcal{H}_0$; nous devons montrer que B_0 est faiblement bornée dans G , c. à d. que, pour tout $g' \in G'$:

$$(8,6) \quad \sup_{e' \in E', \langle H\bar{e}', e' \rangle \leq 1} |\langle H\bar{e}', g' \rangle| < + \infty.$$

Comme g' est faiblement adhérent à $A_{g'}$, et que $H\bar{e}' \in G$, on a:

$$(8,7) \quad |\langle H\bar{e}', g' \rangle| \leq \sup_{f' \in A_{g'}} |\langle H\bar{e}', f' \rangle| \leq \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \sup_{f' \in A_{g'}} \langle Hf', f' \rangle^{1/2}$$

de sorte que finalement il suffit de montrer que, pour tout $g' \in G'$:

$$(8,8) \quad \sup_{f' \in A_{g'}} \langle Hf', f' \rangle < + \infty;$$

ce qui est évident puisque f' parcourt A_g' , bornée dans G' et que Hf' parcourt $\hat{H}(\bar{A}_g)$ bornée dans G . Alors l'injection $\mathcal{H}_0 \rightarrow E$ se factorise en injections continues $\mathcal{H}_0 \rightarrow G \rightarrow E$; par prolongement aux quasi-complétés, $\hat{\mathcal{H}}_0 \rightarrow E$ se factorise en $\hat{\mathcal{H}}_0 \rightarrow G \rightarrow E$, et $\mathcal{H}$, image de $\hat{\mathcal{H}}_0$ dans E , est bien sous-espace hilbertien de G .

La condition relative à G' et E' se réalise toujours si G est un Banach réflexif, ou plus généralement un dual de Fréchet réflexif. Car alors G' fort est un Fréchet de dual G , E' est fortement dense dans G' , et tout point de G' est limite dans G' d'une suite d'éléments de E' .

Remarque 1. En fait, si l'on sait que $\hat{H} \geq 0$, il y a, pour le Corollaire 3, une démonstration directe triviale. Si $\mathcal{H} \subset E$ est sous-espace hilbertien de G , il a un noyau $\hat{H}: \bar{G}' \rightarrow G$; la relation caractéristique (4,2) montre que son noyau $H: \bar{E}' \rightarrow E$, est la restriction de $\hat{H}$. Inversement, si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , et si son noyau $H = \bar{E}' \rightarrow E$ se prolonge en un noyau $\geq 0, \hat{H}: \bar{G}' \rightarrow G$, alors $\hat{H}$ est le noyau relatif à G d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{L}$ de G ; le noyau de $\mathcal{L}$ dans E est la restriction de $\hat{H}$, d'après l'assertion qui précède, donc c'est H , et par suite $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, qui est donc bien sous-espace hilbertien de G .

Remarque 2. Nous avons distingué H et son prolongement $\hat{H}$. Dans la pratique, on appelle généralement encore H le noyau prolongé $\bar{G}' \rightarrow G$.

Exemple. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'$, espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$. Son noyau $H_{x,\xi}$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (Exemple 3 page 149). Pour que $\mathcal{H}$ soit sous-espace hilbertien de l'un des espaces $E = \mathcal{D}, \mathcal{E}', \mathcal{E}, \mathcal{S}', \mathcal{S}, \mathcal{O}'_M, \mathcal{O}_M, \mathcal{O}'_C, \mathcal{O}_C$, il faut et il suffit que $H_{x,\xi}$ appartienne à $E_x \hat{\otimes}_\xi E_\xi$ et soit ≥ 0 dans cet espace; mais cette positivité est automatique, d'après le critère du Corollaire 3, car tout élément T de E' est adhérent à une partie E' -bornée de $\mathcal{D}$. [Soit $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \dots$, une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ ayant la propriété suivante: pour tout $p, \mathcal{D}^p(\alpha_\nu - 1)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ pour $\nu \rightarrow +\infty$, en restant bornée sur $\mathbb{R}^n$. Soit ρ_μ une suite de fonctions ≥ 0 de $\mathcal{D}$, de supports tendant vers l'origine, avec $\int \rho_\mu = 1$. Alors, dans E' , $T = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu(\rho_\mu * T))$, et l'ensemble des $\alpha_\nu(\rho_\mu * T) \in \mathcal{D}$ est borné dans E'].

Corollaire 4. *L'application $\mathcal{H} \rightarrow u(\mathcal{H})$ de $\text{Hilb}(E)$ dans $\text{Hilb}(F)$, définie par une application linéaire ou anti-linéaire continue u de E dans F , est un homomorphisme pour la multiplication par les réels ≥ 0 , l'addition, et la relation d'ordre:*

$$(8,9) \quad \begin{aligned} u(\lambda \mathcal{H}) &= \lambda u(\mathcal{H}); \\ u(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) &= u(\mathcal{H}_1) + u(\mathcal{H}_2); \\ \mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2 &\Rightarrow u(\mathcal{H}_1) \leq u(\mathcal{H}_2) . \end{aligned}$$

Démonstration. C'est facile à voir directement mais encore plus facile en remarquant que $H \rightarrow uHu^*$ est un homomorphisme pour les structures correspondantes de $\mathcal{L}^+(E)$ et $\mathcal{L}^+(F)$.

Corollaire 5. *Soit E un espace hilbertien, $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , H son noyau: $E \rightarrow \mathcal{H}$ (Exemple 4, p. 150). Alors $\mathcal{H}$ est l'image $\sqrt{H}E$ de E par $\sqrt{H}$.*

Démonstration. $\sqrt{H}$ est son propre adjoint. Le noyau de E dans lui-même étant l'identité I , celui de $\sqrt{H}E$ est, d'après la Proposition 21, $\sqrt{H}I\sqrt{H} = H$; on a donc bien $\sqrt{H}E = \mathcal{H}$.

Ceci donne, dans le cas où E est hilbertien, une construction directe de $\mathcal{H}$ à partir de H . $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $\sqrt{H}\xi$, $\xi \in E$, et l'on a:

$$(8,9 \text{ bis}) \quad \|\eta\|_{\mathcal{H}} = \inf_{\sqrt{H}\xi = \eta} \|\xi\| .$$

Transport de structure.

Soit u un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) faible de E sur F . Il définit automatiquement, par transport (resp. anti-transport) de structure:

- a) un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) faible de $\bar{E}$ sur $\bar{F}$, qui n'est autre que $\bar{u}$, mais qu'on notera encore u ; de sorte que $u\bar{e} = \overline{ue}$.
- b) un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) faible de $\bar{E}'$ sur $\bar{F}'$, qui n'est autre que $(u^*)^{-1}$, mais qu'on notera encore u :

$$(8,10) \quad \langle u\bar{e}', u\bar{e} \rangle = \langle \bar{e}', \bar{e} \rangle \text{ (resp. } \langle \overline{\bar{e}'}, \overline{\bar{e}} \rangle \text{)};$$

c) un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) de $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ sur $\mathcal{L}(F'; F)$ munis de la topologie de la convergence simple faible, qui n'est autre que $H \rightsquigarrow uHu^*$, mais qu'on notera encore $u: H \rightsquigarrow u(H)$

$$(8,11) \quad u(H)(u(\bar{e}')) = u(H\bar{e}') \quad .$$

Enfin, si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , $u(\mathcal{H})$ est un sous-espace hilbertien de F défini comme l'image de $\mathcal{H}$ par u avec transport (resp. anti-transport) du produit scalaire:

$$(8,12) \quad (uk | uk)_{u(\mathcal{H})} = (h | k)_{\mathcal{H}} \text{ (resp. } \overline{(h | k)}_{\mathcal{H}}) \\ \| uh \|_{u(\mathcal{H})} = \| h \|_{\mathcal{H}} \quad .$$

Alors, par suite du caractère intrinsèque de la définition du noyau H d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E , le transport de structure montre que le noyau de $u(\mathcal{H})$ dans $u(F)$ est $u(H)$; c'est un cas particulier de la Proposition 21, puisque $u(H) = uHu^*$.

Supposons par exemple $F = E$, u étant la conjugaison. Alors $\bar{F} = E$, avec l'application réciproque de la conjugaison. On a: $ue = \bar{e}$, $u\bar{e} = e$, $ue' = \bar{e}'$, $u\bar{e}' = e'$; finalement (8, 11) donne $u(H) \cdot e' = \overline{H\bar{e}'} = \bar{H}e'$ ou $u(H) = \bar{H}$. Si alors $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , de noyau H , son conjugué $\bar{\mathcal{H}}$ (avec transport de la norme) a pour noyau $\bar{H}$.

Invariance par un automorphisme. Si en particulier $F = E$, u devient un automorphisme (resp. anti-automorphisme) faible de E . On dira que $\mathcal{H}$ est invariant par u si $u(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$; cela veut dire que u est un opérateur unitaire (resp. anti-unitaire) de $\mathcal{H}$; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le noyau H soit invariant par u , c. à d. que $u(H) = H$, ou $uHu^* = H$, ou $uHu^{-1} = H$, ou $Hu = uH$ (comme applications de $\bar{E}'$ dans E). Si on suppose que u parcourt un groupe G d'automorphismes faibles de E , et si $\mathcal{H}$ est invariant par G , on a une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$; pour que $\mathcal{H}$ soit invariant par G , il faut et il suffit que son noyau H soit invariant par G ; les noyaux invariants par G forment un sous-cône convexe de $\mathcal{L}^+(\bar{E}', E)$, fermé pour la topologie de la convergence simple faible. Ce sont des propriétés que nous avons sys-

tématiquement appliquées pour l'étude des particules élémentaires relativistes en mécanique quantique (liées à des représentations unitaires irréductibles du groupe de Lorentz inhomogène). Dans le même ordre d'idées, supposons E muni d'une anti-involution. Alors un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E est invariant par cette anti-involution ($\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, avec transport des normes), si et seulement si H est invariant, $\overline{H} = H$.

Multiplication des espaces de mesures.

Proposition 22. Soit μ une mesure de Radon ≥ 0 sur un espace localement compact X , et soit p une fonction complexe, localement de carré μ -intégrable. Alors l'image $p\Lambda^2(X, \mu)$ de $\Lambda^2(X, \mu)$ par la multiplication par p est $\Lambda^2(X, |p|^2\mu)$, et son noyau dans $\mathcal{D}'_c(X)$ (espace des mesures sur X) est $\phi \rightsquigarrow \phi |p|^2\mu$. Si p est partout $\neq 0$, la multiplication par p est une isométrie de $\Lambda^2(X, \mu)$ sur $\Lambda^2(X, |p|^2\mu)$; en outre ce dernier est l'espace des mesures de la forme $h\mu$, $h/p \in L^2(X, \mu)$, avec

$$(8,13) \quad \|h\mu\|_{\Lambda^2(X, |p|^2\mu)} = \left\| \frac{h}{p} \right\|_{L^2(X, \mu)} .$$

Démonstration. On ne peut pas utiliser l'Exemple 2, pages 177, parce que p , non nécessairement continue, n'opère pas par multiplication sur $\mathcal{D}'^0(X)$.

1°) Soit σ une mesure de $\Lambda^2(X, \mu)$; $\sigma = f\mu$, $f \in L^2(X, \mu)$, et

$$(8,14) \quad \|\sigma\|_{\Lambda^2(X, \mu)} = \|f\|_{L^2(X, \mu)} .$$

Comme p est localement de carré μ -intégrable ainsi que f , pf est localement μ -intégrable, donc $\tau = p\sigma = pf\mu$ est une mesure. Appelons g une fonction μ -mesurable telle que $pf = g|p|^2$; g est bien déterminée sur l'ensemble $Y = \{x \in X, p(x) \neq 0\}$, et mesurable arbitraire sur $\mathbb{C}Y$. On voit que g est de carré $|p|^2\mu$ -intégrable:

$$(8,15) \quad \begin{aligned} \|f\|_{L^2(X, \mu)}^2 &= \int_X |f|^2 d\mu \geq \int_Y |f|^2 d\mu \\ &= \int_Y |g|^2 |p|^2 d\mu = \int_X |g|^2 |p|^2 d\mu = \|g\|_{L^2(X, |p|^2\mu)}^2 \end{aligned}$$

Comme $\tau = g(|p|^2\mu)$, on a bien $p\sigma = t \in \Lambda^2(X, |p|^2\mu)$. (8,15) s'écrit :

$$(8,16) \quad \|p\sigma\|_{\Lambda^2(X, |p|^2\mu)} \leq \| \sigma \|_{\Lambda^2(X, \mu)}.$$

2°) Inversement, soit $\tau \in \Lambda^2(X, |p|^2\mu)$; on a

$$\tau = g |p|^2\mu,$$

et

$$(8,17) \quad \| \tau \|_{\Lambda^2(X, |p|^2\mu)} = \| g \|_{L^2(X, |p|^2\mu)}.$$

On peut trouver des fonctions μ -mesurables f telles que $pf = g |p|^2$; elles sont bien déterminées sur Y , mesurables arbitraires sur $\mathbf{C}Y$. Alors, pour toutes ces f , $\int_Y |f|^2 d\mu < +\infty$; si on choisit f sur $\mathbf{C}_X Y$ de manière que $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$, on aura $\sigma = f\mu \in \Lambda^2(X, \mu)$, et $\tau = p\sigma$. Donc on a bien $\tau \in p\Lambda^2(X, \mu)$. En outre, l'inégalité (8,15) est une égalité si on choisit $f = 0$ sur $\mathbf{C}Y$. (8,15) devient alors :

$$(8,18) \quad \| \tau \|_{\Lambda^2(X, |p|^2\mu)} = \inf_{p\sigma = \tau} \| \sigma \|_{\Lambda^2(X, \mu)}$$

1°) et 2°) montrent bien que $p\Lambda^2(X, \mu) = \Lambda^2(X, |p|^2\mu)$.

3°) On peut le redémontrer par la Proposition 21. L'application $\sigma \rightsquigarrow p\sigma$ est linéaire continue de $\Lambda^2(X, \mu)$ dans $\mathcal{D}'^0(X)$. Pour le voir, il suffit de montrer qu'elle est faiblement continue; or, si $f\mu$ converge vers 0 faiblement dans $\Lambda^2(X, \mu)$, $pf\mu$ converge vers 0 faiblement dans $\mathcal{D}'^0(X)$, à cause de

$$(8,19) \quad \langle pf\mu, \phi \rangle_{\mathcal{D}'^0, \mathcal{D}} = \langle f\mu, p\phi\mu \rangle_{\Lambda^2(\mu), (\Lambda^2(\mu))} = \int_X f p\phi d\mu .$$

(Formule (1,2 quarto)).

Cela prouve en même temps que la transposée de l'application $f\mu \rightsquigarrow pf\mu$ de $\Lambda^2(X, \mu)$ dans $\mathcal{D}'^0(X)$ est l'application $\phi \rightsquigarrow p\phi\mu$ de $\mathcal{D}^0(X)$ dans $\Lambda^2(X, \mu)$, identifié à son dual. Alors l'adjointe de $f(\mu) \rightsquigarrow pf\mu$ est $\bar{\phi} \rightsquigarrow \bar{p}\bar{\phi}\mu$ ou $\phi \rightsquigarrow \bar{p}\phi\mu$.

Appliquons alors la Proposition 21. Le noyau de $\Lambda^2(X, \mu)$ par rapport à lui-même est l'identité (en identifiant $(\Lambda^2)'$ à Λ^2). Donc le noyau de l'image $p\Lambda^2(X, \mu)$ dans $\mathcal{D}'_c(X)$ est $\phi \rightsquigarrow p\bar{p}\phi\mu = |p|^2\phi\mu$. C'est aussi le noyau de $\Lambda^2(X, |p|^2\mu)$ (Exemple 1^{er} page 148), ce qui montre bien l'identité de ces deux espaces.

4°) Les résultats relatifs au cas où p est partout $\neq 0$ sont évidents, parce que (8,15) devient une égalité. Pour $\tau \in p\Lambda^2(X, \mu)$, $\tau = p\sigma = pf\mu$, on pose $\tau = h\mu$, $h = pf$, on a bien $h/p = f \in L^2(X, \mu)$, et vice versa; en outre

$$(8,20) \quad \|\tau\|_{p\Lambda^2(X, \mu)} = \|\sigma\|_{\Lambda^2(X, \mu)} = \|f\|_{L^2(X, \mu)} = \|h/p\|_{L^2(X, \mu)}$$

ce qui est (8,16).

Remarque. Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et si $d\mu = dx$, on identifie généralement f et fdx , $L^2(X, dx)$ et $\Lambda^2(X, dx)$. Alors pL^2 est l'espace $\Lambda^2(X, |p|^2dx)$, son noyau dans $\mathcal{D}'(X)$ est $\phi \rightsquigarrow |p|^2\phi$ (comme application linéaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$). Si p est partout $\neq 0$, pL^2 est l'espace des fonctions h telles que $\frac{h}{p} \in L^2$, avec

$$(8,21) \quad \|h\|_{pL^2} = \left\| \frac{h}{p} \right\|_{L^2}.$$

Expression de relations d'inclusions par des majorations.

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ des sous-espaces hilbertiens de E . La relation d'inclusion $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$ (qui exprime, comme nous l'avons vu page 136, que $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ et que la boule unité de $\mathcal{H}$ est continue dans la boule unité de $\mathcal{K}$) s'exprime, d'après la Proposition 13, par l'inégalité entre noyaux $H \leq K$, ou encore: pour tout $e' \in E'$, $\langle He', e' \rangle \leq \langle Ke', e' \rangle$. Soient maintenant u et v des applications linéaires faiblement continues de E dans E ; u^* et v^* sont alors faiblement continues de E' dans E' .

La relation d'inclusion $u(\mathcal{H}) \leq v(\mathcal{K})$, qui exprime que $u(\mathcal{H}) \subset v(\mathcal{K})$ et que l'image par u de la boule unité de $\mathcal{H}$ est contenue dans l'image par v de la boule unité de $\mathcal{K}$, s'exprimera par l'inégalité entre noyaux:

$$(8,22) \quad \left\{ \begin{array}{l} uHu^* \leq vKv^*, \text{ ou encore: pour tout } e' \in E', \\ \langle uHu^*\bar{e}', e' \rangle \leq \langle vKv^*e', e' \rangle, \text{ ou} \\ (Hu^*\bar{e}' | u^*\bar{e}')_{E, \bar{E}'} \leq (Kv^*\bar{e}' | v^*\bar{e}')_{E, \bar{E}'}, \text{ ou, d'après (4,3):} \\ \|Hu^*\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} \leq \|Kv^*\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} \end{array} \right.$$

Il est commode de faire intervenir u, v , au lieu de u^*, v^* ; on utilise alors (4,7), qui donne:

$$(8,23) \quad \|Hu^*\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} = \sup_{f' \in F'} \frac{|\langle Hu^*\bar{e}', f' \rangle|}{\langle Hf', f' \rangle^{1/2}} = \sup_{f' \in E'} \frac{|\langle uHf', e' \rangle|}{\langle Hf', f' \rangle^{1/2}}$$

de sorte qu'on aura $u(\mathcal{H}) \leq v(\mathcal{H})$, si et seulement si, pour tout $e \in E'$:

$$(8,24) \quad \sup_{f' \in E'} \frac{|\langle uHf', e' \rangle|}{\langle Hf', f' \rangle^{1/2}} \leq \sup_{f' \in E'} \frac{|\langle vKf', e' \rangle|}{\langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}}.$$

Nous nous bornerons à $v = \text{identité}$; alors on a intérêt à garder le 2ème membre sous la forme $\|K\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} = \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}$

Mais nous considérerons successivement $\leq$ et $\geq$. Alors:

Proposition 22 bis.

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux sous-espaces hilbertiens de E , et soit u une application linéaire continue de E dans E .

1°) La condition nécessaire et suffisante pour que $u(\mathcal{H}) \leq \mathcal{H}'$ est que, pour tout $e' \in E', f' \in F'$, on ait:

$$(8,25) \quad |\langle uHf', e' \rangle_{E, E'}| \leq \langle Hf', f' \rangle^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}.$$

Cette condition est vérifiée si, pour tout $e' \in E'$, on a:

$$(8,26) \quad |\langle uH\bar{e}', e' \rangle_{E, E'}| \leq \frac{1}{2} \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}$$

2°) La condition nécessaire et suffisante pour que $u(\mathcal{H}) \geq \mathcal{H}'$ est que, pour tout $e' \in E'$, on ait:

$$(8,27) \quad \sup_{f' \in E'} \frac{|\langle uHf', e' \rangle_{E, E'}|}{\langle Hf', f' \rangle^{1/2}} \geq \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}$$

Cette condition est vérifiée si, pour tout $e' \in E'$, on a :

$$(8,28) \quad |\langle uH\bar{e}', e' \rangle_{E,E'}| \cong \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2} .$$

Tout résulte de ce qui précède; l'implication (8,28) $\Rightarrow$ (8,27) est triviale tandis que (8,26) $\Rightarrow$ (8,25) a été vue page 158.

La relation (8,28), remplacée même généralement par la relation encore plus forte :

$$(8,29); \quad \operatorname{Re} \langle uH\bar{e}', e' \rangle_{E,E} \cong \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}$$

est d'un type connu sous le nom de relation de coercivité.

Les foncteurs Hilb et $\mathcal{L}^+$ et leur isomorphisme.

Appelons *cône convexe* un ensemble Γ , muni des structures suivantes :

1°) une loi de multiplication par les scalaires ≥ 0 : $(\lambda, \xi) \rightsquigarrow \lambda\xi$, application de $\mathbb{R}_+ \times \Gamma$ dans Γ , avec les propriétés: $1\xi = \xi$, $(\lambda\mu)\xi = \lambda(\mu\xi)$.

2°) une loi d'addition, $(\xi, \eta) \rightsquigarrow \xi + \eta$, application de $\Gamma \times \Gamma$ dans Γ , associative, commutative, munie d'un élément neutre 0.

On suppose en outre ces deux lois reliées par les propriétés suivantes $(\lambda + \mu)\xi = \lambda\xi + \mu\xi$, $\lambda(\xi + \eta) = \lambda\xi + \lambda\eta$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition), $0\xi = \lambda 0 = 0$.

On dit que le cône est saillant ou strictement convexe, si $\xi + \eta = 0$ implique $\xi = \eta = 0$. On dit qu'il est régulier si $\xi + \zeta = \eta + \zeta$ implique $\xi = \eta$. Un cône convexe saillant d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (voir page 137) satisfait à toutes ces propriétés; et c'est essentiellement le seul cas, car à tout cône convexe saillant régulier Γ on peut associer, d'une manière unique à un isomorphisme près, un espace vectoriel G , tel que Γ soit un cône convexe saillant de G et engendre G (un élément de G est une classe d'équivalence de $\Gamma \times \Gamma$, avec $(\xi, \xi') \sim (\eta, \eta')$ si $\xi + \eta' = \xi' + \eta$; la classe de (ξ, ξ') deviendra la différence $\xi - \xi'$ dans l'espace vectoriel G).

Sur un cône convexe saillant Γ , on définit canoniquement une relation d'ordre par $\xi \leq \eta$ s'il existe $\zeta \in \Gamma$ (nécessairement unique) tel que $\eta = \xi + \zeta$. Alors, $\xi \leq \xi'$, $\eta \leq \eta'$ implique $\xi + \eta \leq \xi' + \eta'$, $\xi \leq \eta$ est équivalent à

$\xi + \zeta \leq \eta + \zeta, \xi \leq \eta$ implique $\lambda \xi \leq \lambda \eta$, et, pour $\xi \neq 0$, $\lambda \xi \leq \xi$ est équivalent à $\lambda \leq 1$.

Si G est l'espace vectoriel engendré par Γ , G est un espace vectoriel ordonné, où Γ est le cône des éléments ≥ 0 .

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{C}$, localement convexes séparés quasi-complets, les morphismes étant les applications linéaires continues. Soit $\mathcal{G}$ la catégorie des cônes convexes saillants réguliers les morphismes étant les applications qui préservent la multiplication par les scalaires ≥ 0 et l'addition, donc aussi la relation d'ordre.

Alors $\text{Hilb}: E \rightsquigarrow \text{Hilb}(E)$ est un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{E}$ dans la catégorie $\mathcal{G}$, si l'on convient qu'à un morphisme $u: E \rightarrow F$, on associe le morphisme $\mathcal{H} \rightsquigarrow u(\mathcal{H}): \text{Hilb}(E) \rightarrow \text{Hilb}(F)$.

D'autre part, $\mathcal{L}^+: E \rightarrow \mathcal{L}^+(E) = \mathcal{L}^+(\bar{E}'; E)$ est un autre foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{E}$ dans la catégorie $\mathcal{G}$, si l'on convient qu'à un morphisme $u: E \rightarrow F$, on associe le morphisme $H \rightsquigarrow uHu^*: \mathcal{L}^+(E) \rightarrow \mathcal{L}^+(F)$.

Enfin les différentes propositions des paragraphes précédents montrent que ces deux foncteurs Hilb et $\mathcal{L}^+$ sont isomorphes, l'isomorphisme étant l'application canonique $\text{Hilb}E \rightarrow \mathcal{L}^+(E)$, pour $E \in \mathcal{E}$.

On peut naturellement introduire l'espace vectoriel engendré par $\text{Hilb}(E)$ (ensemble des classes de différences formelles de sous-espaces hilbertiens de E); il est isomorphe au sous-espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ engendré par les noyaux positifs. Nous l'étudierons ultérieurement (§12).

§9. Espaces de fonctions sur un ensemble X . Noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman.

Soit X un ensemble, et $E = \mathbb{C}^X$ l'espace des fonctions complexes sur X , muni de la topologie de la convergence simple. Le dual $E' = (\mathbb{C}^X)'$ est l'espace des mesures à support fini sur X ; une telle mesure est de la forme $\mu = \sum_{x \in X} c_x \delta_{(x)}$ où $\delta_{(x)}$ est la mesure de Dirac du point x , et où les $c_x \in \mathbb{C}$, sauf un nombre fini, sont nuls; on a, pour $f \in \mathbb{C}^X$:

$$(9,1) \quad \langle \mu, f \rangle = \sum c_x f(x).$$

Soit γ une forme linéaire sur $(\mathbb{C}^X)'$; on peut poser $g(x) = \langle \gamma, \delta_{(x)} \rangle$, et alors g est une fonction sur X , donc un élément de $\mathbb{C}^X$, on a $\langle \gamma, \mu \rangle = \sum_{x \in X} c_x g(x) = \langle \mu, g \rangle$ si $\mu = \sum_{x \in X} c_x \gamma_{(x)}$. Ainsi toute forme linéaire sur E' est faiblement continue et par suite aussi toute application linéaire de E' dans un espace vectoriel topologique.

Naturellement E et E' sont munis d'anti-involutions contragrédientes, définies par la conjugaison complexe $f \rightsquigarrow \bar{f}$, $\mu \rightsquigarrow \bar{\mu}$.

Proposition 23. Soit H un noyau relatif à $E = \mathbb{C}^X$; on appelle noyau reproduisant associé A la fonction sur $X \times X$ définie par:

$$(9,2) \quad A(x, \xi) = \langle H\delta_{(\xi)}; \delta_{(x)} \rangle, \quad x \in X, \xi \in X.$$

Alors $H \rightsquigarrow A$ est un isomorphisme de l'espace $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ des noyaux relatifs à E , muni de la topologie de la convergence simple faible, sur l'espace $\mathbb{C}^{X \times X}$ des fonctions complexes sur $X \times X$, muni de la topologie de la convergence simple. H est défini à partir de A par

$$(9,3) \quad \begin{cases} \langle H\bar{v}, \mu \rangle = \sum_{(x, \xi) \in X \times X} c_x \bar{d}_\xi A(x, \xi) \\ \text{pour } \mu = \sum_{x \in X} c_x \delta_{(x)}, \quad v = \sum_{\xi \in X} d_\xi \delta_{(\xi)}; \end{cases}$$

Hv est la fonction $x \rightsquigarrow \sum_{\xi \in X} d_\xi A(x, \xi)$; en particulier $H\delta_{(\xi)}$ est la fonction $A(, \xi): x \rightsquigarrow A(x, \xi)$; et le noyau reproduisant associé à H^* est le symétrique conjugué ${}^s\bar{A}$ défini par:

$$(9,4) \quad {}^s\bar{A}(x, \xi) = \overline{A(\xi, x)};$$

H est hermitien (i.e. $H^* = H$) si et seulement si ${}^s\bar{A} = A$ ou

$$(9,5) \quad A(x, \xi) = \overline{A(\xi, x)}.$$

H est ≥ 0 si et seulement si A est "de type positif":

$$(9,6) \quad \forall \mu = \sum_{x \in X} c_x \delta_{(x)}, \quad \sum_{x, \xi} c_x \bar{c}_\xi A(x, \xi) \geq 0.$$

Démonstration. Cette proposition est évidente. (9,2) définit A à partir de H ; (9,3) et ce qui suit définit H à partir de A , et H est sûrement faiblement continue d'après ce qui a été dit avant l'énoncé de la proposition. (9,4) est évident à partir de (9,2), donc aussi (9,5). (9,6) traduit exactement la positivité de $H: \forall \mu \in (\mathbb{C}^X)', \langle H\bar{\mu}, \mu \rangle \geq 0$.

Corollaire. Il existe un isomorphisme entre l'ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{C}^X)$ des sous-espaces hilbertiens de $\mathbb{C}^X$ (muni des structures définies au §2) et le cône convexe saillant de $\mathbb{C}^{X \times X}$ formé des fonctions de type positif. La fonction A sur $X \times X$ associée au sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^X$ est caractérisée par:

$$(9,10) \quad \forall h \in \mathcal{H}, \forall x \in X, (h | A(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = h(x)$$

En particulier:

$$(9,11)_i \quad \begin{cases} \forall x \in X, \forall \xi \in X, (A(\cdot, \xi) | A(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = A(x, \xi) \\ \|A(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}^2 = A(x, x); \text{ et} \end{cases}$$

$$(9,11 \text{ bis}) \quad |h(x)| \leq \|h\| (A(x, x))^{1/2}.$$

Démonstration. (9,10) est (4,2) appliquée à $e' = \delta_{(x)}$; réciproquement de (9,10) on déduit (4,2) en prenant la combinaison $e' = \mu = \sum_{x \in X} c_x \delta_{(x)}$. De (9,10) on déduit (9,11) en prenant $h = A(\cdot, \xi)$. (9,11 bis) est l'inégalité de Schwarz appliquée à (9,10) en tenant compte de (9,11). C'est Bergman qui a le premier introduit le noyau A , notamment dans la théorie des fonctions analytiques et harmoniques; Aronszajn l'a étudié dans toute sa généralité pour tous les espaces hilbertiens de fonctions sur un ensemble X . Il a appelé A le noyau reproduisant, à cause de (9,10). Il a démontré le présent corollaire c. à d. le théorème d'isomorphisme du §6 pour le cas particulier $E = \mathbb{C}^X$. Ce cas $E = \mathbb{C}^X$ est apparemment bien plus particulier que le nôtre. Mais comme tout espace vectoriel localement convexe E est un sous-espace de l'espace $\mathbb{C}^{E'}$ des fonctions complexes sur E' et a une topologie plus fine que celle de la convergence simple sur E' (qui est la topologie affaiblie de E), tout sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E est a fortiori sous-espace hilbertien de

$\mathbb{C}^{E'}$! On pourrait donc, de cette manière, déduire beaucoup des propositions antérieures (notamment la théorème d'isomorphisme) de celles d'Aronszajn, moyennant un complément permettant de passer de $\mathbb{C}^{E'}$ au sous-espace E (et devant utiliser inévitablement le caractère quasi-complet de E). Ce complément est, essentiellement, la Proposition 0: tout sous-espace hilbertien de $\mathbb{C}^{E'}$ ayant un sous-espace dense dans E , est sous-espace hilbertien de E . Nous aurions donc pu raccourcir l'exposé en supposant connue la théorie de Bergman-Aronszajn et en l'appliquant telle quelle. Si nous ne l'avons pas fait c'est que les résultats sont *aussi faciles et même souvent plus faciles* à démontrer *directement* pour E quelconque, que pour le cas particulier $E = \mathbb{C}^X$. La positivité: $\langle He', e' \rangle \geq 0$ est plus simple que $\sum c_x \bar{c}_x A(x, \xi) \geq 0$.

Proposition 24. *Soit X un espace topologique localement compact. Soit $\mathcal{E}^0(X) \subset \mathbb{C}^X$ l'espace des fonctions complexes continues sur X , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact; son dual $\mathcal{E}'^0(X)$ est l'espace des mesures de Radon à support compact sur X . Soient $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathbb{C}^X$, A son noyau reproduisant d'Aronszajn. Pour que $\mathcal{H}$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^0(X)$, il faut et il suffit que A soit séparément continu sur $X \times X$, et localement borné. Dans ce cas, son noyau H relatif à $\mathcal{E}'^0(X)$ est défini comme suit: si $\nu \in \mathcal{E}'^0(X)$, $H\nu$ est la fonction continue*

$$(9,12) \quad (H\nu)(x) = \int_x A(x, \xi) d\nu(\xi);$$

en outre:

$$(9,13) \quad \begin{aligned} \langle H\bar{\nu}, \mu \rangle &= \int_x d\mu(x) \int_x A(x, \xi) d\bar{\nu}(\xi) \\ &= \int_x d\bar{\nu}(\xi) \int_x A(x, \xi) d\mu(x), \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$(9,14) \quad \langle H\bar{\mu}, \mu \rangle = \int_x d\mu(x) \int_x A(x, \xi) \overline{d\mu(\xi)} \geq 0.$$

Pour que l'injection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}^0(X)$ soit compacte, il faut que A soit une fonction continue sur $X \times X$, et il suffit qu'elle soit séparément continue, et continue sur la diagonale de $X \times X$.

Démonstration-

1°) Supposons que $\mathcal{H}$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^0(X)$; soient H son noyau relatif à $\mathcal{E}^0(X)$, A son noyau reproduisant, en tant que sous-espace hilbertien de $\mathbb{C}^X$. L'application $x \rightsquigarrow \delta_{(x)}$ est continue de X dans $\mathcal{E}'^0(X)$ faible; comme alors la forme sesquilinéaire $\tilde{H}$ définie par H (Formule (3,5), Proposition 5) est séparément faiblement continue, A définie par (9,2) est séparément continu sur $X \times X$ (on peut aussi dire: $A(\cdot, \xi) \in \mathcal{H}$ donc $\in \mathcal{E}^0(X)$, donc $x \rightsquigarrow A(x, \xi)$ est continue; de même $\xi \rightsquigarrow A(\xi, x) = A(x, \xi)$). Si $(x, \xi) \in K \times K$, K compact de X , $\delta_{(x)}$ parcourt un faiblement compact donc borné de $\mathcal{E}'^0(X)$, et $H\delta_{(\xi)}$ un faiblement compact donc borné de $\mathcal{E}^0(X)$, donc $A(x, \xi) = \langle H\delta_{(\xi)}, \delta_{(x)} \rangle$ est borné sur $K \times K$: A est localement borné sur $X \times X$.

2°) Inversement, soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathbb{C}^X$, A son noyau reproduisant d'Aronszajn, et supposons A séparément continu et localement borné. Supposons que $x \in X$ converge vers $x_0 \in X$ en restant dans un compact; alors $\|A(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}^2 = A(x, x)$ reste borné, et $(A(\cdot, \xi) | A(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = A(x, \xi)$ converge vers $A(x_0, \xi) = (A(\cdot, \xi) | A(\cdot, x_0))$; mais les $A(\cdot, \xi)$, $\xi \in X$, forment un ensemble total dans $\mathcal{H}$ (puisque les $H\mu$, $\mu \in (\mathbb{C}^X)'$, qui en sont des combinaisons linéaires finies, forment le sous-espace dense $H((\mathbb{C}^X)') = \mathcal{H}_0$ de la Proposition 7); donc $A(\cdot, x)$ converge vers $A(\cdot, x_0)$ faiblement dans $\mathcal{H}$ (44). Alors, pour $h \in \mathcal{H}$, $(h | A(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = h(x)$ convergera vers $(h | A(\cdot, x_0)) = h(x_0)$, donc chaque h est une fonction continue sur X . Donc $\mathcal{H} \in \mathcal{E}^0(X)$, et le théorème du graphe ferme(45) montre que son injection est continue, donc que c'est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^0(X)$.

3°) Supposons les propriétés précédentes vérifiées. On a, pour v dans $\mathcal{E}'^0(X)$:

$$(9,15) \quad v = \int_x \delta_{(\xi)} dv(\xi),$$

car elle exprime simplement que, pour toute $f \in \mathcal{E}^0(X)$, on a:

(44) En vertu du théorème d'Ascoli (Bourbaki [1], Chapitre III, §3, n.05, Proposition 5).

(45) Bourbaki [1], Chapitre I, §3, n.3, Corollaire 5 du Théorème 1.

$$(9,16) \quad \langle v, f \rangle = \int f(\xi) dv(\xi) \quad .$$

Comme $v \rightarrow Hv(x) = \langle Hv, \delta_{(x)} \rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}'^0(X)$ faible, on déduit de (9,15):

$$(9,17) \quad (Hv)(x) = \int_x \langle H\delta_{(\xi)}, \delta_{(x)} \rangle dv(\xi) = \int_x A(x, \xi) dv(\xi) \quad ,$$

ce qui est (9,12); le dernier terme est l'intégrale d'une fonction continue par rapport à une mesure de Radon à support compact; en outre le résultat obtenu, qui est $(Hv)(x)$, est nécessairement un fonction continue de $x \in X$.

Ensuite on aura, en intégrant par rapport à μ la fonction continue $H\bar{v}$

$$(9,18) \quad \langle H\bar{v}, \mu \rangle = \int ((H\bar{v})(x)) d\mu(x) = \int_x d\mu(x) \int_x A(x, \xi) \overline{dv(\xi)},$$

ce qui est la première égalité (9,13).

Par ailleurs, $H\delta_{(\xi)} = A(\cdot, \xi)$, donc

$$(9,19) \quad \langle H\delta_{(\xi)}, \mu \rangle = \int A(x, \xi) d\mu(x) ;$$

comme $v \rightarrow \langle H\bar{v}, \mu \rangle$ est linéaire continue sur $\mathcal{E}'^0(X)$ faible, on déduit de (9,15):

$$(9,20) \quad \begin{aligned} \langle H\bar{v}, \mu \rangle &= \int_x \langle H\delta_{(\xi)}, \mu \rangle \overline{dv(\xi)} \\ &= \int_x \overline{dv(\xi)} \int_x A(x, \xi) d\mu(x), \end{aligned}$$

ce qui est la deuxième égalité (9,13).

En faisant $v = \mu$, on obtient (9,14), ce qui n'était nullement évident a priori si l'on supposait seulement A séparément continue, localement bornée et de type positif. Naturellement, on le verrait directement par l'application du critère du Corollaire 3 de la Proposition 21: toute mesure μ de $\mathcal{E}'^0(X)$ est limite faible de combinaisons finies de masses ponctuelles, c. à d. d'éléments de $(C^A)'$, de supports contenus dans celui de μ et de normes $\leq \|\mu\|$ donc formant une partie bornée de $\mathcal{E}'^0(X)$

4°) D'après la Proposition 9ter, $\mathcal{H}$ a une injection compacte dans $\mathcal{E}'^0(X)$ si et seulement si, en tant que forme bilinéaire sur $\mathcal{E}'^0(X) \times \mathcal{E}'^0(X)$ (rappelons que $\mathcal{E}'^0(X)$ est son propre anti-espace), H appartient à $\mathcal{E}^0(X) \hat{\otimes}_e \mathcal{E}^0(X)$. Mais cet espace peut-être identifié à $\mathcal{E}^0(X \times X)$, et la fonction continue ainsi identifiée à H est justement A . Il nous reste à voir que, A étant séparément continue et de type positif, sa continuité sur la diagonale de $X \times X$ entraîne sa continuité sur $X \times X$. Or, elle est d'abord localement bornée sur la diagonale, donc sur $X \times X$, en vertu de l'inégalité de Schwarz $|A(x, \xi)| \leq (A(x, x))^{1/2} (A(\xi, \xi))^{1/2}$. Alors, lorsque ξ converge vers ξ_0 , $A(\cdot, \xi)$ converge vers $A(\cdot, \xi_0)$ faiblement dans $\mathcal{H}$, mais avec convergence de la norme $(A(\xi, \xi))^{1/2}$ vers la norme $(A(\xi_0, \xi_0))^{1/2}$, donc fortement dans $\mathcal{H}$ et par suite dans $\mathcal{E}^0$, ce qui exprime exactement que A est continue sur $X \times X$.

Corollaire 1. *Si une somme de fonctions de type positif sur $X \times X$ est séparément continue et localement bornée (resp. continue), il en est de même de chacune d'elles.*

Car si une somme de sous-espaces hilbertiens $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^X$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^0(X)$ (resp. à une injection compacte dans $\mathcal{E}^0(X)$), il en est de même de chacun d'eux, l'injection $\mathcal{H}_i \rightarrow \sum_j \mathcal{H}_j$ étant continue.

On pourrait développer des corollaires analogues aux propositions suivantes; nous laisserons au lecteur le soin de le faire: Si $\mathcal{A}$ est un sous-espace localement convexe quasi-complet de $\mathbb{C}^X$, avec une injection continue, et si une somme de fonctions de type positif sur $X \times X$ appartient à $\mathcal{L}^+(\mathcal{A})$, il en est de même de chacun d'eux.

Remarque. Il n'est pas certain qu'on puisse remplacer (9,13) par une intégrale double, car A , séparément continue et localement bornée, n'est pas nécessairement intégrable ni même mesurable par rapport à la mesure produit $d\mu(x)dv(\xi)$. Le fait que les intégrales (9,13) aient un sens et soient égales est peu visible a priori, et tient peut-être à ce que A est de type positif.

Mais supposons X métrisable sur tout compact, donc aussi séparable sur tout compact. Alors l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur un compact K de X est aussi séparable. Soit A une fonction quelconque sur $X \times X$, séparément continue et localement bornée. L'application $x \rightsquigarrow A(x, \cdot)$ de K

dans $\mathcal{C}(K)$ affaibli est continue [en effet, lorsque x tend vers x_0 , $A(x, \cdot)$ converge simplement vers $A(x_0, \cdot)$ et reste bornée sur K , de sorte que, K étant métrisable, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que, pour toute mesure de Radon ν sur K , $\langle A(x, \cdot), \nu \rangle$ converge vers $\langle A(x_0, \cdot), \nu \rangle$, donc $A(x, \cdot)$ converge faiblement vers $A(x_0, \cdot)$ dans $\mathcal{C}(K)$]. Soit alors θ une mesure de Radon ≥ 0 sur $K \times K$, $\tilde{\theta}$ son image sur K par la projection $(x, \xi) \rightsquigarrow x$. L'application $x \rightsquigarrow A(x, \cdot)$ est a fortiori faiblement mesurable pour $\tilde{\theta}$ donc fortement mesurable puisque $\mathcal{C}(K)$ est un Banach séparable. Cela prouve que, quelque soit $\delta > 0$, il existe un compact K_δ de K , tel que $\theta(K - K_\delta) \leq \delta$, et que $x \rightsquigarrow A(x, \cdot)$ soit continue de K_δ dans $C(K)$. Alors $(x, \xi) \rightsquigarrow A(x, \xi)$ est continue sur $K_\delta \times K$; et $\theta((K \times K) - (K_\delta \times K)) = \tilde{\theta}(K - K_\delta) \leq \delta$; comme δ est arbitraire, cela prouve que A est θ -mesurable sur $K \times K$; comme K et θ sont arbitraires, cela prouve que A est mesurable pour toute mesure de Radon sur $X \times X$.

Nous avons utilisé le fait que A était séparément continue et localement bornée, mais seule la première hypothèse est nécessaire pour obtenir la mesurabilité de A ; en effet, elle entraîne que, pour tout entier $n \geq 0$, $\text{Inf}(n, \text{Sup}(-n, \text{Re} A))$, séparément continue et bornée, soit mesurable, donc aussi $\text{Re} A$ par passage à la limite et aussi $\text{Im} A$ pour la même raison, donc A .

Nous voyons alors que A est intégrable pour $d\mu(x) d\bar{\nu}(\xi)$; les intégrales (9,13) peuvent s'écrire

$$(9,21) \quad \iint_{X \times X} A(x, \xi) d\mu(x) \overline{d\nu(\xi)}$$

et sont égales a priori d'après Fubini.

D'autre part, selon qu'on les écrit par le deuxième ou le troisième membre de (9,13), on voit qu'elles définissent une forme sesquilinéaire séparément faiblement continue sur $\mathcal{E}'^0(X) \times \mathcal{E}'^0(X)$; donc que H définie par (9,12) est faiblement continue de $\mathcal{E}'^0(X)$ dans $\mathcal{E}^0(X)$. L'hypothèse de métrisabilité locale de X supprime ainsi tout caractère mystérieux aux résultats obtenus, et les rend ainsi sûrement indépendants du fait que A est de type positif.

Supposons en particulier que X soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{E}^0(X) \subset \mathcal{D}'(X)$; donc H , noyau $\mathcal{E}'^0(X) \rightarrow \mathcal{E}^0(X)$ de $\mathcal{H}$ relatif à $\mathcal{E}^0(X)$, donne, par restriction

$\mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$, le noyau $\mathcal{H}$ relatif à $\mathcal{D}'(X)$ (il suffira, dans les formules (9,12) à (9,14) de remplacer $d\mu(x)$, $d\nu(\xi)$ par $\phi(x)dx$, $\psi(\xi)d\xi$); ce noyau est une distribution $H_{x,\xi}$ sur $X \times X$ (Exemple 3 page 149): cette distribution est celle qui est identifiée à la fonction A mesurable (par rapport à la mesure de Lebesgue $dx d\xi$) et localement bornée. On peut donc encore énoncer la Proposition 24 en disant:

Corollaire 2. *Pour qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de $\mathcal{D}'(X)$, X ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}'(X)$, il faut et il suffit que son noyau $H_{x,\xi} \in \mathcal{D}'(X \times X)$ soit une fonction A , séparément continue et localement bornée.*

Démonstration. Nous venons de voir que la condition était nécessaire. Elle est suffisante d'après le Corollaire 3 de la Proposition 21, appliqué à $E = \mathcal{D}'$, $G = \mathcal{E}'$ car, si A est séparément continue et localement bornée, nous venons de voir que H est faiblement continue de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{E}'(X)$, et il est inutile de supposer sa positivité, car, par régularisation, toute $\mu \in \mathcal{E}'(X)$ est limite faible d'une suite $\mu * \rho_\nu$ de fonctions de $\mathcal{D}(X)$.

Proposition 25. *Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathcal{E}^m(X)$ l'espace des fonctions de classe C^m sur X , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées de tout ordre $\leq m$ (d'ordre quelconque si $m = +\infty$, convention valable pour la suite). Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathcal{C}^X$, A son noyau reproduisant d'Aronszajn. Pour que $\mathcal{H}$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^m(X)$, il faut que A ait des dérivées (au sens usuel) et au sens des distributions d'ordre $\leq m$ en x et $\leq m$ en ξ , séparément continues et localement bornées; et il suffit que $\sum_{|p|=m} D_x^p D_\xi^p A$, ou $(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_i})^m A$ (au sens des distributions), soit une fonction séparément continue et localement bornée. Dans ce cas, soit H le noyau de $\mathcal{H}$ par rapport à $\mathcal{E}^m(X)$. Pour $T \in \mathcal{E}'^m(X)$ (distribution d'ordre $\leq m$), HT est la fonction de classe C^m définie par:*

$$(9,21 \text{ bis}) \quad (HT)(x) = \int_x A(x, \xi) T(\xi) d\xi$$

et ses dérivées d'ordre $\leq m$ se calculent par dérivation sous le signe $\int_x$
 Pour ce $T \in \mathcal{E}'^m(X)$, on a:

$$\begin{aligned}
 \langle HT, S \rangle &= \int_x S(x) dx \int_x A(x, \xi) \overline{T(\xi)} d\xi \\
 (9,22) \qquad &= \int_x \overline{T(\xi)} d\xi \int_x A(x, \xi) S(x) dx.
 \end{aligned}$$

En particulier:

$$(9,23) \qquad \langle HT, T \rangle = \int_x T(x) dx \int_x A(x, \xi) \overline{T(\xi)} d\xi \geq 0.$$

Pour que l'injection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}^m(X)$ soit compacte, il faut et il suffit que A ait ses dérivées d'ordre $\leq m$ en x et $\leq m$ en ξ (au sens usuel ou au sens des distributions) continues sur $X \times X$.

Démonstration.

Disons d'abord ce que nous entendons par: " A a des dérivées partielles au sens usuel d'ordre $\leq m$ en x et d'ordre $\leq m$ en ξ ". Nous voulons dire qu'on peut appliquer à A , dans un ordre quelconque, des dérivations partielles par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, pourvu que le nombre des dérivations par rapport aux x_i soit $\leq m$ et que le nombre des dérivations par rapport aux ξ_i soit $\leq m$; et qu'en outre le résultat obtenu est indépendant de l'ordre des dérivations ⁽⁴⁶⁾.

Rappelons que si une fonction d'une variable a une dérivée *partout*, qui est une fonction localement intégrable, alors elle en est l'intégrale indéfinie. On en déduit aisément que si une fonction localement intégrable sur $X \times X$ a une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ *partout*, et si cette dérivée est localement intégrable, c'est aussi la dérivée au sens des distributions ⁽⁴⁷⁾.

Si donc A a ses dérivées partielles d'ordre $\leq m$ en x et $\leq m$ en ξ , au sens usuel, qui sont séparément continues et localement bornées, ce sont aussi ses dérivées au sens des distributions. Deux dérivées différant seulement

⁽⁴⁶⁾ L'indépendance de l'ordre des dérivations n'est pas automatique, car nous ne supposons pas la continuité des dérivées considérées sur $X \times X$.

⁽⁴⁷⁾ Schwartz [1], Chapitre II, Théorème V.

par l'ordre des dérivations sont alors égales en tant que distributions, donc presque partout égales, donc partout égales puisque séparément continues.

1°) Supposons que $\mathcal{H}$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^m(X)$. Alors, pour tout $x \in X$, $A(\cdot, x)$ est dans $\mathcal{E}^m$, donc aussi $A(x, \cdot)$ par symétrie hermitienne. Alors le 2e membre de (9,21.bis), pour x fixé, a un sens, et représente une forme linéaire de T , faiblement continue sur $\mathcal{E}'^m$. Comme H est linéaire faiblement continue de $\mathcal{E}'^m$ dans $\mathcal{E}^m$, le 1er membre a les mêmes propriétés. Ils coïncident pour $T = \delta_{(\xi)}$, d'après la définition même du noyau reproduisant; les masses ponctuelles forment un ensemble faiblement total dans $\mathcal{E}'^m$, donc l'égalité (9,21) est vraie. Le second membre est alors nécessairement une fonction de x de classe C^m ; en appliquant aux deux membres la distribution $S \in \mathcal{E}'^m$, on obtient la première égalité (9,22). La deuxième s'en déduit par symétrie hermitienne (et échange de x et ξ); d'où (9,23).

Cette démonstration est valable aussi pour $m=0$ et donne une variante de la partie 3°) de la proposition précédente.

2°) Supposons toujours $\mathcal{H}$ sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^m(X)$. Appliquons (9,22) pour

$$\begin{aligned}
 (9,24) \quad S &= (D^p \delta)_{(x)}, \quad T = (D^q \delta)_{(\xi)}. \quad \text{On obtient:} \\
 &\langle H((D^q \delta)_{(\xi)}), (D^p \delta)_{(x)} \rangle \\
 &= (-1)^{|p+q|} D_x^p D_\xi^q A(x, \xi). \\
 &= (-1)^{|p+q|} D_\xi^q D_x^p A(x, \xi).
 \end{aligned}$$

Donc d'abord ces deux dérivées existent, et $D_\xi^q A(\cdot, \xi)$ est de classe C^m en x pour ξ fixé, et $D_x^p A(x, \cdot)$ de classe C^m en ξ pour x fixé. Ensuite $\xi \rightsquigarrow (D^q \delta)_\xi$, $x \rightsquigarrow (D^p \delta)_{(x)}$ sont continues de X dans $\mathcal{E}'^m(X)$ faible; $\tilde{H}$ étant séparément faiblement continue sur $\mathcal{E}'^m(X) \times \mathcal{E}'^m(X)$, $D_x^p D_\xi^q A = D_\xi^q D_x^p A$ est séparément continue. Si x et ξ parcourent des compacts de X , $(D^p \delta)_{(x)}$ et $(D^q \delta)_{(\xi)}$ parcourent des bornés de $\mathcal{E}'^m(X)$, donc $D_x^p D_\xi^q A(x, \xi)$ reste borné; elle est bien localement bornée.

Ceci ne montre pas complètement que les dérivées d'ordre $\leq m$ en x et $\leq m$ en ξ de A existent (avec permutabilité de l'ordre des dérivations); nous avons vu seulement que $D_x^p D_\xi^q A$ et $D_\xi^q D_x^p A$ existent pour $|p| \leq m$, $|q| \leq m$,

et sont égales. C'est toutefois évident pour $m = 0$ (et vrai aussi pour $m = 1$). Supposons le démontré pour $m = 0, 1, 2, \dots, l-1$, et montrons-le pour $m = l$. Une dérivée d'ordre $\leq l$ en x et $\leq l$ en ξ de A est de la forme $D_x^\alpha D_\xi^\beta D'$, ou $D_\xi^\beta D_x^\alpha D'$, où D' est une dérivée partielle d'ordre $\leq l-1$ en x et $\leq l-1$ en ξ . Occupons nous du premier cas $D = D_x^\alpha D_\xi^\beta D'$. Comme $\mathcal{H}$ est sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^l$, il l'est a fortiori de $\mathcal{E}^{l-1}$; donc, si D' est d'indice total p' en x , q' en ξ , l'hypothèse de récurrence dit que $D'A$ existe, et s'écrit aussi $D_x^{p'} D_\xi^{q'} A$ et $D_\xi^{q'} D_x^{p'} A$. Alors $D_\xi^\beta D' A$ existe d'après les résultats antérieurs et vaut $D_\xi^{\beta+q'} D_x^{p'} A$; il vaut donc aussi $D_x^{p'} D_\xi^{\beta+q'} A$, de sorte que DA existe et vaut $D_x^{\alpha+p'} D_\xi^{\beta+q'} A$; et il vaut aussi $D_\xi^{\beta+q'} D_x^{\alpha+p'} A$. Le second cas $D = D_\xi^\beta D_x^\alpha D'$ se traite pareillement, ce qui démontre la propriété énoncée.

Remarque. Pour compléter les formules obtenues, il est bon d'ajouter ceci: en appliquant (9,21 bis) à $T = D^p \delta_{(a)}$, $a \in X$, on voit que

$$(9,25) \quad (HD^p \delta_{(a)})(x) = (-1)^{|p|} (D_\xi^p A)(x, a);$$

donc $D_\xi^p A(\cdot, a) \in \mathcal{H}^{(48)}$.

Les formules (9,22) et (9,23) donnent alors:

$$(9,26) \quad (D_\xi^q A(\cdot, b) | D_\xi^p A(\cdot, a)) = D_x^p D_\xi^q A(a, b) \\ \| D_\xi^p A(\cdot, a) \|_{\mathcal{H}}^2 = D_x^p D_\xi^p A(a, a).$$

Enfin, pour $h \in \mathcal{H}$, (4,2) donne

$$(9,27) \quad (D^p h)(a) = \langle h, (-1)^{|p|} D^p \delta_{(a)} \rangle = (h | D_\xi^p A(\cdot, a))_{\mathcal{H}}$$

donc en particulier la majoration

$$(9,28) \quad |(D^p h)(a)| \leq \| h \|_{\mathcal{H}} ((D_x^p D_\xi^p A)(a, a))^{1/2}.$$

Il n'y a pas de raison, dans ces formules, de se borner à des opérateurs différentiels à coefficients constants. Soient P, Q , deux opérateurs différentiels à coefficients C^∞ quelconques d'ordre $\leq m$. En appliquant (9,21 bis) à ${}^t P \delta_{(a)}$ on obtient

(48) Une telle notation $D_\xi^p A(\cdot, a)$ désigne la dérivée de A par rapport à la deuxième variable, considérée, pour cette deuxième variable égale à a , comme fonction de la première variable. On pourrait aussi l'écrire, plus rigoureusement; $x \rightsquigarrow (D_\xi^p A(x, \xi))_{\xi=a}$.

$$(9,30) \quad H \cdot {}^t P \delta_{(a)} = \int_x A(\cdot, \xi) {}^t P \delta_{(a)} d\xi = P_\xi A(\cdot, a).$$

(9,22) et (9,23) donnent alors

$$(9,31) \quad \begin{aligned} & (Q_\xi A(\cdot, b) | P_\xi A(\cdot, a))_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Q_\xi A(\cdot, b), {}^t \overline{P} \delta_{(a)} \rangle \\ &= \overline{P}_x Q_\xi A(a, b). \end{aligned}$$

Pour $h \in \mathcal{H}$, (4,2) donne

$$(9,32) \quad \begin{aligned} \overline{P} h(a) &= \langle h, {}^t \overline{P} \delta_{(a)} \rangle \\ &= (h | P_\xi A(\cdot, a))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

3°) $D_x^p D_\xi^p H$ (distribution) est le noyau de $D^p \mathcal{H}$ (Exemple 3 page 177); donc $\sum_{|p|=m} D_x^p D_\xi^p H$ est le noyau de $\sum_{|p|=m} D^p \mathcal{H}$. Or, d'après le théorème du graphe fermé, $\mathcal{H}$ est sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^m(X)$ dès qu'il est contenu dans $\mathcal{E}^m(X)$; pour cela il faut et il suffit que $\sum_{|p|=m} D^p \mathcal{H}$ soit contenu dans $\mathcal{E}^0(X)$, ou sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^0(X)$, et pour cela il faut et il suffit que son noyau $\sum_{|p|=m} D_x^p D_\xi^p H$ soit une fonction séparément continue et localement bornée, ce qui démontre la première condition suffisante.

La deuxième se démontre par récurrence sur m . Elle est vraie pour $m = 0$ (ou pour $m = 1$, puisqu'elle coïncide alors avec la première). Supposons-là montrée pour $m = 0, 1, 2, \dots, l-1$, et montrons-la pour $m = l$. Pour que $\mathcal{H}$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^l$, il faut et il suffit que $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{E}^{l-1}$; comme le noyau de ce dernier est $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial \xi_i}$, il faut et il suffit, d'après l'hypothèse de récurrence, que $\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_i} \right)^{l-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_i} \right) H$ soit une fonction séparément continue et localement bornée, ce qui est le résultat cherché.

4°) D'après la Proposition 9ter, pour que l'injection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}^m(X)$ soit compacte, il faut et il suffit que A soit dans $\mathcal{E}^m(X) \hat{\otimes}_e \mathcal{E}^m(X)$ et que $\tilde{H}$ soit une forme sesquilinéaire ≥ 0 sur $\mathcal{E}^m(X) \times \mathcal{E}^m(X)$. La positivité de $\tilde{H}$ est automatique lorsque A est dans $\mathcal{E}^m \hat{\otimes}_e \mathcal{E}^m$ et A de type positif, en vertu du critère du Corollaire 3 de la Proposition 21: toute $T \in \mathcal{E}^m$ est limite faible d'une suite de mesures discrètes, donc appartenant à $(C^X)'$. Ensuite $\mathcal{E}^m(X) \hat{\otimes}_e \mathcal{E}^m(X) = \mathcal{E}_{x,\xi}^{m,m}$ est précisément l'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre $\leq m$ en x et $\leq m$ en ξ sont continues sur $X \times X$.

Remarque. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^m(X)$, il a une injection compacte dans $\mathcal{E}^{m-1}(X)$, puisque l'injection $\mathcal{E}^m(X) \rightarrow \mathcal{E}^{m-1}(X)$ transforme toute partie bornée en partie relativement compacte. Par ailleurs, toute fonction sur $X \times X$ ayant ses dérivées d'ordre $\leq m$ en x et en ξ localement bornées, a ses dérivées d'ordre $\leq m - 1$ en x et en ξ continues sur $X \times X$ (et même localement lipschitziennes). C'est bien compatible avec 4°).

Proposition 26. Soit X un espace localement compact pour $m = 0$, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour m (fini ou non) ≥ 1 . Pour qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}^m(X)$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{B}^m(X)$ (espace des fonctions continues bornées sur X , ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur X de chaque dérivée d'ordre $\leq m$) il faut que chaque dérivée $D_x^p D_\xi^q A, |p| \leq m, |q| \leq m$, soit bornée sur $X \times X$, et il suffit que $\sum_{|p| \leq m} D_x^p D_\xi^q A$ soit bornée sur la diagonale de $X \times X$.

Démonstration.

Supposons d'abord $\mathcal{H}$ sous-espace hilbertien de $\mathcal{B}^m(X)$. Pour $|p| \leq m, D^p \delta_{(x)}$ parcourt une partie faiblement bornée de $(\mathcal{B}^m)$ lorsque x parcourt X . Comme la forme sesquilinéaire $\tilde{H}$ associée à H reste bornée sur tout produit de parties bornées de $(\mathcal{B}^m)$, la formule (9,24) montre que $D_x^p D_\xi^q A$ est bornée sur $X \times X$.

Inversement, supposons A bornée sur la diagonale de $X \times X$, donc sur $X \times X$ par $|A(x, \xi)| \leq (A(x, x))^{1/2} (A(\xi, \xi))^{1/2}$. La formule (9,28) pour $|p| = 0$ montre que chaque h de $\mathcal{H}$ est bornée sur X , donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{B}^0(X)$ par le théorème du graphe fermé. Si $\sum_{|p| \leq m} D_x^p D_\xi^q A$ est bornée sur $X \times X$, comme c'est le noyau de $\sum_{|p| \leq m} D^p \mathcal{H}$, cela prouve

que chaque $D^p \mathcal{H}$ est dans $\mathcal{B}^0(X)$, donc $\mathcal{H}$ est dans $\mathcal{B}^m(X)$ et $\mathcal{H}$ est sous-espace hilbertien de $\mathcal{B}^m(X)$ par le théorème du graphe fermé.

Proposition 27. *Soit X un espace localement compact pour $m = 0$, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour $m \geq 1$. Soit $\mathcal{U}$ une structure uniforme sur X , compatible avec sa topologie. Soit $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m(X)$ l'espace (complet) des fonctions sur X , bornées, uniformément continues pour $\mathcal{U}$, ainsi que chacune de leurs dérivées d'ordre $\leq m$, muni de la topologie induite par $\mathcal{B}^m(X)$. Pour qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de $\mathcal{B}^m(X)$ soit sous-espace hilbertien de $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m(X)$, il faut que chaque fonction $(D_x^p D_{\xi}^q A)(\cdot, a)$, $|p| \leq m$, $|q| \leq m$, $a \in X$, soit uniformément continue pour $\mathcal{U}$, et il suffit que chaque fonction $D_x^p(A)(\cdot, a)$ le soit.*

Démonstration. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$, la fonction $D_{\xi}^q A(\cdot, a) \in \mathcal{H}$ est dans $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$ donc chacune de ses dérivées $D_x^p D_{\xi}^q A(\cdot, a)$ est uniformément continue sur X pour $\mathcal{U}$.

Inversement, si chaque $D_x^p A(\cdot, a)$ est uniformément continue sur X pour $\mathcal{U}$, c'est que $A(\cdot, a)$ est dans $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$; toute $h \in \mathcal{H}$ est limite, dans $\mathcal{H}$ donc dans $\mathcal{B}^m$, de combinaisons finies des fonctions $A(\cdot, a) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$, et $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$ est fermé dans $\mathcal{B}^m$; donc $h \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$, et $\mathcal{H}$ est sous-espace hilbertien de $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$.

Remarque. Ce genre d'énoncés, relatif à $\mathcal{B}^m$ et $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^m$, se retrouvera toutes les fois qu'on aura un espace vectoriel localement convexe séparé quasi-complet et un sous-espace fermé, muni de la topologie induite.

Application. La forme hermitienne invariante de Bergman sur une variété analytique complexe ⁽⁴⁹⁾.

Soit V une variété analytique complexe, de dimension complexe n . Soit $\mathcal{H}$ l'espace hilbertien des formes différentielles de degré n , holomorphes, de carré intégrable, muni du produit scalaire:

$$(9,33) \quad (\omega | \bar{\omega})_{\mathcal{H}} = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \int_V \omega \wedge \bar{\omega} .$$

La forme ω est de type $(n, 0)$, $\bar{\omega}$ de type $(0, n)$ donc $\omega \wedge \bar{\omega}$ est de degré $2n$, et l'intégrale a bien un sens, puisque ω et $\bar{\omega}$ sont de carré intégrable. Con-

⁽⁴⁹⁾ Voir Bergman [1].

formément à l'usage, l'orientation de V est celle pour laquelle, en coordonnées locales $z_1, z_2, \dots, z_n$, la forme $\left(\frac{1}{2i}\right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$ est ≥ 0 ; $\varepsilon = \pm 1$ est alors le signe de la forme

$$\left(\frac{1}{2i}\right)^n dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n,$$

de sorte que, pour toute ω , $(\omega|\omega)_{\mathcal{H}}$ est ≥ 0 , et $\mathcal{H}$ est bien hilbertien.

$\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de l'espace $\mathcal{E}^{n,0}$ des formes différentielles C^∞ de type $(n,0)^{(50)}$; il a donc un noyau associé H , application linéaire continue

de $\left(\overline{\mathcal{E}^{n,0}}\right)' = \overline{\mathcal{E}^{0,n}} = \mathcal{E}'^{n,0}$ dans $\mathcal{E}^{n,0}$.

(Nous définissons l'anti-dualité entre $\mathcal{E}^{n,0}$ et $\mathcal{E}'^{n,0}$ par

$$(9,33 \text{ bis}) \quad (f|T)_{\mathcal{E}^{n,0}, \mathcal{E}'^{n,0}} = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \int f \wedge \bar{T} = \overline{(T|f)}_{\mathcal{E}'^{n,0}, \mathcal{E}^{n,0}}$$

Nous identifierons H à une forme différentielle C^∞ de type $(n,0,0,n)$ sur $V \times V$, en convenant que:

$$(9,34) \quad H \cdot T = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (-1)^n \varepsilon \int_V H_{x,\xi} \wedge T_\xi.$$

Soit Ω un ouvert de V , muni de coordonnées locales z_i . Soit i l'injection naturelle $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(V)$; son adjointe i^* est l'opération $\rho: \mathcal{D}'(V) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, de restriction, qui, à chaque courant sur V , associe sa restriction à Ω . La restriction de H à Ω n'est autre que l'application composée pHi ; c'est donc, d'après la Proposition 21, le noyau associé à l'espace de Hilbert image $\rho(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; un élément de $\rho(\mathcal{H})$ est une forme holomorphe de degré n sur Ω , qui est la restriction d'une forme holomorphe de carré intégrable sur V . Sur $\Omega \times \Omega$ la forme différentielle H s'écrit:

$$(9,35) \quad A(x,\xi) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n,$$

⁽⁵⁰⁾ Voir par exemple André Weil [1], début du Chapitre I.

où A est une fonction C^∞ . Soit $T \in \mathcal{E}'^{0,0}(\Omega)$; alors $T d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$ est un élément de $\mathcal{E}'^n(\Omega)$, et, compte tenu de ce que $d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_n$ est $(2i)^n$ la mesure de Lebesgue $d\xi$ sur Ω , on voit que

$$H \cdot (T d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n = \left(\int_V A(x, \xi) T_\xi d\xi \right) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$$

Si donc on convient d'identifier, sur Ω , les formes de type $(n, 0)$ et les fonctions, ou les $(n, 0)$ -courants et les distributions, en identifiant T à $\tilde{T} = T dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$, $\rho(\mathcal{H})$ est identifié à l'espace des fonctions holomorphes sur Ω , dont le produit par $dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$ est restriction d'une forme holomorphe de carré intégrable sur V ; et son noyau: $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ est la fonction reproduisante $(x, \xi) \rightsquigarrow A(x, \xi)$. On a donc en particulier $A(x, x) \geq 0$.

D'autre part, on a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \rho(\mathcal{H}) = 0$ donc, d'après le Corollaire 2 de la Proposition 21, $\frac{\partial A}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial A}{\partial \zeta_i} = 0$: A est holomorphe en x et anti-holomorphe en ξ .

La forme H a donc globalement la même propriété.

Supposons que $A(x, x) > 0$; la fonction $A(\cdot, x)$ est donc ≥ 0 en x ; comme elle est dans $\rho(\mathcal{H})$, il existe une forme de $\mathcal{H}$ qui est $\neq 0$ en x . Réciproquement supposons cette condition réalisée; (9, 11 bis) montre que $A(x, x)$ n'est pas nulle non plus. Nous supposons désormais que, pour tout x de V , il existe une forme de $\mathcal{H}$ qui n'est pas nulle en x ; alors, pour toute carte locale, $A(x, x) > 0$ partout.

Soit K la restriction de la forme H à la diagonale de $V \times V$, multipliée par $\varepsilon \left(\frac{1}{2i} \right)^n$; en indentifiant cette diagonale à V , c'est une forme différentielle de degré $2n$ sur V ; sur Ω elle s'écrit:

$$(9, 37) \quad K = A(x, x) dx = B(x) dx,$$

forme différentielle C^∞ , partout > 0 .

Mais, sur une variété analytique complexe V , la donnée d'une forme différentielle C^∞ , de degré $2n$, partout $\neq 0$, et réelle, permet de définir une forme hermitienne. Posons en effet:

$$(9,38) \quad g = \sum_{i,j} g_{i,j} dz_i d\bar{z}_j = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$$

Cette forme est indépendante du système de coordonnées locales z_i choisies dans Ω . Si en effet z'_i en est un autre, on a d'abord:

$$(9,39) \quad K = \varepsilon \left(\frac{1}{2i} \right)^n B dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$$

$$= \varepsilon \left(\frac{1}{2i} \right)^n B' dz'_1 \wedge dz'_2 \wedge \dots \wedge dz'_n \wedge d\bar{z}'_1 \wedge d\bar{z}'_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}'_n,$$

d'où

$$(9,40) \quad B = B' J \bar{J},$$

où J est le déterminant jacobien des z_i par rapport aux z'_j .

Alors

$$(9,41) \quad \frac{\partial^2 \log B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2 \log B'}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + \frac{\partial^2 \log J}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} + \frac{\partial^2 \log \bar{J}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2 \log B'}{\partial z_i \partial \bar{z}_j},$$

parce que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \log J = \frac{\partial}{\partial z_i} \log \bar{J} = 0$

Ensuite on a immédiatement

$$(9,42) \quad \frac{\partial^2 \log B'}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial z_i} \sum_l \left(\frac{\partial \log B'}{\partial z'_l} \frac{\overline{\partial z'_l}}{\partial z_j} \right) = \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial \log B'}{\partial z'_l} \right) \frac{\overline{\partial z'_l}}{\partial z_j}$$

$$= \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \log B'}{\partial z'_k \partial \bar{z}'_l} \frac{\partial z'_k}{\partial z_i} \frac{\overline{\partial z'_l}}{\partial z_j}.$$

On a donc

$$(9,42 \text{ bis}) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log B'}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 \log B'}{\partial z'_k \partial \bar{z}'_l} \left(\frac{\partial z'_k}{\partial z_i} dz_i \right) \overline{\left(\frac{\partial z'_l}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right)} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \log B'}{\partial z'_k \partial \bar{z}'_l} dz'_k d\bar{z}'_l .$$

La forme définie sur Ω est donc intrinsèque, et on a donc bien une forme sur V , qui est manifestement C^∞ , et hermitienne, parce que B est réelle. Montrons maintenant qu'elle est ≥ 0 . On doit montrer que, quel que soit $a \in V$ et quels que soient les nombres complexes Z_i , on a :

$$(9,43) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(a) Z_i \bar{Z}_j \geq 0 .$$

Soit X un champ de vecteurs holomorphes, $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ tel que $X_i(a) = Z_i$.

L'inégalité précédente s'écrit aussi, compte tenu de ce que :

$$(9,44) \quad g_{i,j} = \frac{\partial^2 \log B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial z_i} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}_j} + \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$$

sous la forme

$$(9,45) \quad \sum_{i,j} Z_i \bar{Z}_j \frac{\partial B}{\partial z_i}(a) \frac{\partial B}{\partial \bar{z}_j}(a) \leq B(a) \sum_{i,j} Z_i \bar{Z}_j \frac{\partial^2 B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(a) .$$

Mais, A étant holomorphe en x et anti-holomorphe en ξ , on a :

$$\frac{\partial B}{\partial z_i}(a) = \left(\frac{\partial A}{\partial z_i} + \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \right)(a, a) = \frac{\partial A}{\partial z_i}(a, a)$$

et de même :

$$\frac{\partial B}{\partial \bar{z}_i}(a) = \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}_i}(a, a), \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(a) = \frac{\partial^2 A}{\partial z_i \partial \bar{\xi}_j}(a, a)$$

(9,45) s'écrit donc:

$$(9,46) \quad \left| \sum_i Z_i \frac{\partial A}{\partial z_i}(a, a) \right|^2 \leq A(a, a) \sum_{i,j} Z_i Z_j \frac{\partial^2 A}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(a, a)$$

ou

$$|\theta(X_x) \cdot A|^2 \leq A (\theta(X_x) \cdot \theta(\bar{X}_\xi) \cdot A) \text{ pour } \xi = x = a.$$

Appliquons les formules des noyaux reproduisants (9,31) pour les opérateurs différentiels 1 et $\theta(X)$. Cela revient à:

$$(9,48) \quad \begin{cases} |(A(\cdot, a) | \theta(\bar{X}_\xi) A(\cdot, a))_{\rho(\mathcal{H})}|^2 \leq \\ \|A(\cdot, a)\|_{\rho(\mathcal{H})}^2 \| \theta(\bar{X}_\xi) A(\cdot, a) \|_{\rho(\mathcal{H})}^2, \end{cases}$$

ce qui est simplement l'inégalité de Schwarz. En général, on aura l'inégalité stricte $<$, et $\sum_{i,j} g_{i,j}(a) Z_i Z_j > 0$. On aura l'égalité $= 0$ si et seulement s'il existe un nombre complexe λ tel que:

$$\theta(\bar{X}_\xi) A(\cdot, a) - \lambda A(\cdot, a) = 0$$

D'après (9,32) c'est équivalent à dire que, pour toute $\tilde{h} \in \rho(\mathcal{H})$, on a $(\theta(X) \cdot h)(a) - \lambda h(a) = 0$ ou

$$\sum_i Z_i \frac{\partial h}{\partial z_i}(a) - \lambda h(a) = 0.$$

Donc la forme g sera définie positive, si et seulement si, pour tout a et tout système de coordonnées locales z_i au voisinage de a , il n'existe aucune relation linéaire non triviale entre les valeurs de ω et de ses dérivées $\frac{\partial \omega}{\partial z_i}$ en a , vérifiée par toutes les ω de $\mathcal{H}$ (i.e., les $n + 1$ formes linéaires sur $\mathcal{H}$: $\omega \rightsquigarrow \omega(a)$, $\omega \rightsquigarrow \frac{\partial \omega}{\partial z_i}(a)$, sont indépendantes).

A la forme hermitienne g on peut canoniquement associer une forme différentielle γ de type (1,1), qui sera, dans Ω :

$$(9,49) \quad \gamma = \sum_{i,j} g_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j = d_z d_{\bar{z}} \log B$$

L'expression même de cette forme montre qu'elle est fermée, donc V est kählérienne relativement à g .

(Remarquons enfin que, si V ne vérifie pas la condition indiquée page 204 relativement à l'existence de forme holomorphes de carré intégrable, on peut toujours quand même construire g , mais elle a des singularités sur l'ensemble analytique W des zéros communs à toutes les formes holomorphes de $\mathcal{H}$. On suppose qu'il existe au moins une telle forme $\neq 0$, sans quoi $K = 0$, et on peut alors prendre $g = 0$). La fonction $\log B$ est localement intégrable; si en effet $\tilde{h} \in \rho(\mathcal{H})$ n'est pas identiquement nulle, la formule (9, 11 bis) montre que, dans Ω :

$$(9,50) \quad B(x) = \frac{h(x)}{\|h\|};$$

comme $\log h$ est localement intégrable, il en est bien de même de $\log B$. Donc la formule (9,49) définit un courant fermé de type $(1, 1)$ sur Ω ; la méthode employée à la formule (9,41) montre que la définition est intrinsèque et donc valable sur V .

On peut résumer les résultats précédents comme suit:

Proposition 27 bis. *Soit V une variété analytique complexe, de dimension complexe n . Supposons que, pour tout a de V et tout système de coordonnées locales z_i au voisinage de a , il n'existe aucune relation linéaire non triviale entre les valeurs en a de ω et des $\partial\omega/\partial z_i$, vérifiée pour toutes les formes ω holomorphes de degré n , de carré intégrable sur V (exemple: V est un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$). Alors la formule (9,38) définit sur V une forme hermitienne g définie positive, pour laquelle V est kählérienne.*

§10. Cas où E' est un sous-espace de E .

Dans tout ce paragraphe, on supposera donnée une fois pour toutes une injection I hermitienne de $\bar{E}'$ dans E . Par I nous identifierons $\bar{E}'$ à un sous-espace de E et nous appellerons souvent I l'identité. D'après la Proposition 4, I est faiblement (et fortement) continue; d'autre part, I étant injective, $I = I^*$ a une image dense, $\bar{E}'$ est dense dans E . Si I est ≥ 0 , elle définit un sous-

espace hilbertien de E , contenant $\bar{E}'$ comme sous-espace dense avec injection faiblement continue; il sera donné par la structure et nous l'appellerons le sous-espace hilbertien canonique L^2 de E . L'exemple auquel nous penserons le plus souvent est $E = \mathcal{D}'(X)$, espace des distributions sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$, avec $\bar{E}' = \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$; L^2 est bien ici l'espace habituel des classes de fonctions de carré intégrable (pour dx) sur E . On pourra prendre aussi $E = \mathcal{D}'_c(X)$ avec $\bar{E}' = \mathcal{D}^m(X)$, $E = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\bar{E}' = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, etc. Inversement, si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien *dense* d'un espace E , son noyau H est une injection ≥ 0 de $\bar{E}'$ dans E , faiblement continue, qui peut jouer le rôle de I , et L^2 est alors $\mathcal{H}$.

L'hermiticité de I se traduit comme suit: pour $\bar{e}' \in \bar{E}'$, $f' \in E'$ on a:

$$(10,1) \quad \begin{cases} \langle \bar{e}', f' \rangle_{E, E'} &= \overline{\langle f', e' \rangle_{E, E'}} \\ (\bar{e}' | f')_{E, \bar{E}'} &= (\bar{e}' | f')_{\bar{E}', E} \end{cases}$$

les derniers produits scalaires $(\cdot | \cdot)$ sont ceux de (0,4), mais aussi ceux $(\cdot | \cdot)_{L^2}$ qui sont induits par L^2 . Dans le cas de $E = \mathcal{D}'(X)$, il existe sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ une anti-involution naturelle, $\bar{E}' = E'$, avec $\bar{I} = I$, donc $I^* = I = \bar{I} = I$ (c. à d. si $\bar{\phi}$ est la conjuguée de ϕ dans $\mathcal{D}$, c'est aussi sa conjuguée dans $\mathcal{D}'$) et (10,1) s'écrit aussi pour $\phi, \psi \in \mathcal{D}$:

$$(10,2) \quad \begin{cases} \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} \\ (\phi | \psi)_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = (\phi | \psi)_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} &= (\phi | \psi)_{L^2}. \end{cases}$$

Sous-espace normal de E.

On dira qu'un sous-espace vectoriel topologique localement convexe F de E , avec une injection $F \rightarrow E$ faiblement continue, est *normal*, si $\bar{E}'$ est un sous-espace dense de F , avec injection faiblement (donc fortement) continue.

Il n'est pas inutile de savoir que dans certains cas cette condition de continuité de l'injection $\bar{E}' \rightarrow F$ est automatique. C'est ce que donnera le corollaire de la Proposition 28.

Proposition 28. *Soit A un espace localement convexe séparé quasi-complet, B un espace localement convexe métrisable. Une application u linéaire de A' dans B', continue pour $\sigma(A', A)$ et une topologie $\mathcal{C}$ locale-*

ment convexe séparée moins fine que $\sigma(B', B)$, est aussi continue pour $\sigma(A', A)$ et $\sigma(B', B)$.

Démonstration. Le dual de $B'_\mathcal{C}$ muni de $\mathcal{C}$ est un sous-espace B_1 de B , faiblement dense dans B (l'injection $B_1 \rightarrow B$ est transposée de l'injection $B' \rightarrow B'_\mathcal{C}$) donc fortement dense dans B . La transposée ${}^t u$ de u est linéaire de B_1 dans A , continue de $\sigma(B', B)$ dans $\sigma(A, A')$. Alors l'image par ${}^t u$ d'une partie B -bornée de B_1 est faiblement bornée dans A , donc fortement bornée; donc, B étant métrisable, ${}^t u$ est continue de B_1 , muni de la topologie induite par $\sigma(B', B)$, dans A . Mais B_1 , étant dense dans B métrisable, est strictement dense, et A est quasi-complet; donc ${}^t u$ se prolonge en une application linéaire continue $\widehat{{}^t u}$ de B dans A . La transposée de $\widehat{{}^t u}$ est nécessairement encore u (en effet, pour $a' \in A'$, $b \in B$, on a $\langle \widehat{{}^t u} a', b \rangle = \langle a', \widehat{{}^t u} b \rangle$; en prenant $b \in B_1$, on voit que $(\widehat{{}^t u} a' - ua') \in B'$ est orthogonal à B_1 dense dans B , donc est nul). Donc u est bien continue de $\sigma(A', A)$ dans $\sigma(B', B)$.

Corollaire. Dans les conditions indiquées au début du paragraphe, si F est un sous-espace de E avec injection faiblement continue, et si F est un dual de Fréchet réflexif, en particulier si c'est un Banach réflexif ou un Hilbert, si $\bar{E}'$ est contenu dans F , l'injection $\bar{E}' \rightarrow F$ est automatiquement faiblement continue.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition à $A = \bar{E}$, $B = F'$ fort (Fréchet réflexif), $u =$ l'injection $\bar{E}' \rightarrow F$. Alors u est continue pour $\sigma(\bar{E}', \bar{E})$ et $\sigma(F, E')$ (topologie induite par $\sigma(E, E')$), puisque $\bar{E}' \xrightarrow{I} E$ est faiblement continue. Mais $F \rightarrow E$ est faiblement continue, donc $\sigma(F, E')$ est moins fine que $\sigma(F, F')$. La proposition exprime que $\bar{E}' \rightarrow F$ est faiblement continue.

Soit donc F un sous-espace normal de E . Alors, des injections faiblement continues denses $\bar{E}' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{j} E$, on déduira, par passage aux adjoints, des injections faiblement continues et faiblement denses $\bar{E}' \xrightarrow{j^*} F \xrightarrow{u^*} E$; on peut donc encore identifier $\bar{F}'$ faible à un sous-espace normal de E . Si en outre F est réflexif, $\bar{E}'$ sera fortement dense dans $\bar{F}'$ et $\bar{F}'$ fort est aussi sous-espace normal de E (en général, dans la suite, F sera hilbertien). Il faut na-

turellement veiller à ce que l'identification de F' à un sous-espace de E ne soit pas en contradiction avec d'autres faites antérieurement (par exemple si $F = \mathcal{H}$ est hilbertien, l'identification de $\overline{\mathcal{H}'}$ avec un sous-espace de E est incompatible avec l'identification θ de $\overline{\mathcal{H}'}$ avec $\mathcal{H}$ provenant de la structure hilbertienne de $\mathcal{H}$. (Il y a un seul cas d'exception: $\mathcal{H} = L^2$ si $I \geq 0$. L'injection de $\overline{\mathcal{H}'}$ dans E par la première identification est en effet u^* , l'injection définie par la deuxième est $j\theta$; elles coïncident si et seulement si $u^* = j\theta$ ou $u = \theta j^*$, c. à d. si $I = ju$ est le noyau $j\theta j^*$ du sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E , ou encore si $Ii \geq 0$ et $\mathcal{H} = L^2$).

Dans tout ce paragraphe, c'est l'identification de F' avec un sous-espace de E qui sera seule valable. Cette identification s'exprime comme suit: pour $e' \in E', f' \in F'$:

$$(10,3) \quad \begin{cases} \langle \bar{e}', f' \rangle_{F', F'} & = \overline{\langle f', e' \rangle_{E, E'}}, \text{ ou} \\ (\bar{e}' | \bar{f}')_{(\bar{E}', E) \text{ ou } (E, \bar{E}')} & = (\bar{e}' | \bar{f}')_{(\bar{F}', F) \text{ ou } (F, \bar{F}')} \end{cases}$$

Ou encore: on identifie $f' \in F'$ avec l'élément de E qui définit sur E' la forme linéaire faiblement continue $e' \rightsquigarrow \overline{\langle f', e' \rangle_{F', F}}$.

Ou enfin: on identifie F' avec le sous-espace de E formé des e tels que la forme linéaire $\bar{e}' \rightsquigarrow \overline{\langle e, e' \rangle_{E, E'}}$ soit continue sur $\bar{E}'$ muni de la topologie induite par F . Quand il y a sur E, E' , des anti-involutions contragrédientes avec $\bar{I} = I$, on ne parlera plus de $\bar{E}, \bar{E}'$, mais seulement de E, E' ; alors $F, \bar{F}, F', \bar{F}'$ seront tous des sous-espaces de E ; si $F = \bar{F}$, on a aussi: $F' = \bar{F}'$. Par exemple, si $E = \mathcal{D}'(X)$, l'identification de F' à un sous-espace de $\mathcal{D}'$ est donnée par

$$(10,4) \quad \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T, \phi \rangle_{F', F}, \quad \phi \in \mathcal{D}, \quad T \in F'.$$

($T \in F'$ est identifié à la distribution $\phi \rightarrow \langle T, \phi \rangle_{F', F}$; $T \in \mathcal{D}'$ appartient au sous-espace F' si et seulement si $\phi \rightarrow \langle T, \phi \rangle$ est continue sur $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite par F).

Et ensuite F' est le conjugué de F' dans $\mathcal{D}'$. On peut le définir directement par

$$(10,5) \quad (T | \phi)_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = (T | \phi)_{\bar{F}', F}, \quad \phi \in \mathcal{D}, \quad T \in F'.$$

($T \in \mathcal{F}'$ est identifiée à la distribution $\phi \rightsquigarrow \langle T, \phi \rangle_{\overline{\mathcal{F}'}, \overline{\mathcal{F}'}}$; $T \in \mathcal{D}'$ appartient au sous-espace $\mathcal{F}'$ si et seulement si $\phi \rightsquigarrow \overline{\langle T, \phi \rangle}$ est continue sur $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite par F).

Ce qui nous appelons ici sous-espace normal de E est bien ce que nous avons appelé ailleurs espace de distributions normal sur X ⁽⁵¹⁾.

Proposition 28 bis. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace normal de E , de noyau H , et soit $\overline{\mathcal{H}'}$ le noyau de $\overline{\mathcal{H}'}$ comme sous-espace hilbertien de E . Alors H et $\overline{\mathcal{H}'}$, applications linéaires de $\overline{E'}$ dans E , se prolongent de manière unique en des applications linéaires continues $\hat{H}$ et $\hat{H}'$ de $\overline{\mathcal{H}'}$ dans $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{H}$ dans $\overline{\mathcal{H}'}$ respectivement, qui sont réciproques l'une de l'autre et sont les isomorphismes canoniques réciproques entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

Démonstration. H est défini par (4,1) comme étant la composée $\overline{E'} \xrightarrow{j^*} \overline{\mathcal{H}'} \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E$, où j est l'injection de $\mathcal{H}$ dans E , j^* l'injection de $\overline{E'}$ dans $\overline{\mathcal{H}'}$, θ l'isomorphisme canonique de $\overline{\mathcal{H}'}$ sur $\mathcal{H}$; donc H se prolonge bien en $\hat{H} = \theta$ et le prolongement est unique puisque $\overline{E'}$ est dense dans $\overline{\mathcal{H}'}$. De même $\overline{\mathcal{H}'}$ est défini par $\overline{E'} \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\theta^{-1}} \overline{\mathcal{H}'} \rightarrow E$, et se prolonge en $\hat{H}' = \theta^{-1}$ cqfd.

Ainsi nous voyons la relation entre les noyaux H et $\overline{\mathcal{H}'}$ de $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{H}'}$ dans E : dans un certain sens, ils sont inverses l'un de l'autre.

Construction de $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{H}'}$ par le noyau H de $\mathcal{H}$.

Nous savons construire $\mathcal{H}$ par son noyau H : $\mathcal{H}$ est le complété dans E de l'espace $\mathcal{H}_0 = H(\overline{E'})$ muni de la norme $\|H\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} = \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2}$ (Proposition 10). Mais, si $\mathcal{H}$ est normal, on peut aussi construire $\overline{\mathcal{H}'}$ à partir du noyau H de $\mathcal{H}$:

Proposition 29. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace normal de E , de noyau H . Alors $\overline{\mathcal{H}'}$ est le complété dans E de $\overline{E'}$, muni de la norme

$$(10,6) \quad \|\bar{e}'\|_{\overline{\mathcal{H}'}} = \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \text{ et du produit scalaire:}$$

$$(10,7) \quad (\bar{e}' | \bar{f}')_{\overline{\mathcal{H}'}} = \langle H\bar{e}', f' \rangle.$$

⁽⁵¹⁾ Voir Schwartz [3], page 7.

Démonstration. $\bar{E}'$ est dense dans $\bar{\mathcal{H}}'$, donc $\bar{\mathcal{H}}'$ est bien le complété dans E de $\bar{E}'$ muni de la norme induite par $\bar{\mathcal{H}}'$. Mais puisque $\hat{H} = \theta$, isomorphisme canonique de $\bar{\mathcal{H}}'$ sur $\mathcal{H}$ (Proposition 28 bis), on a $(\bar{e}' | \bar{f}')_{\bar{\mathcal{H}}'} = (H\bar{e}' | H\bar{f}')_{\mathcal{H}}$, on a bien (10,7), donc (10,6).

Dans le même ordre d'idées, soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ des sous-espaces hilbertiens de E , $\mathcal{K}$ normal; et soit v une application linéaire continue de E dans E . Nous avons vu à la Proposition 22 bis comment caractériser les inclusions $v(\bar{\mathcal{H}}') \subseteq \mathcal{K}$ ou $\supseteq \mathcal{K}$, par des inégalités portant sur v , et les noyaux $\bar{H}'$, K de $\bar{\mathcal{H}}'$ et $\mathcal{K}$. Mais il est intéressant d'avoir des inégalités faisant intervenir v et les noyaux H et K de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$. On remarquera simplement, en réutilisant (4,7), que

$$(10,7 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|Hv^*e'\|_{\bar{\mathcal{H}}'} = \|v^*\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} = \\ \text{Sup}_{f' \in E'} \frac{|\langle v^*\bar{e}', f' \rangle|}{\langle H\bar{f}', f' \rangle^{1/2}} = \text{Sup}_{f' \in E'} \frac{|\langle v f', e' \rangle|}{\langle H\bar{f}', f' \rangle^{1/2}}. \end{array} \right. \text{ D'où:}$$

Proposition 29 bis. Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, des sous-espaces hilbertiens de E , $\mathcal{K}$ normal; soient H et K leurs noyaux. Soit v une application linéaire continue de E dans E .

1°) La condition nécessaire et suffisante pour que $v(\bar{\mathcal{H}}') \subseteq \mathcal{K}$, est que pour tous $e', f' \in E'$, on ait:

$$(10,7 \text{ ter}) \quad |\langle v f', e' \rangle| \leq (H\bar{f}', f')^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2} .$$

Cette condition est vérifiée si, pour tout $e' \in E'$, on a

$$(10,7 \text{ quarto}) \quad |\langle v\bar{e}', e' \rangle| \leq \frac{1}{2} \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2} .$$

2°) La condition nécessaire et suffisante pour que $v(\bar{\mathcal{H}}') \supseteq \mathcal{K}$, est que l'on ait pour tout $e' \in E'$:

$$(10,7 \text{ quinto}) \quad \text{Sup}_{f \in E'} \frac{|\langle v f', e' \rangle|}{\langle H\bar{f}', f' \rangle^{1/2}} \geq \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}$$

Cette condition est vérifiée si l'on a, pour tout $e' \in E'$:

$$(10,7 \text{ sexto}) \quad |\langle v\bar{e}', e' \rangle| \geq \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2} .$$

Comme nous l'avons remarqué après la Proposition 22 bis, la condition encore plus forte

$$(10,7 \text{ septimo}) \quad \operatorname{Re} \langle v\bar{e}', e' \rangle \geq \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle K\bar{e}', e' \rangle^{1/2}$$

est connue sous le nom de relation de coercivité.

Prenons par exemple un ouvert X de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{H} = \mathcal{H} = \mathcal{H}^{-s}(X)$, défini page 127. Son noyau est D , l'opérateur différentiel de la formule (4,11).

Alors $\overline{\mathcal{H}'} = \mathcal{H}'_0(X)$ (voir exemple page 217). L'inégalité (10,7sexto) est alors, pour toute $\phi \in \mathcal{D}(X)$:

$$(10,7 \text{ octavo}) \quad \left| \int_X (v\phi)\bar{\phi} dx \right| \geq \|\phi\|_{\mathcal{H}'_0}^2$$

elle est suffisante pour que $v(\mathcal{H}'_0) \geq \mathcal{H}'^{-s}$; l'inégalité

$$(10,7 \text{ noveno}) \quad \left| \int_X (v\phi)\bar{\phi} dx \right| \geq \operatorname{const.} \|\phi\|_{\mathcal{H}'_0}^2$$

est suffisante pour que $v(\mathcal{H}'_0) \supset \mathcal{H}'^{-s}$. On retrouve des faits bien connus.

Proposition 30. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , de noyau H . Pour que $\bar{E}'$ soit sous-espace (non nécessairement dense) de $\mathcal{H}$ (avec injection faiblement continue), il faut et il suffit que $\bar{E}'_{\bar{\mathcal{H}'}}$, c. a d. $\bar{E}'$ muni de la semi-norme (10,6), ait une injection continue dans E , ou encore que sa boule unité

$$(10,8) \quad B = \{\bar{e}' \in \bar{E}'; \langle H\bar{e}', e' \rangle \leq 1\}$$

soit bornée dans E ((10,6) est alors une norme).

Pour que $\mathcal{H}$ soit normal (c. a d. pour que $\bar{E}'$ soit en outre dense dans $\mathcal{H}$), il faut et il suffit que $\bar{E}'_{\bar{\mathcal{H}'}}$ ait en outre un complété dans E (qui est alors $\overline{\mathcal{H}'}$), ou encore que B soit fermée dans $\bar{E}'$ pour la topologie induite par E . (B est alors l'intersection de $\bar{E}'$ avec la boule unité de $\overline{\mathcal{H}'}$).

Démonstration.

1°) Dire que $\bar{E}' \subset \mathcal{H}$, c'est dire (Proposition 8) que, pour tout $f' \in \bar{E}'$, $\text{Sup}_{\langle H\bar{e}', e' \rangle \leq 1} |\langle f', e' \rangle|$ est fini; en remplaçant $|\langle f', e' \rangle|$ par $|\langle f', \bar{e}' \rangle|$, cela revient à dire que B est faiblement bornée dans E , ou fortement bornée, ou que l'injection $\bar{E}'_{\mathcal{H}'} \rightarrow E$ est continue.

2°) Si $\mathcal{H}$ est normal, nous avons vu à la Proposition 29 que $\bar{E}'_{\mathcal{H}'}$ a un complété dans E , qui est $\overline{\mathcal{H}'}$. Supposons inversement que $\bar{E}'_{\mathcal{H}'}$ ait un complété dans E , soit $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H}$ est normal. Donc $\overline{\mathcal{H}'}$ est aussi normal. Mais c'est, d'après ce qui a été dit après (10,3), l'ensemble des h tels que $\bar{e}' \rightarrow \langle h, e' \rangle$ soit continue pour la topologie de $\bar{E}'_{\mathcal{H}'}$; c. à d. l'ensemble des h qui vérifient (4,6), donc c'est $\mathcal{H}$, qui est bien normal.

On sait que d'autre part (Proposition 1) $\bar{E}'_H$ a un complété dans E , si et seulement si B est fermée dans $\bar{E}'$, pour la topologie induite par E .

Remarque 1. Supposons que le noyau H de $\mathcal{H}$ se prolonge en une application linéaire faiblement continue de E dans E . Alors l'image réciproque par H de la boule unité de $\mathcal{H}$, partie faiblement compacte donc faiblement fermée de E , est faiblement fermée dans E ; son intersection avec $\bar{E}'$, qui est justement B , est fermé dans $\bar{E}'$ pour la topologie induite par E . Donc, dans ce cas, si B est bornée dans E , cela suffit pour que $\mathcal{H}$ soit normal. On peut encore le voir autrement. $H = H^*$ applique $\bar{E}'$ dans $\bar{E}'$; et $\mathcal{H}_0 = H(\bar{E}') \subset \bar{E}'$ est dense dans $\mathcal{H}$; il suffit donc que $\bar{E}'$ soit contenu dans $\mathcal{H}$ pour qu'il y soit dense et que $\mathcal{H}$ soit normal.

Remarque 2. Que $\mathcal{H}$ soit ou non normal, l'injection $j: \mathcal{H} \rightarrow E$ a toujours une adjointe $j^*: \bar{E}' \rightarrow \overline{\mathcal{H}'}$ (mais $\overline{\mathcal{H}'}$ n'est pas nécessairement identifiable à un sous-espace de E). On a toujours: $\|\bar{e}'\|_{\overline{\mathcal{H}'}} (définie par (10,6)) = \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} = \|H\bar{e}'\|_{\mathcal{H}} = \|\theta j^* \bar{e}'\|_{\mathcal{H}} = \|j^* \bar{e}'\|_{\overline{\mathcal{H}'}}$ (norme de $j^* \bar{e}'$ dans $\overline{\mathcal{H}'}$). Si $\mathcal{H}$ n'est pas dense dans E , j^* n'est pas injective, et $\|\bar{e}'\|_{\overline{\mathcal{H}'}}$ est seulement une semi-norme. De toute façon, j^* est une isométrie ⁽⁵²⁾ dense de $\bar{E}'_{\mathcal{H}'}$ dans $\overline{\mathcal{H}'}$ et permet de considérer $\overline{\mathcal{H}'}$ comme espace séparé complété de $\bar{E}'_{\mathcal{H}'}$; ce qui justifie l'écriture $\bar{E}'_{\overline{\mathcal{H}'}}$, $\|\bar{e}'\|_{\overline{\mathcal{H}'}}$. Si $\mathcal{H}$ est normal, j^* est injective, $\overline{\mathcal{H}'}$ est complété de $\bar{E}'_{\mathcal{H}'}$, son complété dans E .

(52) Cette isométrie n'est pas injective si $\bar{E}'_{\mathcal{H}'}$ n'est pas séparé.

Corollaire. Soient $\mathcal{H}_i, i \in I$, des espaces hilbertiens en nombre fini. Soit u_i une application linéaire continue de $\mathcal{H}_i$ dans E , et soit $\mathcal{H} = \sum_{i \in I} u_i(\mathcal{H}_i)$, de noyau H .

Identifions $\bar{\mathcal{H}}'_i$ avec $\mathcal{H}_i$, et soit $u_i^*: \bar{E}' \rightarrow \mathcal{H}_i$, l'adjointe de u_i . Munissons $\bar{E}'$ du produit scalaire

$$(10,9) \quad (\bar{e}' | \bar{f}')_{\bar{\mathcal{H}}'} = \sum_{i \in I} (u_i^* \bar{e}' | u_i^* \bar{f}')_{\mathcal{H}_i}$$

et de la norme

$$(10,10) \quad \|\bar{e}'\|_{\bar{\mathcal{H}}'}^2 = \sum_{i \in I} \|u_i^* \bar{e}'\|_{\mathcal{H}_i}^2 ;$$

il devient un espace préhilbertien $\bar{E}'_{\bar{\mathcal{H}}'}$.

Pour que $\bar{E}' \subset \mathcal{H}$ (avec injection faiblement continue), il faut et il suffit que l'injection $\bar{E}'_{\bar{\mathcal{H}}'} \rightarrow E$ soit continue; pour que $\mathcal{H}$ soit normal, il faut et il suffit qu'en outre $\bar{E}'_{\bar{\mathcal{H}}'}$ ait un complété dans E , et c'est alors $\bar{\mathcal{H}}'$.

Démonstration. Si on identifie $\bar{\mathcal{H}}'_i$ à $\mathcal{H}_i$, le noyau de $\mathcal{H}_i$ dans E est $u_i u_i^*$ (Proposition 21, le noyau de $\mathcal{H}_i$ dans lui-même étant l'identité), donc le noyau de $\mathcal{H} = \sum_{i \in I} \mathcal{H}_i$ dans E est $H = \sum_{i \in I} u_i u_i^*$. Alors (10,9) et (10,10) ne sont autres que (10,7) et (10,6) relatifs à H , car:

$$(10,11) \quad \begin{aligned} \langle H \bar{e}', \bar{f}' \rangle &= \sum_{i \in I} \langle u_i u_i^* \bar{e}', \bar{f}' \rangle_{E, E'} = \sum_{i \in I} (u_i u_i^* \bar{e}' | \bar{f}')_{E, \bar{E}} = \\ &= \sum_{i \in I} (u_i^* \bar{e}' | u_i^* \bar{f}')_{\mathcal{H}_i} , \end{aligned}$$

et il suffit alors d'appliquer la Proposition 30.

Remarque 1. Supposons que les $\mathcal{H}_i$ soient dans E , et que les u_i soient prolongeables en applications linéaires faiblement continues $\bar{E}' \rightarrow \bar{E}'$, et $E \rightarrow E$. Il en est alors de même de u_i^* , donc de $u_i u_i^*$ et de H . Alors on peut appliquer la remarque qui suit la Proposition 30; il suffit que $\bar{E}' \subset \mathcal{H}$ pour que $\mathcal{H}$ soit normal.

Remarque 2. Supposons que l'un des $\mathcal{H}_i$ soit un sous-espace de E contenant $\bar{E}'$, l'application u_i correspondante étant l'injection de $\mathcal{H}_i$ dans E ; alors à fortiori $\bar{E}' \subset \mathcal{H}$.

Exemple. Reprenons l'Exemple 2 page 126. Nous posons $E = \mathcal{D}'(X)$, X ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_p = L^2(X)$ pour tout indice $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ d'ordre $|p| \leq s$, $u_p = \sqrt{a_p} D^p$, dérivation, application linéaire continue de $\mathcal{H}_p$ dans E . A cause de l'anti-involution naturelle de $\mathcal{D}'$, on prend $\bar{E}' = \mathcal{D}(X)$. Alors $u_p^* = (-1)^{|p|} \sqrt{a_p} D^p$, application de $\bar{E}'$ dans $\mathcal{H}_p$. Comme les D^p sont prolongeables $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$, et que, pour $p = (0, 0, \dots, 0)$, $\mathcal{H}_p = L^2$ avec $u_p =$ injection $L^2 \rightarrow \mathcal{D}'$, les remarques 1 et 2 qui précèdent montrent que $\mathcal{H}$ est sûrement normal. En fait on voit directement que $\mathcal{D}$, muni du produit scalaire (10,9) qui n'est autre que (1, 1), a une injection continue dans $\mathcal{D}'(X)$ et un complété dans $\mathcal{D}'(X)$ qui n'est autre que $\mathcal{H}_0^s(X)$, adhérence de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}^s$. On a donc

$$\mathcal{H} = \sum_{|p| \leq s} \sqrt{a_p} D^p L^2 = (\overline{\mathcal{H}_0^s})' = \mathcal{H}^{-s}, \text{ et } \bar{\mathcal{H}}' = \mathcal{H}_0^s.$$

Le noyau de $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{-s}$ dans $\mathcal{D}'$ est donc l'opérateur différentiel

$$D = \sum_{|p| \leq s} (-1)^{|p|} a_p D^{2p}$$

(formule (4, 11), Exemple 2 page 148), considéré comme opérateur de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}^{-s}$ ou $\mathcal{D}'$. D'après la Proposition 28 bis, D est un isomorphisme de $\bar{\mathcal{H}}' = \mathcal{H}_0^s$ sur $\mathcal{H}^{-s}$; c'est bien un théorème classique de la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques. L'isomorphisme réciproque $G: \mathcal{H}^{-s} \rightarrow \mathcal{H}_0^s$ s'appelle opérateur de Green de D ; c'est le noyau du sous-espace hilbertien $\mathcal{H}_0^s$ de $\mathcal{D}'$ (Proposition 28 bis), si on le considère comme opérateur $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}_0^s - \mathcal{D}'$. D et G sont les isomorphismes canoniques réciproques entre $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{-s}$ et $\bar{\mathcal{H}}' = \mathcal{H}_0^s$.

Remarque. Supposons maintenant certains des a_p nuls. La Remarque 2 n'est plus applicable, car aucun des opérateurs u_p n'est maintenant l'identité. Et en effet, il n'est plus nécessairement exact que $\mathcal{H}$ soit normal; cela dépend des a_p , de X , de n . Il l'est toujours si X est borné dans $\mathbb{R}^n$ et l'un au moins des $a_p \neq 0$, car on sait alors que $\mathcal{D}_H$ a encore une injection continue dans $\mathcal{D}'$ ⁽⁵³⁾, et par conséquent a un complété dans $\mathcal{D}'$ (Remarque 1). Le

(53) Plus généralement, si $P(D)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants, on a, pour tout ouvert X borné de $\mathbb{R}^n$, une inégalité $\|\phi\|_{L^2} \leq \text{const.} \cdot \|P(D)\phi\|_{L^2}$; ce type d'inégalités, bien connu depuis longtemps pour des opérateurs particuliers, a été introduit en général par Malgrange [1], et généralisé par Hörmander [1].

noyau de $\mathcal{H}$ est toujours l'opérateur différentiel $\sum_{|p|=s} (-1)^{|p|} a_p D^{2p}$;
 si $\mathcal{H}$ est normal, cet opérateur a un opérateur de Green, qui est le noyau
 de $\bar{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{D}'$.

Cas des noyaux prolongeables.

On dira qu'un noyau $v: \bar{E}' \rightarrow E$ est prolongeable, s'il est faiblement continu de $\bar{E}'$ dans $\bar{E}'$, et se prolonge (nécessairement de manière unique puisque $\bar{E}'$ est dense dans E) en une application linéaire faiblement continue de E dans E qu'on appellera encore v . Son adjoint v^* est alors aussi prolongeable. Nous avons vu de tels noyaux prolongeables dans les remarques et exemples qui précèdent. Pour $E = \mathcal{D}'(X)$, $\bar{E}' = \mathcal{D}(X)$, les opérateurs différentiels à coefficients C^∞ sont prolongeables; pour $X = \mathbb{R}^n$, la convolution avec une distribution à support compact est prolongeable (le noyau d'une applicable prolongeable en théorie des noyaux, s'appelle aussi "régulier compact"). Pour $E = \mathcal{S}'$, $\bar{E}' = \mathcal{S}$, la transformation de Fourier est prolongeable, c'est même un isomorphisme. Si v est hermitien, $v^* = v$, il suffit qu'il soit faiblement continu $\bar{E}' \rightarrow \bar{E}'$ ou se prolonge en une application faiblement continue $E \rightarrow E$, pour qu'il ait à la fois les deux propriétés, donc soit prolongeable.

Soit v un noyau prolongeable, et w un noyau quelconque. Alors on peut composer v et w , et parler de $vw: \bar{E}' \xrightarrow{w} E \xrightarrow{v} E$, et de $wv: \bar{E}' \xrightarrow{v} \bar{E}' \xrightarrow{w} E$, comme de nouveaux noyaux. Plus généralement, on peut composer, dans un ordre quelconque, plusieurs noyaux, si tous, sauf un au plus, sont prolongeables; cette loi de composition est associative.

Si v est prolongeable on dit que w est inverse à gauche (resp. à droite) de v si $wv = I$ (resp. $vw = I$), où I est l'injection de $\bar{E}'$ dans E , prolongeable en l'identité $\bar{E}' \rightarrow \bar{E}'$ et $E \rightarrow E$. Si w est inverse à gauche et à droite, il est dit inverse bilatère ou simplement inverse. Si w et v sont hermitiens et si w est inverse à gauche ou à droite, il est inverse bilatère. Noter que $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ n'est pas une algèbre, et qu'un noyau v peut avoir une infinité d'inverses. S'il a un inverse prolongeable, il est un isomorphisme faible de $\bar{E}'$ sur $\bar{E}'$ et de E sur E et alors c'est son seul inverse. Si par exemple $E = \mathcal{D}'$, $\bar{E}' = \mathcal{D}$, et si v est un opérateur différentiel C^∞ , un inverse (à gauche ou à droite) s'appelle

aussi noyau élémentaire (à gauche ou à droite) de v . Il est bien connu que, s'il y en a, il y en a en général une infinité.

Proposition 31. *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , de noyau H prolongeable. Pour que $\mathcal{H}$ soit normal, il faut et il suffit que H ait un inverse $L \geq 0$; dans ce cas il en a en général une infinité, et le noyau $\bar{H}'$ de $\bar{\mathcal{H}}'$ est le plus petit noyau ≥ 0 inverse de H .*

On a $L = \bar{H}' + N$, ou $\bar{H}'$ et N sont étrangers; on a $HN = NH = 0$. Le sous-espace hilbertien $\mathcal{L}$ de noyau L est somme directe de deux sous-espaces fermés orthogonaux, $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap H^{-1}(\{0\})$, et $\bar{\mathcal{H}}'$, adhérence de $\bar{E}'$ dans $\mathcal{L}$. L'opérateur $H\bar{H}'$ est l'identité sur $\mathcal{H}$, l'opérateur $\bar{H}'H$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}$ sur $\bar{\mathcal{H}}'$ (donc l'identité sur $\bar{\mathcal{H}}'$).

Démonstration.

1°) Supposons $\mathcal{H}$ normal. Le prolongement $\hat{H}: \bar{\mathcal{H}}' \rightarrow \mathcal{H}$ de H défini à la Proposition 22 bis n'est autre que H lui-même, supposé prolongé à E tout entier (en effet H et $\hat{H}$ sont tous deux faiblement continus de $\bar{\mathcal{H}}'$ dans E et coïncident sur $\bar{E}'$ dense dans $\bar{\mathcal{H}}'$). Alors on a vu, dans cette proposition, que le noyau $\bar{H}'$ de $\bar{\mathcal{H}}'$ se prolonge en $\hat{H}': \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}'$, et que $\hat{H}$ et $\hat{H}'$ sont inverses l'un de l'autre: cela veut bien dire que $\bar{H}'$ est inverse de H au sens donné juste avant la Proposition 31.

2°) Inversement, supposons que H ait un inverse $L \geq 0$. Soit $\mathcal{L}$ le sous-espace hilbertien de E de noyau L . L'image $H(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ par H a pour noyau, d'après la Proposition 21 appliquée à l'opérateur linéaire faiblement continu H de E dans E , $HLH^* = HLH = H$ puisque HL (ou LH) = I . Donc cette image est l'espace $\mathcal{H}$. Comme alors $\bar{E}' = HL(\bar{E}')$, et que $L(\bar{E}') \subset \mathcal{L}$, on a $\bar{E}' \subset H(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$, et d'après la Remarque 1 après la Proposition 30, $\mathcal{H}$ est bien normal. [Remarquons qu'on voit directement que $\bar{E}'$ est dense dans $\mathcal{H}$: car $L(\bar{E}')$ est dense dans $\mathcal{L}$ (Proposition 7), et H est continue surjective de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{H}$ puisque $H(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$]. La Proposition 21 dit en outre ceci: si $\mathcal{N} = (H^{-1}\{0\}) \cap \mathcal{L}$, et si $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{L}$, alors $HL(\bar{E}') = \bar{E}'$ est un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. $\bar{E}'$ est aussi sous-espace dense de $\bar{\mathcal{H}}'$; nous allons voir que, sur $\bar{E}'$, les normes induites par $\mathcal{H}$ et $\bar{\mathcal{H}}'$ coïncident. En effet, d'après (4,4) appliqué à L et à $H\bar{e}' \in \bar{E}'$:

$$(10,12) \quad \begin{aligned} \|\bar{e}'\|_{\mathcal{X}} &= \|\bar{e}'\|_{\mathcal{L}} = \|LH\bar{e}'\|_{\mathcal{L}} = \langle LH\bar{e}', \overline{H\bar{e}'} \rangle_{E, E'}^{1/2} \\ &= \langle HLH\bar{e}', e' \rangle_{E, E'}^{1/2} = \langle H\bar{e}', e' \rangle^{1/2} = \|\bar{e}'\|_{\overline{\mathcal{H}'}} . \end{aligned}$$

d'après (10,6).

Alors $\mathcal{H}$ et $\overline{\mathcal{H}'}$ coïncident, comme complétés dans E de $\bar{E}'$ pour la norme (10,12). Comme $\mathcal{H}$ est sous-espace de $\mathcal{L}$ pour la norme induite on a $\overline{\mathcal{H}'} = \mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ donc $H' \leq L$: $\bar{H}'$ est bien le plus petit noyau ≥ 0 inverse de H . Le reste de l'énoncé est évident; $H\bar{H}'$ est l'identité sur $\mathcal{H}$ d'après la Proposition 22 bis; $\bar{H}'H$ est défini sur $\mathcal{L}$, puisque $H(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$ et il vaut l'identité sur $\overline{\mathcal{H}'}$ et 0 sur $\mathcal{N}$, c'est donc bien le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}$ sur $\overline{\mathcal{H}'}$.

Remarque 1. On savait à l'avance que $\overline{\mathcal{H}'} \cap H^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, puisque H est un isomorphisme de $\overline{\mathcal{H}'}$ sur $\mathcal{H}$. La Proposition 31 donne la forme générale des noyaux $L \geq 0$ inverses de $H:L = \bar{H}' + N$, avec $N \geq 0$, $HN = NH = 0$, et la structure générale des sous-espaces hilbertiens correspondants: $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{H}'} + \mathcal{N}$, avec $\mathcal{N}$ sous-espace hilbertien arbitraire de $H^{-1}(\{0\}) \subset E$.

Remarque 2. Il faut se méfier de ces "inverses" de H et se rappeler que $\mathcal{L}(\bar{E}'; E)$ n'est pas une algèbre. $\bar{H}'$ est un inverse de $\mathcal{H}$, $\bar{H}'H$ vaut l'identité sur $\mathcal{D}$ et sur $\overline{\mathcal{H}'}$, mais pas sur $\mathcal{L}$! Dans le même ordre d'idées, on pourrait croire que les noyaux L et N , comme le noyau $\bar{H}'$, se prolongent en opérateurs continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$. Il n'en est rien: si $\mathcal{N} \neq \{0\}$, L et N ne sont jamais continues de $\bar{E}'$ munis de la topologie induite par $\mathcal{H}$ dans E .

Si en effet l'un d'eux était continu, l'autre le serait puisque $L - N = \bar{H}'$ est continu, de $\mathcal{H}$ sur $\overline{\mathcal{H}'}$. Et alors L et N se prolongeraient, par continuité, en applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ dans E quasi-complet. Mais NH est nul sur $\bar{E}'$, donc N est nul sur $H(\bar{E}')$, dense dans $\mathcal{H}$ (Proposition 7); donc N serait nul sur $\mathcal{H}$. Mais alors $N(\bar{E}') \subset N(\mathcal{H})$ serait aussi $\{0\}$, or il doit être dense dans $\mathcal{N}$.

Application aux problèmes aux limites du type de Neumann.

On pose fréquemment les problèmes aux limites elliptiques de la façon suivante. On se donne un sous-espace hilbertien $\mathcal{L}$ de $E = \mathcal{D}'(X)$, X ouvert

de R' . On suppose que $\bar{E}'$ est contenu dans $\mathcal{L}$, avec injection faiblement continue, mais non nécessairement dense (et en fait, les cas les plus intéressants sont ceux où il n'est pas dense). Pour tout e' de E' l'application linéaire $e' \mapsto (l|e')$ est faiblement continue sur E' , donc définit un élément Hl de $\mathcal{L}$ avec

$$(10,13) \quad \langle Hl, e' \rangle = (l|e')_{\mathcal{L}}.$$

H est une application linéaire faiblement continue, donc continue, de $\mathcal{L}$ dans E .

(Cet opérateur est, si l'on identifie $\mathcal{L}$ à son anti-dual $\overline{\mathcal{L}'}$, l'adjoint de l'injection de $\bar{E}'$ dans $\mathcal{L}$). On suppose que H est un opérateur différentiel elliptique C^∞ , donc un opérateur prolongeable au sens défini page 218. Alors $\mathcal{L}$ définit un problème aux limites relatif à l'opérateur elliptique H , comme suit. On dit qu'un élément l de $\mathcal{L}$ vérifie la condition homogène de Neuman relative à $\mathcal{L}$ si Hl est dans $\bar{E}'$, et si on a

$$(10,14) \quad \langle Hl, \bar{k} \rangle = (l|k)_{\mathcal{L}} \text{ pour tout } k \text{ de } \mathcal{L}.$$

Soit alors $\bar{e}' \in \bar{E}'$. On appelle solution du problème de Neumann

$$(10,15) \quad Hl = \bar{e}'$$

un élément l de $\mathcal{L}$ vérifiant (10,15) et la condition homogène (10,14). C'est simplement équivalent à dire que l'on a, pour $k \in \mathcal{L}$:

$$(10,16) \quad \langle \bar{e}', \bar{k} \rangle = (l|k)_{\mathcal{L}}, \text{ ou } \langle k, e' \rangle = (k|l)_{\mathcal{L}}.$$

Et on montre sans difficulté l'existence et l'unicité d'un tel élément l , que nous noterons $L\bar{e}'$; L est appelé le noyau de Neumann du problème de Neumann défini par $\mathcal{L}$. (10,16) devient

$$(10,17) \quad \langle k, e' \rangle = (k|L\bar{e}')_{\mathcal{L}} \text{ pour tout } k \in \mathcal{L}.$$

Interprétons ces résultats en termes de noyaux de sous-espaces hilbertiens. H est faiblement continu de $\bar{E}'$ dans E , et trivialement hermitien ≥ 0 , car (10,13) donne

$$(10,18) \quad \langle H\bar{e}', e' \rangle = \|e'\|_{\mathcal{L}}^2.$$

Donc il définit un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E ; et par hypothèse H est prolongeable, nous pouvons donc appliquer les résultats qui précèdent. Sur $\bar{E}'$, la norme $\bar{E}'_{\mathcal{H}}$, définie à la formule (10,6) n'est autre, d'après (10,17), que la norme induite par $\mathcal{L}$. Donc les conditions de la Proposition 30 sont vérifiées, $\mathcal{H}$ est normal, et l'adhérence de $\bar{E}'$ dans $\mathcal{L}$, qui est le complété de $\bar{E}'_{\mathcal{H}}$, dans E , est l'anti-dual $\overline{\mathcal{H}'}$ de $\mathcal{H}$. Sur $\overline{\mathcal{H}'}$, H est l'isomorphisme canonique $\overline{\mathcal{H}'} \rightarrow \mathcal{H}$; son inverse $\bar{H}'$, noyau de $\overline{\mathcal{H}'}$, s'appelle aussi noyau de Green de H . Soit $\mathcal{N}$ l'orthogonal de $\overline{\mathcal{H}'}$ dans $\mathcal{L}$; sur $\mathcal{N}$, H est nul d'après (10,13); donc l'espace $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{H}'} + \mathcal{N}$ a exactement l'allure indiquée à la Proposition 31, et son noyau est un inverse de H . Ce noyau n'est autre que L , d'après l'égalité (10,17). On voit donc qu'en réalité, *des que $\mathcal{L}$ est donné, le noyau de Neumann L est immédiatement connu*, avant même toute interprétation d'un problème aux limites: c'est le noyau de $\mathcal{L}$. La propriété $L - \bar{H}' = N \geq 0$ résulte de la Proposition 31. Le problème de Dirichlet est un problème de Neumann particulier, correspondant à $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{H}'}$.

Par exemple, si D est l'opérateur différentiel (4,11), $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{-s}$, $\overline{\mathcal{H}'} = \mathcal{H}_0^s$ (problème de Dirichlet); le problème de Neumann (correspondant à l'annulation de dérivées normales au contour) correspond à $\mathcal{L} = \mathcal{H}^s$. Nous retrouvons ainsi ce qui a été annoncé page 149.

Fréquemment, $\mathcal{L}$ est donné comme espace hilbertien, mais on se donne en plus une forme bilinéaire continue hermitienne B sur $\mathcal{L}$, coercive, c. à d. telle que

$$(10,19) \quad B(l, l) \geq \text{const.} \|l\|_{\mathcal{L}}^2.$$

Et c'est par rapport à B et non à $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{L}}$ qu'on résout le problème. Mais on remarquera que la structure hilbertienne initiale de $\mathcal{L}$ est sans intérêt, et que B définit une structure hilbertienne équivalente, à laquelle on applique ce qui précède.

Enfin si B est seulement une forme sesquilinéaire continue, non hermitienne mais coercive, c. à d. vérifiant

$$(10,20) \quad \text{Re } B(l, l) \geq \text{const.} \|l\|_{\mathcal{L}}^2,$$

on peut résoudre le même problème de Neumann relativement à B . Cette fois, le noyau de Neumann est le noyau de $\mathcal{L}$, muni d'une structure "sesquilinéaire" (non hilbertienne, ni même hermitienne au sens du §12), c. à d. de la forme B . Le noyau se définit dans ce cas simple comme pour une structure hilbertienne. On définit une application linéaire continue γ de $\mathcal{L}$ dans $\bar{\mathcal{L}}'$;

$$(10,21) \quad B(k|k) = (h|\gamma k)_{\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}'}$$

La formule de coercivité montre que γ est un monomorphisme, car $\|\gamma l\| \geq \text{const.} \|l\|_{\mathcal{L}}$, mais aussi que son adjoint, qui opère encore de $\mathcal{L}$ dans $\bar{\mathcal{L}}'$, est un monomorphisme, donc c'est un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\bar{\mathcal{L}}'$; si θ est l'isomorphisme réciproque $\bar{\mathcal{L}}' \rightarrow \mathcal{L}$, on définira le noyau associé à $(\mathcal{L}; B)$ par $L = j\theta j^*$, et c'est bien lui le noyau de Neumann vérifiant (10,17).

Enfin on se préoccupera en général de prolonger L à des espaces plus grands que $\bar{E}'$. Si F est un sous-espace de E , à injection faiblement continue normal, et si $\mathcal{L} \subset F$ avec une injection faiblement continue, on pourra affirmer que L se prolonge en une application linéaire faiblement continue de $\bar{F}'$ dans $\mathcal{L}$. Par exemple, dans le cas cité plus haut, où $\mathcal{L} = \mathcal{H}^s$, on peut, si la frontière $\dot{X}$ de X est assez régulière, prendre $F = \mathcal{H}^{-1/2}$ ⁽⁵⁴⁾, et L opère continuellement de $\mathcal{H}^{-1/2}$ dans $\mathcal{H}^s$. Par contre, comme nous l'avons indiqué à la Remarque 2 après la Proposition 31, pour X borné, L n'opère jamais de $\mathcal{H}^{-s}$ dans $\mathcal{H}^s$.

§11. Applications à la théorie du potentiel.

Charges et potentiels. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, D un noyau ≥ 0 : $\mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$; on a donc, $\forall \phi \in \mathcal{D}: \langle D\phi, \bar{\phi} \rangle \geq 0$. D définit un sous-espace hilbertien $\mathcal{W}$ de $\mathcal{D}'(X)$; on suppose essentiellement dans la suite que $\mathcal{W}$ est normal. On l'appelle alors espace des charges d'énergie finie⁽⁵⁵⁾; c'est le complété dans $\mathcal{D}'$ de $D\mathcal{D}$, muni de la norme

$$(11,1) \quad \|D\phi\|_{\mathcal{W}} = \langle D\phi, \bar{\phi} \rangle^{1/2}$$

⁽⁵⁴⁾ Si X est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière assez régulière, $\mathcal{H}^s$ est normal si et seulement si $s \leq 1/2$. Voir Lions [1], Chapitre II.

⁽⁵⁵⁾ Pour les notions de charges et potentiels d'énergie finie, et leurs principales propriétés, voir par exemple Deny [1].

Le carré de la norme d'une charge $T \in \mathcal{W}$ s'appelle son *énergie*. $\overline{\mathcal{W}}' = \mathcal{U}$ s'appelle *espace des potentiels d'énergie finie*; il est aussi normal; son noyau G est appelé *l'opérateur de Green de D dans X* . On a vu (Proposition 22 bis) que D et G se prolongent en opérateurs, encore notés D et G : $\mathcal{U} \xrightarrow{D} \mathcal{W}$, $\mathcal{W} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$, qui sont les isomorphismes canoniques réciproques entre $\mathcal{W}$ et $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{W}}'$; D prolongé s'appelle aussi *l'opérateur charge*, G prolongé *l'opérateur potentiel*; pour une charge $T \in \mathcal{W}$, GT est son potentiel; pour un potentiel $U \in \mathcal{U}$, DU est sa charge.

On a, pour $S \in \mathcal{W}$, $T \in \mathcal{W}$; $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$:

$$(11,2) \quad \begin{cases} (S|T)_{\mathcal{W}} = \langle GS, \bar{T} \rangle_{\overline{\mathcal{W}}', \overline{\mathcal{W}}} = (GS|T)_{\overline{\mathcal{W}}', \overline{\mathcal{W}}} \\ (U|V)_{\mathcal{U}} = \langle DU, \bar{V} \rangle_{\mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}'} = (DU|V)_{\mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}'} \\ (T|DU)_{\mathcal{W}} = (T|U)_{\mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}'} = \langle T, \bar{U} \rangle_{\mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}'} = (GT|U)_{\mathcal{U}} \end{cases}$$

Il est assez habituel en théorie du potentiel de partir de D , de trouver G , et de construire $\mathcal{W}$ à partir de G comme le complété dans $\mathcal{D}'$ (Proposition 29) de $\mathcal{D}$ muni de la norme

$$(11,3) \quad \|\phi\|_{\mathcal{W}} = \langle G\phi, \bar{\phi} \rangle^{1/2}$$

C'est une bidualisation assez illogique, puisque $\mathcal{W}$ peut être construit par (11,1) sans connaître G , et même si $\mathcal{U}$ et G n'existent pas, c. à d. si $\mathcal{W}$ n'est pas normal. En même temps la relation $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{W}}'$ est en général passée inaperçue.

Balayage. La balayée de $T \in \mathcal{W}$ sur un ensemble fermé F de $\mathbb{R}^n$ est la projection orthogonale (dans $\mathcal{W}$) T_F^D de T sur le sous-espace fermé $\mathcal{W}_F$ de $\mathcal{W}$ formé des distributions à support dans F .

Pour avoir une théorie intéressante, on est en général obligé de faire, sur l'anti-dualité entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$, l'hypothèse supplémentaire suivante:

(Supp) Si $U \in \mathcal{U}$ et $T \in \mathcal{W}$ ont des supports sans points communs, et si celui de T est compact, alors $(U, T)_{\overline{\mathcal{W}}', \overline{\mathcal{W}}} = \langle U, \bar{T} \rangle_{\overline{\mathcal{W}}', \overline{\mathcal{W}}} = 0$.

Comme $\langle U, \bar{T} \rangle_{\overline{\mathcal{W}}', \overline{\mathcal{W}}}$ est toujours défini par passage à la limite de $\langle U, \bar{\phi}_\nu \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$ pour des ϕ_ν de $\mathcal{D}$ tendant vers T dans $\mathcal{W}$, cette propriété sera sûrement conséquence de la suivante:

Toute $T \in \mathcal{W}$ à support compact est limite dans $\mathcal{W}$ d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}$, à supports dans un voisinage arbitraire du support de T .

On voit que cette propriété sera elle-même conséquence de la propriété d'approximation par régularisation ⁽⁵⁶⁾, fréquemment satisfaite par $\mathcal{W}$.

Proposition 32 Les potentiels de T et de sa balayée T_F^D sont égaux dans l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ de F . Si l'hypothèse (Supp) est réalisée, deux charges dont les potentiels coïncident au voisinage d'un compact F ont même balayée sur F .

Démonstration.

La balayée T_F^D , projection orthogonale de T sur $\mathcal{W}_F$, est caractérisée par: $T_F^D \in \mathcal{W}_F$ et

$$(11,4) \quad \forall R \in \mathcal{W}_F, (T|R)_{\mathcal{W}} = (T_F^D|R)_{\mathcal{W}}.$$

En faisant $R = \phi \in \mathcal{D}$ à support dans $\overset{\circ}{F}$, et en utilisant la première formule (11,2), on voit que GT et GT_F^D coïncident sur de telles fonctions ϕ donc coïncident dans $\overset{\circ}{F}$. On voit qu'on a même plus: GT et GT_F^D ont même valeur sur toute $\phi \in \mathcal{D}$ à support dans F .

Si d'autre part F est compact et (Supp) réalisée, et si $GT = 0$ au voisinage de F , GT et R ont des supports disjoints pour $R \in \mathcal{W}_F$, donc $(GT|R)_{\overline{\mathcal{W}}}, \overline{\mathcal{W}} = 0$ donc $(T|R)_{\mathcal{W}} = 0$, et la balayée de T sur F est nulle; par différence, on en déduit la deuxième partie de l'énoncé.

Si F est compact, il existe $T \in \mathcal{W}$ dont le potentiel GT soit égal à 1 au voisinage de F ; il suffit de prendre $\phi \in \mathcal{D}$ égale à 1 au voisinage de F , alors $\phi \in \mathcal{U}$ et $T = D\phi$ répond à la question. Si (Supp) est vérifiée, la balayée T_F^D de T sur F est indépendante du choix de T , c'est la distribution d'équilibre de F . Son potentiel vaut 1 dans l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ de F .

Restriction à un ouvert $Y \subset X$

Soit maintenant Y un ouvert de X . Il existe une injection naturelle $i: D(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$; pour $\phi \in \mathcal{D}(Y)$, $i\phi$, encore notée ϕ , s'obtient en prolongeant ϕ par 0 dans $X \cap \complement Y$. La transposée ${}^t i$ et l'adjointe i^* sont l'opération de

⁽⁵⁶⁾ Schwartz [3], page 8.

restriction $\rho: \mathcal{D}'(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$: pour $T \in \mathcal{D}'(X)$, ρT , encore notée T , est sa restriction à l'ouvert Y de X . Le noyau D a aussi une restriction ρD , encore notée D , à Y : pour $\phi \in \mathcal{D}(Y)$, $(\rho D)\phi = \rho(D\phi) = \rho Di\phi$ ou $i^*Di\phi$:

$$\mathcal{D}(Y) \xrightarrow{i} \mathcal{D}(X) \xrightarrow{D} \mathcal{D}'(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{D}'(Y).$$

Bien entendu ρD est encore un noyau ≥ 0 sur Y , et définit un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}'(Y)$ qui n'est autre, d'après la Proposition 21, que l'image $i^*\mathcal{W} = \rho\mathcal{W}$ de $\mathcal{W}$ par la restriction ρ (mais, en tant que défini par ρD , il ne dépend que de la restriction de D à Y et non de l'ouvert X sur lequel D était initialement défini; aussi l'appellerons-nous $\mathcal{W}(Y)$, espace des charges d'énergie finie défini par D sur Y). Une distribution S de $\mathcal{D}'(Y)$ appartient à $\mathcal{W}(Y)$, si et seulement si elle est la restriction ρT à Y d'une distribution T de $\mathcal{W}$, et en outre:

$$(11,5) \quad \|S\|_{\mathcal{W}(Y)} = \inf_{\rho T=S} \|T\|_{\mathcal{W}}.$$

Si nous reprenons la Proposition 21, $\mathcal{W}$ est somme directe de deux sous-espaces orthogonaux: $\mathcal{W}_F = \mathcal{W} \cap \rho^{-1}(\{0\})$, ensemble des charges de support dans $F = X \cap \mathbf{G}Y$, et $\mathcal{W}_F^+ = \mathcal{L}$, son orthogonal, adhérence de $D\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{W}$, espace des charges dont la balayée sur F est nulle. Alors ρ est une isométrie de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{W}(Y)$, de sorte que le Inf de (11,5) est un Min: pour $S \in \mathcal{W}(Y)$, il existe une T et une seule de $\mathcal{W}$ telle que $\rho T = S$ et $\|T\|_{\mathcal{W}} = \|S\|_{\mathcal{W}(Y)}$, elle est caractérisée par le fait d'être dans $\mathcal{L}$. Si $T \in \mathcal{W}$ est telle que $\rho T = S$, et si T_F^D est sa balayée sur F , $T - T_F^D$ est la projection orthogonale de T sur $\mathcal{L}$, et on a:

$$(11,6) \quad \|S\|_{\mathcal{W}(Y)}^2 = \|T - T_F^D\|_{\mathcal{W}}^2 = \|T\|_{\mathcal{W}}^2 - \|T_F^D\|_{\mathcal{W}}^2.$$

Puisque $D\mathcal{D}(Y) \subset \mathcal{L}$, on a, pour $\phi \in \mathcal{D}(Y)$,

$$(11,6 \text{ bis}) \quad \|D\phi\|_{\mathcal{W}(Y)} = \|D\phi\|_{\mathcal{W}}.$$

Le fait que $\mathcal{W}$ soit normal dans $\mathcal{D}'(X)$ n'entraîne pas nécessairement que $\mathcal{W}(Y)$ le soit dans $\mathcal{D}'(Y)$. Si $\phi \in \mathcal{D}(Y)$, $i\phi$ est dans $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}'(X)$, et sa

restriction $i^*i\phi$ est ϕ elle-même; comme $\mathcal{W}$ est normal, $i\phi \in \mathcal{W}$, donc $\phi = i^*i\phi \in \mathcal{W}(Y)$. Ainsi $\mathcal{D}(Y)$ est un sous-espace de $\mathcal{W}(Y)$, mais non nécessairement dense. L'opérateur ρD ne permet donc pas nécessairement de faire une théorie des potentiels dans Y . $\mathcal{D}(Y)$ est dense dans $\mathcal{W}(Y)$ si et seulement si $i\mathcal{D}(Y) \subset \mathcal{W}$ a une projection orthogonale sur $\mathcal{L}$ dense dans $\mathcal{L}$.

Cas où D est un opérateur différentiel C^∞ .

Nous nous bornerons désormais à ce cas (D est alors prolongeable dans $\mathcal{D}'(X)$ au sens du paragraphe précédent page 218). Alors ρD est le même opérateur différentiel restreint à Y , on l'écrit encore D et il est encore prolongeable dans $\mathcal{D}'(Y)$. Donc (Remarque 1 après la Proposition 30) $\mathcal{W}(Y)$ est normal: $D(\mathcal{D}(Y)) \subset \mathcal{D}(Y)$ est dense dans $\mathcal{W}(Y)$ et D définit une théorie des potentiels dans Y . On peut aussi le voir en appliquant la Proposition 31: ρG est un inverse ≥ 0 de ρD (pour $\phi \in \mathcal{D}(Y)$, $\rho G \cdot \rho D \cdot \phi = \rho \cdot G D \phi = \phi$, $\rho D \cdot \rho G \cdot \phi = \rho \cdot D G \rho = \phi$), donc $\mathcal{W}(Y)$ est normal. En outre, cette même Proposition 31 montre que $\rho \mathcal{U}$ est somme directe de deux sous-espaces fermés orthogonaux: $\mathcal{N} = \rho \mathcal{U} \cap D^{-1}(\{0\})$, espace des $U \in \rho \mathcal{U}$ vérifiant $DU = 0$ dans Y , et $\mathcal{U}(Y) = \overline{\mathcal{W}(Y)'}$, qui sera l'espace des potentiels d'énergie finie dans Y , relativement au noyau D (et qui ne dépend que de la restriction de D à Y , et non de l'ouvert X dans lequel D était initialement défini, ni de $\mathcal{W}$ et de $\mathcal{U}$ relatifs à X). Cette décomposition $\rho \mathcal{U} = \mathcal{N} + \mathcal{U}(Y)$ est essentielle: l'espace des potentiels de D dans Y n'est pas la restriction à Y de l'espace des potentiels de D dans X , il est plus petit. Si N est le noyau de $\mathcal{N}$ relatif à $\mathcal{D}'(Y)$, et $G(Y)$ le noyau de $\mathcal{U}(Y)$, $G(Y)$ est l'opérateur de Green de D pour l'ouvert Y ; ce n'est pas la restriction $\rho G = G$ de G à Y , mais l'on a $\rho G = N + G(Y)$. $G(Y)$ est le plus petit inverse ≥ 0 de D dans Y . (11,6) donne (puisque $G: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ et $G(Y): \mathcal{W}(Y) \rightarrow \mathcal{U}(Y)$ sont des isométries), pour $\phi \in \mathcal{D}(Y)$:

$$(11,7) \quad \begin{cases} \langle G\phi, \bar{\phi} \rangle = \|G\phi\|_{\mathcal{U}}^2 = \|\phi\|_{\mathcal{W}}^2 \\ \langle G(Y)\phi, \bar{\phi} \rangle = \|G(Y)\phi\|_{\mathcal{U}(Y)}^2 = \|\phi\|_{\mathcal{W}(Y)}^2 = \|\phi\|_{\mathcal{W}}^2 - \|\phi_F^D\|_{\mathcal{W}}^2 \end{cases}$$

D'après la Proposition 31, on a $DN = ND = 0$; $D \cdot G(Y)$ est l'identité sur $\mathcal{W}(Y)$; $G(Y) \cdot D$ est le projecteur orthogonal de $\rho \mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}(Y)$.

La décomposition orthogonale $\mathcal{W} = \mathcal{W}_F + \mathcal{L}$ donne, puisque G est une isométrie de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{U}$, une décomposition orthogonale $\mathcal{U} = G\mathcal{W}_F + G\mathcal{L}$. $G\mathcal{W}_F$ est l'espace des potentiels U sur X , vérifiant $DU = 0$ dans Y . On peut à son tour le décomposer en somme orthogonale $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, où $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap \rho^{-1}(\{0\})$, est l'ensemble $\mathcal{U}_F$ des potentiels sur X à support dans F , ou nuls dans Y , et $\mathcal{U}_2$ son orthogonal dans $G\mathcal{W}_F$; ρ est une isométrie de $\mathcal{U}_2$ sur $\mathcal{N}$. Alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3$, $\mathcal{U}_3 = G\mathcal{L}$; puisque $\mathcal{L}$ est l'adhérence de $D(\mathcal{D}(Y))$ dans $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}_3$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{U}$, et les distributions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{U}_3$ ont leur support dans $\bar{Y}$. En outre, ρ est une isométrie de $\mathcal{D}(Y) \subset \mathcal{U}_3$ sur $\mathcal{D}(Y) \subset \mathcal{U}(Y)$: (pour $\phi \in \mathcal{D}(Y)$, $\|\phi\|_{\mathcal{U}}^2 = \|\phi\|_{\mathcal{U}(Y)}^2 = \langle D\phi, \bar{\phi} \rangle$) donc, en prolongeant par continuité, une isométrie de $\mathcal{U}_3$ sur $\mathcal{U}(Y)$.

Ces développements montrent que certaines démonstrations classiques de la symétrie ou de la positivité du noyau de Green $G(Y)$ de D dans Y sont maladroités (et en particulier font intervenir beaucoup trop d'hypothèses): $G(Y)$, noyau de $\overline{\mathcal{W}(Y)}$ dans $\mathcal{D}'(Y)$, est hermitien ≥ 0 .

Remarquer aussi qu'il n'y a pas symétrie entre les rôles de $\mathcal{W}$ et de $\mathcal{U}$, de D et de G : D est prolongeable, G ne l'est pas. C'est ce qui fait que $\rho\mathcal{W}$ est normal alors que $\rho\mathcal{U}$ contient $\mathcal{D}(Y)$ mais n'est pas normal, de sorte que $\mathcal{W}(Y) = \rho\mathcal{W}$, $\mathcal{U}(Y) \neq \rho\mathcal{U}$; de même pour $\phi \in \mathcal{D}(Y)$, $\|\phi\|_{\mathcal{U}(Y)} = \|\phi\|_{\mathcal{U}}$, alors que $\|\phi\|_{\mathcal{W}(Y)} \neq \|\phi\|_{\mathcal{W}}$ (Formule (11,7)) (mais $\|D\phi\|_{\mathcal{W}(Y)} = \|D\phi\|_{\mathcal{W}}$, (11, 6 bis)).

Enfin le problème de Dirichlet relatif à D et Y se pose comme suit. Disons qu'un potentiel $U \in \rho\mathcal{U}$ est "nul au bord de Y " si il est adhérent à $\mathcal{D}(Y)$ dans $\rho\mathcal{U}$, c. à d. élément de $\mathcal{U}(Y)$. Alors, pour $T \in \mathcal{W}(Y)$, $U = G(Y)T$ est l'unique solution de $DU = T$ dans Y , nulle au bord. Si $V \in \rho\mathcal{U}$, l'unique solution de $DU = T$, égale à V au bord, est $V + G(Y) \cdot (T - DV)$.

Comparons ces résultats généraux à ceux de la théorie newtonienne du potentiel, correspondant à $D = -\Delta + a$, Δ laplacien dans $\mathbb{R}^n$, $a > 0$. Prenons $X = \mathbb{R}^n$, et omettons le partout.

On se trouve exactement dans la situation de l'exemple page 223; l'espace $\mathcal{W}$ de noyau $-\Delta + a$ est $\sqrt{a}L^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} L^2 = \mathcal{H}^{-1}$ qui est bien normal, et son anti-dual $\mathcal{U}$ est $\mathcal{H}^1$, avec le produit scalaire

$$(11,8) \quad (f|g)_{\mathcal{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(af\bar{g} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} \right) dx;$$

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(a|f|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx .$$

Le noyau de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{D}'$ est l'opérateur de Green $G = G_a$ de $-\Delta + a$; $-\Delta + a$ et G_a sont les isomorphismes canoniques réciproques entre $\mathcal{H}^1$ et $\mathcal{H}^{-1}$, pour la norme (11,8) dans $\mathcal{H}^1$. Le balayage est bien celui qui est défini dans la théorie classique du potentiel. Il existe, de plus, dans cette théorie, des propriétés particulières: on peut définir la notion de capacité d'un ensemble, et de propriétés vérifiées quasi partout sur $\mathbb{R}^n$, c. à d. sauf sur un ensemble de capacité nulle; un potentiel $U \in \mathcal{U}$ est une classe de fonctions définies quasi-partout et deux à deux quasi-partout égales; la propriété (Supp) (page 224) est vérifiée puisque $\mathcal{H}^1$ a la propriété d'approximation par régularisation. La Proposition 32 s'étend comme suit: T_F^D est caractérisée par le fait qu'elle a son support dans F , et que son potentiel est égal à celui de T quasi-partout sur F ; deux charges ont même balayée sur F si et seulement si leurs potentiels coïncident quasi-partout sur F .

Regardons maintenant ce que deviennent dans ce cas les résultats relatifs à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $\mathcal{W}(Y)$ relatif à Y a le noyau $-\Delta + a$ dans $\mathcal{D}'(Y)$, donc c'est $\mathcal{H}^{-1}(Y)$, qui est bien normal. Mais ici $\rho\mathcal{U} = \rho(\mathcal{H}^1)$; c'est un sous-espace de $\mathcal{H}^1(Y)$, qui ne coïncide avec $\mathcal{H}^1(Y)$ (en tant qu'ensemble mais pas avec la même norme) que si Y est assez régulier. (Par exemple, si la frontière Y est une hypersurface Σ de classe C^∞ , compacte, et si en chaque point de Σ , Y est d'un seul côté de Σ . Dans la suite, nous appellerons cet exemple le cas régulier). Il est la somme $\mathcal{N} + \mathcal{U}(Y)$ de deux sous-espaces fermés orthogonaux, $\mathcal{N}$ espace des fonctions a -harmoniques (vérifiant $(-\Delta + a)U = 0$) de $\rho(\mathcal{H})$ et $\mathcal{U}(Y) = (\mathcal{H}^{-1}(Y))' = \mathcal{H}_0^1(Y)$ (adhérence de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{H}^1(Y)$) muni de sa norme habituelle (11,8) (avec $\int_Y$ au lieu de $\int$). $G(Y)$ est le noyau de Green de $-\Delta + a$ dans Y ; $-\Delta + a$ et $G(Y)$ sont

les isomorphismes canoniques réciproques entre $\mathcal{H}_0^1(Y)$ et $\mathcal{H}^{-1}(Y)$. $\mathcal{U}_1$ est le sous-espace de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions nulles dans Y ; $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ le sous-espace formé des fonctions a -harmoniques dans Y ; $\mathcal{U}_3 = G\mathcal{L}$ le sous-espace des fonctions quasi-partout nulles sur $F = \mathbb{C}Y$ [$T \in \mathcal{L}$ si et seulement si sa balayée sur F est nulle, c. à d. si et seulement si son potentiel GT est quasi-partout nul sur F]. Mais les raisonnements faits sur Y peuvent être faits sur $\mathbb{C}Y$ dans le cas régulier. Alors, de même que $\mathcal{U}_3$, adhérence de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{U}$, est l'espace des fonctions de $\mathcal{H}^1$ quasi-partout nulles sur $F = \mathbb{C}Y$ ou aussi bien sur $\mathbb{C}Y$, de même $\mathcal{U}_1$, espace des fonctions de $\mathcal{H}^1$ nulles sur Y , est, dans le cas régulier, l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{C}Y)$ dans $\mathcal{H}^1$; et alors, de même que $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, orthogonal de $\mathcal{U}_3$, est l'espace des fonctions de $\mathcal{H}^1$ a -harmoniques dans Y , de même $\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3$, orthogonal de $\mathcal{U}_1$, est, dans le cas régulier, l'espace des fonctions de $\mathcal{H}^1$ a -harmoniques dans $\mathbb{C}Y$.

On sait que toute fonction de $\mathcal{H}^1$ a une trace sur toute hypersurface Σ de classe C^∞ (il suffit de prendre sa valeur quasi-partout sur Σ); alors, dans le cas régulier, $\mathcal{H}_0^1(Y)$ est le sous-espace des fonctions de $\mathcal{H}^1(Y)$ de trace quasi-partout nulle sur Σ , et aussi des fonctions qui, prolongées par 0 dans $\mathbb{C}Y$, appartiennent à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Il n'est pas inutile de voir les relations entre les normes dans les 2 espaces $\mathcal{H}^1(Y)$ et $\rho(\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n))$. Soit $f \in \mathcal{H}^1(Y)$. Sa norme dans $\mathcal{H}^1(Y)$ est donné par

(11,8) avec $\int_Y$ au lieu de $\int_{\mathbb{R}^n}$. Sa norme dans $\rho\mathcal{H}^1$ est

$$(11,9) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(a|f|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

où $\tilde{f} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est égale à f dans Y , et orthogonale dans $\mathcal{H}^1$ à $\mathcal{U}_1 = \mathcal{H}^1 \cap \rho^{-1}(\{0\})$, c. à d. située dans $\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3$, donc, dans le cas régulier, a -harmonique dans $\mathbb{C}Y$. On a donc toujours

$$(11,10) \quad \|f\|_{\rho\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} = \|\tilde{f}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \geq \|f\|_{\mathcal{H}^1(Y)}$$

en outre, dans le cas régulier, on a toujours $>$, sauf si $\tilde{f} = 0$ dans $\mathbb{C}Y$, c. à d. si $f \in \mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Le problème de Dirichlet indiqué page 228 est bien le problème de Dirichlet classique pour $T \in \mathcal{H}^{-1}(Y)$, $U = G(Y)T$ est l'unique fonction de $\mathcal{H}_0^1(Y)$ (c. à d. dans le cas régulier, l'unique fonction de $\mathcal{H}^1(Y)$, de trace quasi-partout nulle sur Σ) vérifiant $(-\Delta + a)U = T$. Le $\tilde{f}$ de (11,9) est, dans le cas régulier, le prolongement de f dans $\mathbb{R}^n$, a -harmonique dans $\mathbb{C}Y$, et prenant les valeurs de f au bord Σ de $\mathbb{C}Y$ (problème de Dirichlet extérieur).

On peut étudier les mêmes problèmes avec $a = 0$. Mais alors $\mathcal{W}$ n'est normal dans $\mathbb{R}^n$ que pour $n \geq 3$ (voir plus loin, Proposition 33). En outre, quand il en est ainsi, $\mathcal{W}$ est contenu dans $\mathcal{H}^{-1}$ mais strictement plus petit, et $\mathcal{U}$ contient $\mathcal{H}^1$ mais est strictement plus grand. Si l'on convient de ne partir de $X = \mathbb{R}^n$ que pour $n \geq 3$ (ou de partir de X borné pour n quelconque, car alors $\mathcal{W}(X)$ est normal, voir Proposition 34), tous les résultats relatifs à $a > 0$ restent valides pour $a = 0$; et, pour Y borné, on a toujours

$\mathcal{W}(Y) = \mathcal{H}^{-1}(Y)$, et $\mathcal{U}(Y) = \mathcal{H}_0^1(Y)$, avec les normes (11,8) où $\int_{\mathbb{R}^n}$ est remplacé par $\int_Y$, et a par 0 [il suffit en effet d'appliquer le corollaire de la Proposition 30, avec $u_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\mathcal{H}_i = L^2(Y)$. L'inégalité classique, pour Y borné:

$$(11,11) \quad \int_Y |\phi|^2 dx \leq c(Y) \int_Y \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|^2 dx$$

montre que $(\mathcal{D}(Y))_{\overline{\mathcal{H}(Y)}}$, (le $\overline{E_H}$, de ce corollaire) a une injection continue dans $\mathcal{D}'(Y)$, et que la norme $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{W}(Y)}}$ est bien équivalente, sur $\mathcal{D}(Y)$, à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(Y)}$, donc que le complété $\mathcal{W}(Y)' = \mathcal{U}(Y)$ est $\mathcal{H}_0^1(Y)$].

Nous avons dit plus haut que, pour $D = -\Delta$, $\mathcal{W}$ n'est normal dans $\mathbb{R}^n$ que pour $n \geq 3$. Ceci résulte du résultat suivant:

Proposition 33. *Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants, de type ≥ 0 . Soit $P = \mathcal{F}(D\delta)$ son polynôme associé, $P \geq 0$. Pour que l'espace $\mathcal{W}$, de noyau D dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, soit normal, il faut et il suffit que $\frac{1}{P}$ soit localement intégrable et tempéré. Dans ce cas, si E est la solution élémentaire de D définie par $\overline{\mathcal{F}} \frac{1}{P}$, le noyau de l'espace $\mathcal{U}$ des potentiels est $G = E*$, c. à d. $\phi \rightsquigarrow E* \phi$.*

Démonstration. L'opérateur D , étant à coefficients constants, est invariant par les translations de $\mathbb{R}^n$, opérant sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; donc il en est de même de l'espace $\mathcal{W}$ qu'il définit dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (invariance par un automorphisme, page 182).

1°) Supposons alors $\mathcal{W}$ normal. Son anti-dual $\overline{\mathcal{W}'} \subset \mathcal{D}'$ est aussi invariant par les translations de $\mathbb{R}^n$ (nous utilisons ici le fait que ces translations, opérant sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, laissent invariante l'injection I de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$); donc son noyau G est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, commutant avec les translations de $\mathbb{R}^n$, donc une convolution $\phi \rightsquigarrow E * \phi$, $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. D'après la Proposition 28bis, on a nécessairement $DE = \delta$; en outre E est de type positif au sens de Bochner, du fait que G est un noyau ≥ 0 : pour toute $\phi \in \mathcal{D}$, on a

$$(11,12) \quad \langle E * \phi, \overline{\phi} \rangle = \langle G\phi, \overline{\phi} \rangle \geq 0.$$

L'image de Fourier de $D\delta$ est un polynôme P , et la positivité de D se traduit immédiatement par $P \geq 0$; $\mathcal{F}E$ est une mesure $\mu \geq 0$, et $DE = \delta$ s'écrit $P\mu = 1$ c. à d. $= d\xi$, mesure de Lebesgue; donc $\mu = \frac{1}{P}d\xi$ dans le complémentaire de la variété des zéros de P ; cela prouve déjà que $\frac{1}{P}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Ensuite, on a nécessairement $\mu = \frac{1}{P}d\xi + \nu$, $\nu \geq 0$ portée par la variété des zéros de P : μ doit être tempérée donc aussi $\frac{1}{P}$ et ν .

Remarquons réciproquement que, pour toute mesure μ de cette forme, on a $P\mu = 1$; donc $E = \overline{\mathcal{F}\mu}$ est une distribution de type ≥ 0 telle que $DE = \delta$, et $G: \phi \rightsquigarrow E * \phi$ est un noyau ≥ 0 inverse de D . La Proposition 31 dit alors que G est le plus petit noyau ≥ 0 inverse de D , donc on a nécessairement $\nu = 0$, et $E = \overline{\mathcal{F}\frac{1}{P}}$, $G = E * .$

2°) Inversement, si $\frac{1}{P}$ est localement intégrable et tempérée, si $E = \overline{\mathcal{F}\frac{1}{P}}$, $G = E * .$ est un noyau ≥ 0 inverse de D , donc d'après la Proposition 31 $\mathcal{W}$ est normal.

Exemple. $D = -\Delta$, $P(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 (|\xi| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{1/2})$. Alors $\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2}$ est localement intégrable si et seulement si $n \geq 3$, et alors il tend vers 0 à l'infini, donc est tempéré: $\mathcal{W}$ est normal pour $n \geq 3$. Dans ce cas, $G = E^*$ avec

$$(11,13) \quad E = \overline{\mathcal{F}} \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2} = \frac{1}{(n-2)S_n} \frac{1}{|\xi|^{n-2}},$$

S_n étant l'aire de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$.

Il est bien classique d'utiliser ce noyau G pour la théorie des potentiels newtoniens relatifs à $-\Delta$. Il y a une infinité d'autres inverses ≥ 0 de $-\Delta$, de la forme $G + N$, $N \geq 0$, $\Delta \circ N = 0$; la Proposition 31 nous dit pourquoi on doit prendre G lui-même, le plus petit, puisque nous voulons que $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{W}'}$, $\mathcal{W}$ normal. Prenons maintenant l'opérateur $-\Delta$ dans $\mathbb{R}^2$, par exemple. Dans la théorie classique du potentiel, il y a toujours un certain embarras à définir $\mathcal{W}$; cela tient à ce que l'on cherche à définir $\mathcal{W}$ à partir de G , noyau de $\overline{\mathcal{W}'}$ (Proposition 29), ce qui est une bidualisation fâcheuse lorsque $\overline{\mathcal{W}'}$ n'existe pas comme sous-espace de $\mathcal{D}'$! En réalité, $\mathcal{W}$ existe encore, comme espace associé à $-\Delta$, mais il n'est plus normal, $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{W}$. Voyons ce qui en est. $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{W}$ a le noyau: multiplication par $P = 4\pi^2 |\xi|^2$. Donc (Proposition 22) $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{W} = 2\pi |\xi| L^2$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\phi} = \overline{\mathcal{F}}\phi$. Alors $\hat{\phi} \in 2\pi |\xi| L^2$ équivaut à $\frac{\hat{\phi}(\xi)}{|\xi|} \in L^2$, où $\hat{\phi}(0) = 0$ (compte tenu de ce que $\hat{\phi}$ est analytique et dans L^2) ou à $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 0$: $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}$ est le sous-espace de $\mathcal{D}$ formé des fonction d'intégrale nulle, hyperplan dans $\mathcal{D}$.

Proposition 34 Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants, de type positif sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout ouvert X borné non vide dans $\mathbb{R}^n$, le sous-espace hilbertien $\mathcal{W}(X)$, de noyau D relativement à $\mathcal{D}'(X)$, est normal; en outre $\mathcal{U}(X) \subset L^2 \subset \mathcal{W}(X)$. Soit D' un opérateur différentiel à coefficients constants; soient $P = \overline{\mathcal{F}}(D\delta)$, $P' = \overline{\mathcal{F}}(D'\delta)$. Pour que $D'\mathcal{U}(X) \subset \mathcal{W}(X)$, il faut et il suffit que P' soit plus faible que P au sens d'Hörmander ⁽⁵⁷⁾.

⁽⁵⁷⁾ Hörmander [1], 2ème partie, Chapitre III, 3.3, page 71.

Nous démontrerons cette proposition en même temps que d'autres dans une étude ultérieure sur les espaces hilbertiens associés à des opérateurs différentiels de type ≥ 0 .

Mais cette proposition suffit à montrer qu'il existe des théories du potentiel et des problèmes de Dirichlet, pour des ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, pour des opérateurs différentiels très loin d'être elliptiques: ainsi $\square^2$, où $\square$ est l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$ est hyperbolique, son problème de Cauchy est bien posé (et de solution classique) par rapport à la variable temps $t = x_n$; cependant il est de type ≥ 0 (comme tout opérateur D^*D), donc il a un problème de Dirichlet pour tout ouvert borné. Le tout est de bien savoir l'interpréter; les espaces $\mathcal{W}$ et $\mathcal{U}$ donnent la bonne solution du problème.

§12. Sous-espaces hermitiens et noyaux hermitiens associés.

Revenons aux résultats de la fin du §8. Le cône $\text{Hilb}(E)$ associé à un espace vectoriel topologique E , localement convexe séparé quasi-complet, est régulier, donc engendre un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, que nous appellerons $\text{Hilb}(E) \otimes \mathbb{R}$ (ce n'est pas un produit tensoriel à proprement parler!). Un élément de $\text{Hilb}(E) \otimes \mathbb{R}$ peut s'écrire, d'une infinité de manières comme différence formelle $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ de deux sous-espaces hilbertiens de E , avec la relation d'équivalence $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 \simeq \mathcal{H}_3 - \mathcal{H}_4$ si $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$. De même $\mathcal{L}^+(E)$ engendre un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, que nous appellerons $\mathcal{L}^+(E) \otimes \mathbb{R}$ et qui est l'espace des noyaux hermitiens relatifs à E , susceptibles d'être exprimés comme différence de 2 éléments positifs. L'isomorphisme $\text{Hilb}(E) \rightarrow \mathcal{L}^+(E)$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme $\text{Hilb}(E) \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}^+(E) \otimes \mathbb{R}$, qui est encore fonctoriel. Notre but, dans ce paragraphe, est d'exprimer les éléments de $\text{Hilb}(E) \otimes \mathbb{R}$ comme sous-espaces vectoriels ou classes de sous-espaces vectoriels de E .

Un espace pré-hermitien $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (non topologique) muni d'une forme hermitienne notée $(h, k) \sim (h|k)_{\mathcal{H}}$. Si cette forme est ≥ 0 , c'est un espace préhilbertien; il peut alors être muni d'une norme donc d'une topologie, pour laquelle la forme hermitienne est continue; rien

d'analogue n'existe ici. La forme définit une application linéaire γ de $\mathcal{H}$ dans son anti-dual algébrique $\overline{\mathcal{H}^*}$, par

$$(12,1) \quad (h|k)_{\mathcal{H}} = (h|\gamma k)_{\mathcal{H}, \overline{\mathcal{H}^*}}.$$

On dit que h et k sont orthogonaux si $(h|k) = 0$, ce qui est équivalent à $(k|h)_{\mathcal{H}} = 0$ à cause de l'hermiticité de la forme. La forme est dite non dégénérée si l'orthogonal de $\mathcal{H}$ est $\{0\}$, autrement dit si γ est injective.

Soit, d'autre part, $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de E , espace vectoriel topologique localement convexe séparé quasi-complet. L'injection $j: \mathcal{H} \rightarrow E$ a une adjointe $j^*: E^* \rightarrow \overline{\mathcal{H}^*}$, donc a fortiori $\bar{E}' \rightarrow \overline{\mathcal{H}^*}$. On appelle *sous-espace préhermitien admissible de E* la donnée d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de E , et d'une forme hermitienne non dégénérée sur $\mathcal{H}$, notée $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$, telle que l'on ait:

$$(12,2) \quad j^*(\bar{E}') \subset \gamma \mathcal{H}.$$

Par exemple, soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E , de noyau associé K . Soit $\mathcal{H}'$ un sous-espace préhilbertien dense de $\mathcal{H}$, avec la structure induite.

Soient i, k les injections: $\mathcal{H}' \xrightarrow{i} \mathcal{H}, \mathcal{H}' \xrightarrow{k} E$, de sorte que l'injection $j: \mathcal{H}' \rightarrow E$ est ki . L'application $\gamma_{\mathcal{H}'}$ relative à $\mathcal{H}'$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}'$ sur $\overline{\mathcal{H}'^*}$; l'application $\gamma_{\mathcal{H}}$ relative à $\mathcal{H}$ est $i^*\gamma_{\mathcal{H}'}i$; mais, $\mathcal{H}'$ étant dense dans $\mathcal{H}$, a le même dual, de sorte que $i^*: \mathcal{H}'^* \rightarrow \overline{\mathcal{H}'^*}$ est l'identité: $\overline{\mathcal{H}'^*} \rightarrow \overline{\mathcal{H}'^*}$; si nous identifions $\overline{\mathcal{H}'^*}$ et $\overline{\mathcal{H}^*}$, $i^*\gamma_{\mathcal{H}'}i$ est simplement la restriction de $\gamma_{\mathcal{H}}$ à $\mathcal{H}'$. Le noyau K associé à $\mathcal{H}$ dans E est θk^* où θ est $\gamma_{\mathcal{H}'}^{-1}: \overline{\mathcal{H}'^*} \rightarrow \mathcal{H}'$; la condition (12,2) relative à $\mathcal{H}'$ s'écrit ici $k^*(\bar{E}') \subset \gamma_{\mathcal{H}'}(\mathcal{H}')$, où $\bar{K}(\bar{E}') \subset \mathcal{H}'$: un sous-espace préhilbertien $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$, avec la structure induite, est admissible si, et seulement s'il contient $K(\bar{E}')$. Nous définirons plus loin un noyau associé à chaque sous-espace préhermitien admissible: tous les $\mathcal{H}'$ tels que $K(\bar{E}') \subset \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ auront le même noyau K .

Il peut a priori paraître gênant d'introduire une aussi large famille de sous-espaces, supprimant ainsi tout espoir d'avoir une correspondance *biunivoque* entre sous-espaces et noyaux; mais nous verrons plus tard que, même avec le sens le plus restrictif qu'on puisse donner à des sous-espaces herbitiens,

une telle correspondance biunivoque n'existe pas; et la catégorie ici définie s'avèrera très commode pour les énoncés et les démonstrations.

Si alors $\mathcal{H}$ est un sous-espace préhermitien admissible de E , si θ est l'application $\gamma(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}$ inverse de la bijection $\gamma: \mathcal{H} \rightarrow \gamma(\mathcal{H})$, on peut définir $H = j\theta j^*$ à cause de l'hypothèse $j^*(\bar{E}') \subset \gamma(\mathcal{H})$. H est une application linéaire de $\bar{E}'$ dans E , et même de $\bar{E}'$ dans $\mathcal{H}$, si, comme déjà page 142, nous convenons d'identifier $j\theta j^*$ et θj^* .

Proposition 35. *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace préhermitien admissible de E . L'application $H: \bar{E}' \rightarrow E$ définie ci-dessus par $j\theta j^*$, est un noyau hermitien. Il vérifie (4,2) et (4,3). Inversement, si $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de E , s'il est muni d'une forme hermitienne non dégénérée, et s'il existe une application linéaire $H: \bar{E}' \rightarrow \mathcal{H}$, vérifiant (4,2), $\mathcal{H}$ est sous-espace préhermitien admissible de E , et H est non noyau. Enfin, tout noyau hermitien $H: \bar{E}' \rightarrow E$, est associé à au moins un sous-espace préhermitien admissible.*

Démonstration. (4,2) se démontre comme à la Proposition 6. On en déduit (4,3), donc H est hermitien, donc est un noyau hermitien par la Proposition 4.

Inversement, soit $\mathcal{H} \subset E$, muni d'une forme hermitienne non dégénérée, et supposons qu'il existe une application $H: \bar{E}' \rightarrow E$ vérifiant (4,2).

La relation $(h | H\bar{e}')_{\mathcal{H}} = (h | \gamma H\bar{e}')_{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}'} = (jh | \bar{e}')_{E, \bar{E}'} = (h | j^*\bar{e}')_{E, \bar{E}}$ montre que $\gamma H = j^*$, donc $j^*(\bar{E}') \subset \gamma(\mathcal{H})$, donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace préhermitien admissible de E . Ensuite, γ étant injective, $\gamma H = j^*$ donne $H = \theta j^*$, H est le noyau de $\mathcal{H}$ dans E .

Soit enfin H un noyau hermitien: $\bar{E}' \rightarrow E$. Alors $\mathcal{H} = H(\bar{E}')$ est un sous-espace vectoriel de E , muni de la forme hermitienne (4,3) (nous avons vu, à la démonstration de la Proposition 16, que cette forme est bien définie). Cette forme est non dégénérée: si $H\bar{e}'$ est tel que, pour tout $f' \in E'$, $(H\bar{e}' | Hf')_{\mathcal{H}} = 0$, on a aussi $\langle He', f' \rangle = 0$ donc $H\bar{e}' = 0$. Pour $e' \in E'$, $j^*\bar{e}'$ est la forme anti-linéaire sur $\mathcal{H}$ définie par restriction à $\mathcal{H}$ de la forme anti-linéaire définie par $\bar{e}'$ sur E ; l'égalité (4,2) montre alors que $\gamma H\bar{e}' = j^*e'$, donc on a ici exactement $j^*(\bar{E}') = \gamma(\mathcal{H})$; $H(\bar{E}')$ est un sous-espace préhermitien admissible et alors (4,2) montre exactement que son noyau associé est H . $(H\bar{E}')$ est le

plus petit (au sens ensembliste) sous-espace préhermitien admissible de E ayant le noyau hermitien donné H .

Soit maintenant $\mathcal{H}$ un sous-espace préhermitien admissible de E , u une application linéaire faiblement continue de E dans F ; essayons de définir un espace préhermitien admissible image $u(\mathcal{H})$. On pourrait être tenté de dire que, comme ensemble, c'est l'image de $\mathcal{H}$ par u ; et ensuite de définir sur cette image une structure préhermitienne; mais on n'y parviendrait pas. Revenons au contraire à la démonstration de la Proposition 21. Soit $\mathcal{N} = \mathcal{H} \cap u^{-1}(\{0\})$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{K}$ l'orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}$, relativement à la forme hermitienne de $\mathcal{H}$. On n'a pas nécessairement $\mathcal{N} + \mathcal{K} = \mathcal{H}$. Considérons alors l'espace $u(\mathcal{K}) \subset F$. L'application $u: \mathcal{K} \rightarrow F$ se factorise en:

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} / \mathcal{K} \cap \mathcal{N} \xrightarrow{\hat{u}} F, \hat{u} \text{ injective.}$$

Si l'on munit $\mathcal{K}$ de la restriction de la forme hermitienne de $\mathcal{H}$, on obtient une forme hermitienne éventuellement dégénérée, dont le noyau (sous-espace orthogonal à l'espace entier) est $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$. Alors, sur le quotient $\mathcal{K} / \mathcal{K} \cap \mathcal{N}$ on peut définir une forme hermitienne non dégénérée (c'est ce que l'on n'aurait pas pu faire si l'on avait pris $\mathcal{H}$ au lieu de $\mathcal{K}$). On peut la transporter par $\hat{u}$ sur $u(\mathcal{K})$, qui est donc muni d'une forme hermitienne non dégénérée; pour $x, y \in \mathcal{K}$, on a

$$(12,3) \quad (x|y)_{\mathcal{K}} = (x|y)_{\mathcal{K}} = (u(x)|u(y))_{u(\mathcal{K})} .$$

Soient alors $h = u(k) \in u(\mathcal{K})$, $f' \in F'$;

$$(12,4) \quad \begin{aligned} \langle h, f' \rangle_{F, F'} &= (h|f')_{F, F'} = (u(k)|f')_{F, F'} \\ &= (k|u^*f')_{E, E'} = (k|Hu^*f')_{\mathcal{K}} . \end{aligned}$$

Si $k \in \mathcal{N}$, $h = u(k) = 0$, donc toutes ces quantités sont nulles; donc Hu^*f' est orthogonal à $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire est toujours élément de $\mathcal{K}$, quel que soit f' . Le dernier produit scalaire de (12,4) est donc un produit scalaire dans $\mathcal{K}$, et alors (12,3) montre qu'il vaut:

$$(12,5) \quad \langle h, f' \rangle_{F, F'} = (u(k)|uHu^*f')_{u(\mathcal{K})} = (h|uHu^*f')_{u(\mathcal{K})}$$

Alors la Proposition 35 montre que $u(\mathcal{H})$ est un sous-espace préhermitien admissible de F , de noyau associé uHu^* . C'est lui que nous appellerons sous-espace préhermitien admissible de F , image de $\mathcal{H}$ par u , et nous le noterons $\ddot{u}(\mathcal{H})$. Il est contenu dans l'image ensembliste $u(\mathcal{H})$, mais est en général plus petit, d'où la notation différente $\ddot{u}$ au lieu de u (alors que nous avons pu employer u pour les sous-espaces hilbertiens).

Par exemple, il pourra arriver que $\mathcal{H} = \mathcal{N}$ (on le verra plus loin page 239), alors l'ensemble $u(\mathcal{H})$ pourra être quelconque mais le sous-espace préhermitien $\ddot{u}(\mathcal{H})$ de F sera $\{0\}$. Si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de E , le $\ddot{u}(\mathcal{H})$ que nous venons de définir coïncide bien avec le $u(\mathcal{H})$ du §8. Si en particulier E est sous-espace vectoriel de F , muni d'une topologie plus fine que la topologie induite, tout sous-espace préhermitien admissible de E est a fortiori sous-espace préhermitien admissible de F .

Pour un sous-espace préhermitien admissible $\mathcal{H}$ de E , et un scalaire réel λ , on définira $\lambda\mathcal{H}$ comme $\{0\}$ si $\lambda=0$, et, si $\lambda \neq 0$, comme le même espace $\mathcal{H}$ muni d'une nouvelle forme hermitienne, obtenue en multipliant l'ancienne par $\frac{1}{\lambda}$. Si H est le noyau de $\mathcal{H}$, celui de $\lambda\mathcal{H}$ est λH .

Enfin, soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, deux sous-espaces préhermitiens admissibles de E , de noyaux associés H_1 et H_2 . Alors, $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, muni de la forme hermitienne $((x_1, x_2) | (y_1, y_2))_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = (x_1 | y_1)_{\mathcal{H}_1} + (x_2 | y_2)_{\mathcal{H}_2}$ est trivialement un sous-espace préhermitien admissible de $E \times E$. Mais $(x, y) \rightarrow x + y$ est une application linéaire continue Φ de $E \times E$ dans E ; l'image $\ddot{\Phi}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$, au sens de l'image $\ddot{u}(\mathcal{H})$ des pages précédentes, sera appelé le sous-espace préhermitien admissible $\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$, somme de $\mathcal{H}_1$ et de $\mathcal{H}_2$. On l'obtient donc comme suit. Le noyau $\mathcal{N}$ de Φ dans $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(k_1, k_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ tels que $k_1 + k_2 = 0$. Soit $\mathcal{K}$ l'orthogonal de $\mathcal{N}$; les points $(H_1 \bar{e}', H_2 \bar{e}')$, $e' \in E'$, sont dans $\mathcal{K}$ (voir démonstration de la Proposition 12). Alors la restriction à $\mathcal{K}$ de la forme hermitienne de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ a pour noyau $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$, donc définit une forme hermitienne non dégénérée sur $\mathcal{K}/(\mathcal{K} \cap \mathcal{N})$; l'application Φ passe au quotient: $\mathcal{K}/(\mathcal{K} \cap \mathcal{N}) \xrightarrow{\Phi \cdot} E$, et $\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$ est $\Phi \cdot (\mathcal{K}/(\mathcal{K} \cap \mathcal{N})) = \Phi(\mathcal{K})$, avec la forme hermitienne transportée. La démonstration de la page 133 montre que, si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont

des sous-espaces hilbertiens de E , la définition donnée ici pour $\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$ redonne bien l'ancienne définition de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. L'adjointe de Φ : $(e_1, e_2) \rightsquigarrow (e_1 + e_2)$ de $E \times E$ dans E , est $\Phi^*: \bar{e}' \rightsquigarrow (\bar{e}', \bar{e}')$ de $\bar{E}'$ dans $\bar{E}' \times \bar{E}'$ (application diagonale); le noyau associé à $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ dans $E \times E$ est $(H_1, H_2): (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2) \rightsquigarrow (H_1 \bar{e}'_1, H_2 \bar{e}'_2)$; donc le noyau associé à $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ dans E est $\Phi \circ (H_1, H_2) \circ \Phi^* = H_1 + H_2: \bar{e}' \rightsquigarrow H_1 \bar{e}' + H_2 \bar{e}'$. D'ailleurs on pourrait répéter directement la démonstration de la Proposition 12.

De même que $\ddot{u}(\mathcal{H})$ peut être, en tant qu'ensemble, plus petit que $u(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$ peut être plus petit que $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Prenons par exemple $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_2 = -\mathcal{H}$. Ici le noyau $\mathcal{N}$ de l'application Φ est l'ensemble des $(h, -h) \in \mathcal{H} \oplus (-\mathcal{H})$. Son orthogonal $\mathcal{H}$ est $\mathcal{N}$ lui-même, car $((k_1, k_2) | (h, -h))_{\mathcal{H} \oplus (-\mathcal{H})} = ((k_1 + k_2) | h)_{\mathcal{H}}$ est nul si et seulement si $k_2 = -k_1$. Alors l'ensemble $\mathcal{H} + (-\mathcal{H})$ est $\mathcal{H}$, alors que $\mathcal{H} \ddot{+} (-\mathcal{H}) = \{0\}$.

La somme $\mathcal{H}_1 \ddot{+} (-\mathcal{H}_2)$ sera aussi notée $\mathcal{H}_1 \ddot{-} \mathcal{H}_2$, ou même $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$, l'ambiguïté avec la différence ensembliste étant peu redoutable. Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ont pour intersection $\{0\}$, alors $\mathcal{N} = \{0\}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, et $\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$ n'est autre que le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ de E , avec la forme hermitienne somme directe des formes données sur $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$; $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont orthogonaux dans $\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$. Dans ce cas, on écrira aussi $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ au lieu de $\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$.

Il faudrait se garder de croire que la multiplication par les scalaires, et l'image par une application, possèdent les bonnes propriétés qu'on attend d'elles. Par exemple, l'addition, qui est commutative, n'est pas associative: $(\mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2) \ddot{+} \mathcal{H}_3 \neq \mathcal{H}_1 \ddot{+} (\mathcal{H}_2 \ddot{+} \mathcal{H}_3)$. C'est pourquoi il est nécessaire d'établir maintenant une relation d'équivalence entre sous-espaces préhermitiens admissibles de E . Nous écrirons $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{H}_2$ si $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = \{0\}$ (On a bien $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}$, comme nous venons de le voir plus haut).

Proposition 36. *Les 3 opérations $(\lambda, \mathcal{H}) \rightsquigarrow \lambda \mathcal{H}$, $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightsquigarrow \mathcal{H}_1 \ddot{+} \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H} \rightsquigarrow \ddot{u}(\mathcal{H})$ sont supposées définies comme ci-dessus. Alors $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{H}_2$ si $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = \{0\}$ est une relation d'équivalence; si H_1 et H_2 sont les noyaux associés à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ relativement à E , on a $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{H}_2$ si et seulement si $H_1 = H_2$. Les 3 opérations définies ci-dessus passent au quotient par la relation d'équivalence: l'ensemble $\text{Herm}(E)$ des classes d'équivalence*

de sous-espaces préhermitiens admissibles de E , muni des lois de multiplication par les scalaires réels et d'addition, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'application $\mathcal{H} \cdot \sim \rightarrow H$ ($\mathcal{H} \cdot$ = classe de $\mathcal{H}$, H noyau associé à $\mathcal{H}$) est une bijection linéaire de $\text{Herm}(E)$ sur l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) $\mathcal{L}^h(E)$ des noyaux hermitiens $\tilde{E}' \rightarrow E$. Enfin, si u est une application linéaire faiblement continue de E dans F , $\mathcal{H} \cdot \sim \rightarrow (\tilde{u}(\mathcal{H})) \cdot$ est une application linéaire de $\text{Herm}(E)$ dans $\text{Herm}(F)$, associée par la bijection précédente à l'application linéaire $H \sim \rightarrow uHu^*$ de $\mathcal{L}^h(E)$ dans $\mathcal{L}^h(F)$. Les foncteurs Herm et $\mathcal{L}^h$ de la catégorie des espaces vectoriels topologiques (sur $\mathbb{C}$) localement convexes séparés quasi-complets, dans la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, sont isomorphes.

Démonstration. Le noyau associé à $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ est $H_1 - H_2$. Ce sous-espace préhermitien admissible de E est $\{0\}$ si et seulement si son noyau associé est nul [Bien évidemment le noyau de $\{0\}$ est nul. Inversement, si un sous-espace préhermitien admissible $\mathcal{H}$ a pour noyau 0 , on a $j\theta j^* = 0$; mais j et θ sont injectifs, donc $j^* = 0$ donc $j = 0$ et $\mathcal{H} = \{0\}$.] Donc on a bien $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{H}_2$ si et seulement si $H_1 = H_2$. Cela prouve aussitôt que c'est une relation d'équivalence; en outre on voit que cette relation d'équivalence est compatible avec les opérations étudiées, qui ainsi passent au quotient. D'autre part, l'application $\mathcal{H} \cdot \sim \rightarrow H$ est une bijection du quotient $\text{Herm}(E)$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}^h(E)$ (Proposition 35); cette bijection respecte l'addition et la multiplication par les scalaires réels, donc $\text{Herm}(E)$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sa bijection sur $\mathcal{L}^h(E)$ est linéaire. La fin de la proposition est évidente (voir la fin du §8).

Proposition 37. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace préhermitien admissible de E . Supposons qu'il existe sur $\mathcal{H}$ une structure hilbertienne par rapport à laquelle la forme hermitienne donnée soit continue. Alors $\mathcal{H}$ admet une décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ préhilbertiens admissibles, d'intersection nulle (donc orthogonaux dans $\mathcal{H}$). On a donc aussi une décomposition de son noyau, $H = H_1 - H_2$, H_1 et H_2 noyaux positifs.

Démonstration. Notons $((\cdot|\cdot))$ le produit scalaire hilbertien, supposé exister sur $\mathcal{H}$, et $(\cdot|\cdot)_\mathcal{H}$ la forme hermitienne donnée supposée continue.

On sait alors qu'il existe un opérateur hermitien continu A sur $\mathcal{H}$, tel que

$$(12,6) \quad (h|k)_{\mathcal{H}} = ((h|Ak)).$$

Par la décomposition spectrale $A = A^+ - A^-$, on peut trouver 2 sous-espaces vectoriels fermés $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, orthogonaux pour $((\cdot|\cdot))$, stables par A donc orthogonaux pour $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$, et tels que A , donc $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$, soit ≥ 0 sur $\mathcal{H}_1$, donc définie positive, parce que non dégénérée sur $\mathcal{H}$ donc sur $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$; et définie négative sur $\mathcal{H}_2$. Montrons que $\mathcal{H}_1$ et $-\mathcal{H}_2$ sont des sous-espaces préhilbertiens admissibles. La décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ donne la décomposition duale $\overline{\mathcal{H}}^* = \overline{\mathcal{H}}_1^* \oplus \overline{\mathcal{H}}_2^*$, et, puisqu'ils sont orthogonaux pour $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, où γ_1 et γ_2 sont associées aux restrictions de la forme hermitienne à $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Alors $\gamma(\mathcal{H}) = \gamma_1(\mathcal{H}_1) \oplus \gamma_2(\mathcal{H}_2)$. Si i_1 est l'injection $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$, i_1^* est la projection $pr_1: \overline{\mathcal{H}}^* \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_1^*$; l'injection $J_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow E$, est ji , donc J_1^* est $i_1^*j^* = pr_1 \circ j^*$. Alors de $j^*(\overline{E}') \subset \gamma(\mathcal{H}) = \gamma_1(\mathcal{H}_1) \oplus \gamma_2(\mathcal{H}_2)$ on déduit aussitôt $J_1^*(\overline{E}') = pr_1 j^*(\overline{E}') \subset \gamma_1(\mathcal{H}_1)$: $\mathcal{H}_1$ est bien admissible, et de même $-\mathcal{H}_2$; et on a bien $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$. On en déduit, pour les noyaux, $H = H_1 - H_2$.

Remarque 1. Les conditions données dans l'énoncé sont donc suffisantes pour que $\mathcal{H}$ admette une décomposition en $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$; elles ne sauraient être nécessaires, à cause de la trop grande généralité des sous-espaces admissibles. Néanmoins on remarquera que la catégorie des sous-espaces vérifiant ces conditions est stable pour les 3 opérations; c'est évident pour la multiplication par les réels, et, si nous le montrons pour l'image $\tilde{u}$ par $u: E \rightarrow F$, ce sera aussi vrai pour l'addition $\ddot{+}$. Or, si nous reprenons les développements de la page 237, nous voyons que, pour la structure hilbertienne $((\cdot|\cdot))$ de $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$ sont fermés puisque $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$ est continue; donc la forme hermitienne $(\cdot)_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ est continue, de noyau $\mathcal{H} \cap \mathcal{N}$, et par suite la forme hermitienne non dégénérée sur $\mathcal{H}/(\mathcal{H} \cap \mathcal{N})$ est continue pour la structure hilbertienne quotient. On aurait donc pu prendre comme définition d'un sous-espace admissible les propriétés énoncées dans la Proposition 37, puis passer au quotient par la même relation d'équivalence; le quotient obtenu aurait été le sous-espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de $\text{Herm}(E)$ engendré par le cône $\text{Hilb}(E)$ (nous pouvons identifier $\text{Hilb}(E)$ à son image

dans $\text{Herm}(E)$; en effet, le passage au quotient $\mathcal{H} \rightsquigarrow \mathcal{H}^\cdot$ est injectif sur l'ensemble des sous-espaces hilbertiens, puisque $\mathcal{H} \rightarrow H$ est injectif), puisque son image dans $\mathcal{L}^h(E)$ par la bijection canonique $\mathcal{H}^\cdot \rightsquigarrow H$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^h(E)$ engendré par $\mathcal{L}^+(E)$.

Remarque 2. Soit $\mathcal{H}$ ayant les propriétés de l'énoncé de la Proposition 37; puisque $H = H_1 - H_2$, on a aussi une décomposition $\mathcal{H} \simeq \hat{\mathcal{H}}_1 - \hat{\mathcal{H}}_2$, où $\hat{\mathcal{H}}_1$ et $\hat{\mathcal{H}}_2$ sont les sous-espaces hilbertiens de noyaux H_1 et H_2 ; ces espaces ne sont pas nécessairement $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ eux-mêmes, qui sont seulement pré-hilbertiens. On n'a donc pas $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}_1 - \hat{\mathcal{H}}_2$. Dans certains espaces particuliers, $\text{Herm}(E)$ et $\mathcal{L}^h(E)$ sont engendrés par $\text{Hilb}(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$. Il en est ainsi, par exemple, si E est susceptible d'une structure hilbertienne. En effet nous pouvons dans ce cas identifier $\bar{E}'$ avec E ; un noyau hermitien H est alors un opérateur continu hermitien de E dans E , et il est toujours différence de deux noyaux ≥ 0 . Mais cela représente sans doute un cas très exceptionnel; nous donnerons de toute manière plus loin (page 243) des exemples prouvant qu'il n'en est pas toujours ainsi.

Proposition 38. Soit H un noyau hermitien: $\bar{E}' \rightarrow E$. Pour qu'il soit différence de 2 noyaux ≥ 0 , il faut et il suffit qu'il soit majoré par un noyau ≥ 0 , autrement dit qu'il existe un noyau $L \geq 0$ tel que

$$(12,7) \quad |\langle H\bar{e}', f' \rangle| \leq \langle L\bar{e}', e' \rangle^{1/2} \langle Lf', f' \rangle^{1/2}$$

ou encore

$$(12,8) \quad |\langle H\bar{e}', e' \rangle| \leq \langle L\bar{e}', e' \rangle$$

S'il en est ainsi, H est différence de 2 noyaux ≥ 0 étrangers.

Démonstration. (12,7) et (12,8) sont équivalents d'après le lemme page 158. Si $H = H_1 - H_2$, on a bien ces inégalités avec $L = H_1 + H_2$; réciproquement (12,8) signifie que le noyau $L - H$ est ≥ 0 , et alors $H = L - (L - H)$.

Soit $H = H_1 - H_2$, et $L = H_1 + H_2$; soit $\mathcal{L}$ le sous-espace hilbertien de E de noyau L . On a $H_1 \leq L$; donc H_1 est noyau d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{L}$ (Proposition 13). Utilisons la Proposition 9 bis. On a $H_1 = A_1 L$, où A_1 est un opérateur hermitien continu ≥ 0 de $\mathcal{L}$ dans lui-même; de même

$H_2 = A_2L$. Donc $H = AL$, A hermitien continu de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$. La décomposition spectrale donne alors une décomposition $A = B_1 - B_2$, B_1 et B_2 opérateurs continus hermitiens ≥ 0 étrangers dans $\mathcal{L}$. B_1 et B_2 définissent dans $\mathcal{L}$ des sous-espaces hilbertiens, $\mathcal{B}_1 = \sqrt{B_1}\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}_2 = \sqrt{B_2}\mathcal{L}$, d'intersection $\{0\}$, c. à d. étrangers (Proposition 16).

Les noyaux de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ dans E sont B_1L et B_2L , donc ils sont étrangers; et $H = AL = B_1L - B_2L$ dans $\mathcal{L}^+(E)$.

Corollaire 1. *Pour qu'un noyau H hermitien soit différence de 2 noyaux ≥ 0 , il est nécessaire que la forme hermitienne H qu'il définit sur $E' \times E'$ (Formule (3,5)) soit fortement continue.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire de la Proposition 10.

Corollaire 2. *Pour que tout noyau hermitien H soit différence de 2 noyaux ≥ 0 , il est nécessaire que toute forme sesquilinéaire sur $E' \times E'$, séparément faiblement continue, soit fortement continue.*

Démonstration. Il est en effet nécessaire, d'après le Corollaire 1, que, pour tout noyau hermitien H , $\tilde{H}$ soit fortement continue; c'est aussi nécessaire pour tout noyau H , car il est de la forme $A + iB$, A et B noyaux hermitiens. Mais toute forme sesquilinéaire séparément faiblement continue sur $E' \times E'$ est le $\tilde{H}$ d'un noyau H .

Exemple. Soit $E = \mathcal{D}'$, espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$. $\bar{E}' = \mathcal{D}$. On sait qu'il existe des formes bilinéaires sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, séparément continues, qui ne sont pas continues ($\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ est différent de $\mathcal{D} \otimes_{\pi} \mathcal{D}$, et n'a pas le même dual⁽⁵⁸⁾.) Donc il y a des noyaux hermitiens relatifs à $\mathcal{D}'$ qui ne sont pas différence de 2 noyaux ≥ 0 .

Tant que nous n'utiliserons que ce corollaire, nous n'aurons que des exemples pour lesquels $\bar{E}'$ n'est pas un espace de Fréchet (pour la topologie forte); car s'il est un Fréchet, toute forme sesquilinéaire séparément faiblement continue sur $E' \times E'$ est séparément fortement continue, donc fortement continue.

Or il existe déjà des espaces de Banach E , ayant des noyaux hermitiens non majorés par des noyaux ≥ 0 . Soit en effet G un Banach réflexif non sus-

(58) Schwartz [2], pages 115-116.

ceptible d'une structure hilbertienne. Soit $E = G \oplus \bar{G}'$. Alors $\bar{E}' = \bar{G}' \oplus G$. Il existe un noyau hermitien H naturel, l'application $(\bar{x}', y) \rightsquigarrow (y, \bar{x}')$; il est bien hermitien, car $\langle (y, \bar{x}'), (x', \bar{y}) \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle x', y \rangle$, est réel. Si H était différence de 2 noyaux ≥ 0 , donc de deux noyaux ≥ 0 étrangers, $H_1 - H_2$, on aurait $E = H(\bar{E}') = (H_1 - H_2)(\bar{E}') \subset H_1(\bar{E}') + H_2(\bar{E}')$, de sorte que les sous-espaces hilbertiens $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, de noyaux H_1, H_2 , vérifieraient $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = 0, \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = E$ en tant qu'ensemble. E serait alors susceptible d'une structure hilbertienne, à savoir $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, donc aussi le sous-espace fermé G , ce qui est contraire à l'hypothèse.

La Proposition 38 nous amène à introduire une notion plus stricte. On appellera espace hermitien $\mathcal{H}$ un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$), muni d'une forme hermitienne $(\cdot | \cdot)_{\mathcal{H}}$ ayant la propriété suivante: il existe une décomposition de $\mathcal{H}$ en somme directe $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ orthogonaux, tels que, pour la restriction de la forme hermitienne, $\mathcal{H}_1$ soit hilbertien, et que, pour la restriction de son opposée, $\mathcal{H}_2$ soit hilbertien.

On a donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ hilbertiens étrangers. Comme on l'a vu page 241, on a $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \cdot \gamma(\mathcal{H}) = \gamma_1(\mathcal{H}_1) + \gamma_2(\mathcal{H}_2)$.

Il peut alors évidemment être muni de la topologie produit $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, pour laquelle il est complet, et susceptible d'une structure hilbertienne (à savoir $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$). La forme hermitienne est continue pour cette topologie.

L'anti-dual de $\mathcal{H}$, pour cette topologie, est $\gamma(\mathcal{H}) \subset \overline{\mathcal{H}}^*$, et γ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\overline{\mathcal{H}}'$. $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ne sont pas donnés dans la structure, on suppose seulement leur existence, et on peut en général les trouver d'une infinité de manières. Par contre la topologie définie sur $\mathcal{H}$ est intrinsèque, car c'est une topologie de Banach, et que l'anti-dual pour cette topologie est connu, c'est $\gamma(\mathcal{H})$. Ce sont ces espaces hermitiens qui généralisent le mieux les espaces hilbertiens.

Un sous-espace hermitien $\mathcal{H}$ de E est alors un sous-espace vectoriel muni d'une structure d'espace hermitien, telle que l'injection $\mathcal{H} \rightarrow E$ soit continue. C'est alors bien un sous-espace préhermitien admissible, car sa forme hermitienne n'est pas dégénérée, et que $j^*(\bar{E}') \subset \overline{\mathcal{H}}'$ puisque j est continue, et $\gamma(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{H}}'$. En outre, $H(\bar{E}')$ est alors dense dans $\mathcal{H}$ puisque $j^*(\bar{E}')$ est dense dans $\overline{\mathcal{H}}'$ (j étant injective), et que $\theta = j^{-1}$ est un isomorphisme de $\overline{\mathcal{H}}'$ sur $\mathcal{H}$. La Proposition 38 permet alors d'énoncer

Corollaire 3. *Le sous-espace vectoriel de $\text{Herm}(E)$ engendré par le cône $\text{Hilb}(E)$ est celui des classes d'équivalence des sous-espaces hermitiens de E .*

Démonstration. Si H est différence de 2 noyaux ≥ 0 , il est aussi différence de 2 noyaux ≥ 0 étrangers, $H = H_1 - H_2$. Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont les sous-espaces hilbertiens de noyaux H_1 et H_2 , H est le noyau du sous-espace hermitien $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$.

Remarque.

Il pourrait donc sembler que les espaces hermitiens soient d'emblée la bonne notion à introduire. Mais :

1°) Comme nous le verrons plus loin (§13), deux sous-espaces hermitiens distincts peuvent avoir le même noyau associé. Une relation d'équivalence est donc encore inévitable.

2°) Les sous-espaces hermitiens ne forment pas une catégorie stable pour les 3 opérations: si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hermitien de E , u une application continue de E dans F , $u(\mathcal{H})$ n'est pas nécessairement hermitien. (Il est seulement équivalent à des sous-espaces hermitiens, puisque sa classe est engendrée par des classes de sous-espaces hilbertiens; mais il peut alors être équivalent à une infinité, sans qu'aucun d'eux ait une raison particulière de lui être associé. Naturellement, si u est injective, $u(\mathcal{H}) = u(\mathcal{H})$ est hermitien). De même la somme $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ de deux sous-espaces hermitiens n'est pas nécessairement hermitienne (mais elle l'est si $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$).

§13 Unicité et multiplicité des noyaux hermitiens.

Un noyau hermitien $H \in \mathcal{L}^h(E)$, différence de 2 noyaux ≥ 0 , est dit d'unicité s'il existe un seul sous-espace hermitien de E l'admettant comme noyau associé; il est dit de multiplicité dans le cas contraire. Par exemple un noyau $H \geq 0$ est d'unicité, car les seuls sous-espaces hermitiens de noyau H sont alors hilbertiens (en effet, le carré scalaire d'un élément de $H(\bar{E}')$ est ≥ 0 si $H \geq 0$, alors, par continuité, le carré scalaire de tout élément de $\mathcal{H}$ est ≥ 0) et l'unicité résulte de la Proposition 8. (Signalons, par contre, qu'un sous-espace préhermitien admissible, non préhilbertien, c. à d. à forme non ≥ 0 ,

peut avoir un noyau ≥ 0). Un sous-espace hermitien est dit d'unicité ou de multiplicité, si son noyau associé l'est.

Proposition 39. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux sous-espaces hermitiens de E , de même noyau H . Si $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, ces deux espaces hermitiens coïncident.*

Démonstration. Munissons $\mathcal{H}_2$ de la topologie canoniquement définie par sa structure hermitienne; l'injection $j: \mathcal{H}_2 \rightarrow E$ est continue. Si L_1 et L_2 sont les noyaux de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ relativement à $\mathcal{H}_2$, considérés comme des applications $\overline{\mathcal{H}_2'} \rightarrow \mathcal{H}_2$, et si H est considéré comme une application $\overline{E'} \rightarrow \mathcal{H}_2$, on a $H = L_1 j^* = L_2 j^*$. Comme $j^*(\overline{E'})$ est dense dans $\overline{\mathcal{H}_2'}$ (puisque j est injective), on doit avoir $L_1 = L_2$: $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ont déjà même noyau L dans $\mathcal{H}_2$. Mais alors ils contiennent tous deux $L(\overline{\mathcal{H}_2'})$, et, sur ce sous-espace, ont la même forme hermitienne, définie par (4,3). Comme L , noyau de $\mathcal{H}_2$, est l'isomorphisme $\gamma_2^{-1}: \overline{\mathcal{H}_2'} \rightarrow \mathcal{H}_2$, $L(\overline{\mathcal{H}_2'})$ est $\mathcal{H}_2$, et $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont bien le même espace vectoriel avec la même forme hermitienne.

Cette proposition montre que, quand il n'y a pas unicité, les divers sous-espaces hermitiens de même noyau H ne vérifient pas de relations d'inclusion. Ceci donne déjà des exemples d'unicité non hilbertiens: si l'un des sous-espaces hermitiens de noyau H , en tant qu'ensemble, est E lui-même, il y a unicité.

Proposition 40. *Soit H un noyau hermitien, différence $H_1 - H_2$ de 2 noyaux ≥ 0 , rang de $H_2 = h$ fini. Alors, pour toutes les décompositions $H = K_1 - K_2$ comme différence de 2 noyaux ≥ 0 étrangers, le rang de K est un même entier $k \leq h$. En outre H est un noyau d'unicité.*

Démonstration. Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$, les sous-espaces hilbertiens de noyaux H_1, H_2, K_1, K_2 . $\mathcal{H}_2$ est de dimension h , puisqu'il doit être l'adhérence du sous-espace de dimension finie $H_2(\overline{E'})$ donc égal à ce sous-espace. On a $H_1 + K_2 = H_2 + K_1$; appelons L le noyau et $\mathcal{L}$ le sous-espace hilbertien correspondant. On a $\mathcal{H}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{H}_2 + \mathcal{K}_1 = \mathcal{L}$. Donc la codimension de $\mathcal{K}_1$ dans $\mathcal{L}$ est $\leq h$. Mais $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ sont étrangers, et tous deux contenus dans $\mathcal{L}$, donc $\dim(\mathcal{K}_2) \leq h$, et par suite $k = \text{rang de } K_2 \leq h$. La décomposition initiale est maintenant inutile. Supposons donc, pour con-

tinuer, que $H_1 - H_2$ et $K_1 - K_2$ soient toutes deux des décompositions en différences de deux noyaux ≥ 0 étrangers. Alors la démonstration ci-dessus donne $\text{rang de } K_2 \leq \text{rang de } H_2$ mais aussi $\text{rang de } H_2 \leq \text{rang de } K_2$, donc ces rangs sont égaux; soit k leur valeur commune. Alors $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{K}_1$ ont tous les deux dans $\mathcal{L}$ des codimensions $\leq k$, puisque leurs sommes avec $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{K}_2$ donnent $\mathcal{L}$; et aussi $\geq k$, puisqu'ils sont étrangers avec $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{K}_2$, donc ils ont la même codimension k . Mais alors $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont étrangers et $\dim \mathcal{H}_2 = \text{codim } \mathcal{H}_1$, donc $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}$ et de même $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{L}$. Les espaces hermitiens de même noyau H , $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ et $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2$, coïncident en tant qu'ensembles avec $\mathcal{L}$, donc sont le même espace hermitien d'après la Proposition 39. Comme tout espace hermitien $\mathcal{H}$ de noyau H est une différence du type précédent, H est bien un noyau d'unicité.

Ainsi les seuls noyaux de multiplicité possibles sont ceux qui s'écrivent $H_1 - H_2$, H_1 et $H_2 \geq 0$ étrangers ayant tous deux un rang infini. Mais l'exemple qui suit la Proposition 39 montre que, même dans ce cas, H peut être d'unicité.

Donnons un exemple d'un noyau de multiplicité. Soit E un espace hilbertien, et soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, deux sous-espaces vectoriels fermés, tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$, et que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ soit dense dans E sans être égal à E . Alors leurs orthogonaux dans E , $\mathcal{A}^\times$, $\mathcal{B}^\times$ pour la structure hilbertienne de E , ont la même propriété. Munissons les tous de la structure hilbertienne induite par E . Identifions $\bar{E}$ à E par la structure hilbertienne. Appelons A , B , les noyaux de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dans E ; ceux de $\mathcal{A}^\times$, $\mathcal{B}^\times$, sont $I - A$, $I - B$, puisque $\mathcal{A} + \mathcal{A}^\times = E$. On a donc $A - B = (I - B) - (I - A)$. Cependant les sous-espaces hermitiens $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^\times - \mathcal{A}^\times$ ne coïncident pas; en effet les ensembles correspondants sont $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ et $\mathcal{A}^\times + \mathcal{B}^\times$; s'ils coïncident, ce serait un sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^\times$ donc E , or $\mathcal{A} + \mathcal{B} \neq E$. $A - B$ est donc un noyau de multiplicité relatif à E , $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ un sous-espace hermitien de multiplicité. La multiplicité peut donc déjà se produire dans un espace hilbertien E . Il est bien connu que la situation précédente exige que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient de dimension infinie. Le résultat serait le même si on supposait simplement $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ non fermé. Si en effet E_1 est alors l'adhérence de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ dans E , $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ est de multiplicité dans E_1 , donc dans E . Il est bien connu que, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-espaces vectoriels fermés étrangers d'un espace hil-

bertien la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ne soit pas fermé, est ⁽⁵⁹⁾:

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ il existe } a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, \text{ de norme } 1, \text{ tels que} \\ \|a - b\| \leq \varepsilon; \text{ ou encore tels que } (a|b) \geq 1 - \varepsilon. \end{array} \right.$$

Lorsque cette condition (T) est vérifiée, nous dirons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont en position (T) (tangente). Si donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-espaces vectoriels fermés étrangers en position (T) d'un espace hilbertien E , $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ est de multiplicité dans E .

Passons maintenant à une situation plus générale qui revient à tout transformer par une application linéaire continue. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces hilbertiens de E quelconque. Supposons qu'on puisse trouver, sur l'ensemble $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, une structure de sous-espace préhilbertien $\mathcal{H}$ de E , induisant sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ leurs structures hilbertiennes, mais dans laquelle ils soient en position (T). $\mathcal{H}$ n'est pas complet, d'après ce qui précède. Montrons qu'alors le sous-espace hermitien $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ de E est de multiplicité. Soit en effet $\hat{\mathcal{H}}$ le complété de $\mathcal{H}$; l'injection j de $\mathcal{H}$ dans E se prolonge en une application linéaire continue $\hat{j}$ de $\hat{\mathcal{H}}$ dans E , qui en général ne sera pas injective. Soit $\mathcal{N}$ le noyau de $\hat{j}$, $\mathcal{K}$ l'orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\hat{\mathcal{H}}$. Soit p le projecteur orthogonal de $\hat{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{K}$. L'image $\hat{j}(\mathcal{H})$ est le Q -complété $\hat{\mathcal{H}}_Q$ de $\mathcal{H}$ dans E (Proposition 1 bis). Les sous-espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont, par rapport à $\hat{\mathcal{H}}$, exactement dans la situation envisagée antérieurement: fermés, munis de la structure hilbertienne induite, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ dense mais distinct de l'espace entier $\hat{\mathcal{H}}$, puisque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont en position (T) dans $\mathcal{H}$ donc dans $\hat{\mathcal{H}}$. Puisque $\hat{j}$ est l'identité sur $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, on a $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cap \mathcal{N} = \{0\}$, et p est injective sur $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Considerons les sous-espaces étrangers $p(\mathcal{A})$, $p(\mathcal{B})$, de $\mathcal{K}$, munis des structures hilbertiennes transportées; on a $\hat{j}p(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, $\hat{j}p(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Les sous-espaces hilbertiens "différences" $\mathcal{K} - p(\mathcal{A})$, $\mathcal{K} - p(\mathcal{B})$ (au sens de la Proposition 14) sont encore étrangers dans $\mathcal{K}$. Si en effet ils ne l'étaient

⁽⁵⁹⁾ Dire que (T) est réalisée, c'est en effet dire que l'application $(a,b) \rightsquigarrow (a,b)$ de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est discontinue. Or cela revient à dire que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas topologiquement supplémentaires dans $\mathcal{A} + \mathcal{B}$; d'après le théorème de Banach (Bourbaki [1], Chapitre I, §3, n°3, Corollaire 4 du Théorème 1), cela équivaut à dire que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ n'est pas complet, ou pas fermé dans E .

pas, il existerait un sous-espace hilbertien $\mathcal{L}$ de $\mathcal{H}$, distinct de $\{0\}$, tel que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H} - p(\mathcal{A})$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H} - p(\mathcal{B})$; on aurait alors aussi $\mathcal{L} + \mathcal{N} \subseteq (\mathcal{H} - p(\mathcal{A})) + \mathcal{N} = (\mathcal{H} + \mathcal{N}) - p(\mathcal{A})$ (les deux sous-espaces hilbertiens de $\hat{\mathcal{H}}$ figurant de part et d'autre du signe $=$ ont même noyau associé, donc sont bien égaux) $= \hat{\mathcal{H}} - p(\mathcal{A})$, et de même $\mathcal{L} + \mathcal{N} \subseteq \hat{\mathcal{H}} - p(\mathcal{B})$; d'où $\mathcal{L} \subseteq \hat{\mathcal{H}} - (p(\mathcal{A}) + \mathcal{N}) \subseteq \hat{\mathcal{H}} - \mathcal{A}$ et $\mathcal{L} \subseteq \hat{\mathcal{H}} - \mathcal{B}$, ce qui est impossible, puisque $\hat{\mathcal{H}} - \mathcal{A} = \mathcal{A}^\times$ et $\hat{\mathcal{H}} - \mathcal{B} = \mathcal{B}^\times$ sont étrangers dans $\hat{\mathcal{H}}$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ étant dense. On peut donc former l'espace hermitien $(\mathcal{H} - p(\mathcal{B})) - (\mathcal{H} - p(\mathcal{A}))$ dans $\mathcal{H}$; il a même noyau que $p(\mathcal{A}) - p(\mathcal{B})$, relativement à $\mathcal{H}$; montrons que ces deux sous-espaces hermitiens de $\mathcal{H}$ sont toujours distincts. Ils ne peuvent en effet coïncider que s'il existe une forme hermitienne sur $\mathcal{H}$ qui est ≥ 0 sur $p(\mathcal{A})$ et ≤ 0 sur $\mathcal{H} - p(\mathcal{A})$; on a alors $p(\mathcal{A}) \cap (\mathcal{H} - p(\mathcal{A})) = \{0\}$; mais alors $\mathcal{H} = p(\mathcal{A}) + (\mathcal{H} - p(\mathcal{A}))$ montre que $p(\mathcal{A})$ et $\mathcal{H} - p(\mathcal{A})$ sont deux sous-espaces fermés orthogonaux de $\mathcal{H}$, avec la structure hilbertienne induite. Comme $\mathcal{A}$ a la structure hilbertienne induite par $\hat{\mathcal{H}}$ et que p diminue strictement les normes des éléments de $\mathbf{C}\mathcal{H}$, cela veut dire que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$; de même $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. Mais alors, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ étant dense dans $\hat{\mathcal{H}}$, on a $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$, $\mathcal{N} = \{0\}$; mais alors on sait que, puisqu'on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ dense distinct de $\hat{\mathcal{H}}$, $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ et $(\hat{\mathcal{H}} - \mathcal{B}) - (\hat{\mathcal{H}} - \mathcal{A})$ sont distincts. Ceci montre bien que $p(\mathcal{A}) - p(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{H} - p(\mathcal{B})) - (\mathcal{H} - p(\mathcal{A}))$ sont des sous-espaces hermitiens distincts de $\mathcal{H}$, de même noyau dans $\mathcal{H}$. Comme ensuite j est injective sur $\mathcal{H}$, leurs images par j ont la même propriété dans E ; or l'image du premier est $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, donc $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ est de multiplicité dans E , comme nous l'avions annoncé.

Ceci va nous permettre de donner de larges classes de noyaux de multiplicité.

Soient H, K deux noyaux ≥ 0 , $K \geq H$; nous dirons que H est K -compact, si, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ étant les sous-espaces hilbertiens correspondants, l'injection $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ est compacte; ou encore si la boule unité de $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{K}$ (auquel cas elle est compacte, puisqu'elle est faiblement compacte).

Proposition 41. *Soient H_1, H_2 , deux noyaux ≥ 0 étrangers de E , tous deux de rang infini. Supposons qu'il existe un noyau $K \geq 0$ tel que H_1 et H_2 soient K -compacts; alors le noyau hermitien $H_1 - H_2$ est de multiplicité.*

Démonstration. Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, les sous-espaces hilbertiens de E associés aux noyaux précédents. Soit i_1 l'injection de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$, qui est compacte; son adjointe i_1^* est donc aussi compacte de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_1$, identifiés à $\overline{\mathcal{H}'}$ et $\overline{\mathcal{H}'_1}$; a fortiori le noyau $A_1 = i_1 i_1^*$: $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_1$ relativement à $\mathcal{H}$ est compact. Mais A_1 est aussi hermitien ≥ 0 ; utilisons sa décomposition spectrale, qui est discrète. On peut trouver une base orthonormale $(u_i)_{i \in I}$, I contenant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, telle que $Au_n = \varepsilon_n u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, $Au_i = 0$ pour $i \notin \mathbb{N}$, la suite des $\varepsilon_n > 0$ tendant vers 0 pour $n \rightarrow \infty$ (il est classique que les valeurs propres, chacune comptée avec son ordre de multiplicité, forment une suite finie, ou infinie tendant vers 0; le cas fini est exclu puisque H_1 est supposé de rang infini). On a d'ailleurs $\mathcal{H}_1 = \sqrt{A_1} \mathcal{H}$ (Corollaire 5 de la Proposition 21), de sorte que les $a_n = \sqrt{\varepsilon_n} u_n$ forment une base orthonormale de $\mathcal{H}_1$. On peut de même trouver une base orthonormale $(v_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{H}$, et une suite $\eta_n > 0$ tendant vers 0 pour $n \rightarrow \infty$, telle que les $b_n = \sqrt{\eta_n} v_n$ forment une base orthonormale de $\mathcal{H}_2$.

Construisons maintenant sur $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ une structure préhilbertienne $\mathcal{H}$ comme suit. Elle conservera l'orthonormalité des a_n , ainsi que celle des b_n ; a_m et b_n seront orthogonaux pour $m \neq n$; et on posera $(a_n | b_n) = 1 - \delta_n$, $0 < \delta_n < 1$. Autrement dit, pour tout point de $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2 < +\infty, \quad \text{on, posera}$$

$$(13,1) \quad \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} [|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + 2 \operatorname{Re}(1 - \delta_n) \alpha_n \bar{\beta}_n]$$

(La série du second membre est bien toujours convergente, et est bien ≥ 0 en vertu de l'hypothèse $0 < \delta_n < 1$. Nous avons donc bien une structure préhilbertienne séparée sur $\mathcal{H}$). Cette structure induit bien sur $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ leurs structures initiales; en outre, si δ_n tend vers 0 pour n infini, comme $(a_n | b_n)_{\mathcal{H}} = 1 - \delta_n$, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont en position (T) dans $\mathcal{H}$. Il reste à montrer qu'on peut choisir la suite des δ_n de sorte que $\mathcal{H}$ soit sous-espace préhilbertien de E , c. à d. que sa boule unité B soit bornée dans E ; alors ce qui précède l'énoncé de la présente proposition montrera bien que le sous-

espace hermitien $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ de E est de multiplicité, ce qui est le résultat cherché. Il suffit de montrer que B est faiblement bornée. Soit donc e' dans E' .

On a, pour $h = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \in \mathcal{H}$:

$$(13,2) \quad \langle h, e' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \langle a_n, e' \rangle + \beta_n \langle b_n, e' \rangle) .$$

Soit m un entier tel que $\varepsilon_n < 1, \eta_n < 1$ pour $n > m$.

La somme $\sum_{n \leq m}$ admet immédiatement la majoration:

$$(13,2 \text{ bis}) \quad \left| \sum_{n \leq m} (\alpha_n \langle a_n, e' \rangle + \beta_n \langle b_n, e' \rangle) \right| \leq A_{e'} \left\| \sum_{n \leq m} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right\|_{\mathcal{H}}$$

car toute forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est majorée par la norme, à un facteur près. Par ailleurs,

$$\left\| \sum_{n \leq m} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{H}}, \text{ d'où}$$

$$(13,2 \text{ ter}) \quad \left| \sum_{n \leq m} (\alpha_n \langle a_n, e' \rangle + \beta_n \langle b_n, e' \rangle) \right| \leq A_{e'} \|h\|_{\mathcal{H}}$$

Considérons maintenant les $\sum_{n > m}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \left| \sum_{n > m} (\alpha_n \langle a_n, e' \rangle + \beta_n \langle b_n, e' \rangle) \right| = \\ & \left| \sum_{n > m} (\alpha_n \sqrt{\varepsilon_n} \langle u_n, e' \rangle + \beta_n \sqrt{\eta_n} \langle v_n, e' \rangle) \right|, \end{aligned}$$

d'où en appliquant l'inégalité de Schwarz:

$$(13,3) \quad \begin{aligned} &\leq \left(\sum_{n > m} \varepsilon_n |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n > m} |\langle u_n, e' \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &+ \left(\sum_{n > m} \eta_n |\beta_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n > m} |\langle v_n, e' \rangle|^2 \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Comme les u_n et les v_n sont des parties de bases hilbertiennes de $\mathcal{H}$, on a (Corollaire 5 de la Proposition 19):

$$(13,4) \quad \left(\sum_{n>m} |\langle u_n, e' \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq B_{e'}, \quad \left(\sum_{n>m} |\langle v_n, e' \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq B_{e'}$$

$0 \leq B_{e'} < +\infty$ ($B_{e'}$ dépendant de e'). Alors

$$\begin{aligned} \sum_m &\leq B_{e'} \left[\left(\sum_{n>m} \varepsilon_n |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n>m} \eta_n |\beta_n|^2 \right)^{1/2} \right] \\ &\leq 2B_{e'} \sum_{n>m} (\varepsilon_n |\alpha_n|^2 + \eta_n |\beta_n|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Supposons qu'on puisse choisir les δ_n tels que, pour $n > m$:

$$(13,6) \quad \varepsilon_n |\alpha_n|^2 + \eta_n |\beta_n|^2 \leq |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + 2(1 - \delta_n) \operatorname{Re}(\alpha_n \bar{\beta}_n)$$

On aura alors:

$$(13,7) \quad |\langle h, e' \rangle| \leq C_{e'} \|h\|_{\mathcal{H}}, \quad C_{e'} = A_{e'} + 2B_{e'},$$

et la boule unité B de $\mathcal{H}$ sera bien faiblement bornée, ce qui achèvera la démonstration. Or, (13,6) équivaut à:

$$(13,8) \quad (1 - \varepsilon_n)(\alpha_n)^2 + (1 - \eta_n)|\beta_n|^2 + 2(1 - \delta_n) \operatorname{Re}(\alpha_n \bar{\beta}_n) \geq 0$$

Comme $1 - \varepsilon_n > 0$, $1 - \eta_n > 0$, pour $n > m$, (13,8) équivaut à:

$$(13,9) \quad (1 - \varepsilon_n)(1 - \eta_n) - (1 - \delta_n)^2 > 0$$

Il suffira donc de choisir les δ_n arbitraires pour: $n \leq m$ ($0 < \delta_n < 1$), et pour $n > m$:

$$(13,10) \quad 1 - \delta_n = \sqrt{(1 - \varepsilon_n)(1 - \eta_n)} \left(1 - \frac{1}{n}\right):$$

on aura bien $0 < 1 - \delta_n < 1$, donc $0 < \delta_n < 1$, et

$$1 - \delta_n \rightarrow 1 \text{ pour } n \rightarrow \infty, \text{ donc } \delta_n \rightarrow 0.$$

Corollaire 1. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé quasi-complet, ayant la propriété suivante: pour tout sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E , il en existe un autre $\mathcal{K}$, tel que l'injection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ soit compacte. Alors, pour qu'un noyau hermitien de E , différence $H_1 - H_2$ de deux noyaux ≥ 0 étrangers, soit d'unicité, il faut et il suffit que H_1 ou H_2 soit de rang fini.*

Cela résulte trivialement des Propositions 40 et 41.

Corollaire 2. *Soit E le dual d'un espace tonnelé nucléaire. Pour qu'un noyau hermitien H de E , différence $H_1 - H_2$ de 2 noyaux ≥ 0 étrangers soit d'unicité, il faut et il suffit que H_1 ou H_2 soit de rang fini.*

Démonstration. $E = F'$, où F est tonnelé nucléaire, donc réflexif; $\bar{E}' = F$. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E . Par adjonction de l'injection $\mathcal{H} \rightarrow E$, on a une application linéaire continue $\bar{E}' \rightarrow \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ étant identifiée avec $\mathcal{H}'$). Mais on sait que toute application linéaire continue d'un espace nucléaire $F = \bar{E}'$ dans un Banach se factorise par un produit d'opérateurs nucléaires. Il existe des espaces de Banach $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, telle que $\bar{E}' \rightarrow \mathcal{H}$ se factorise en $\bar{E}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$, toutes ces applications étant nucléaires. Mais toute application nucléaire d'un Banach dans un autre se factorise en un produit d'applications continues, avec un Hilbert intermédiaire; il existe donc une factorisation de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ en $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{B}$, où les applications sont linéaires continues, et $\mathcal{K}_1$ est un Hilbert. On a donc $\bar{E}' \rightarrow \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}$, où $\mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ est nucléaire donc compacte. Par adjonction l'injection $\mathcal{H} \rightarrow E$ se factorise en $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_1 \rightarrow E$, où $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_1$ est compacte. Si $\mathcal{H}$ est l'image de $\mathcal{K}_1$ dans E , avec la structure hilbertienne image, on a la factorisation $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow E$ donc $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow E$, $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ compacte; $\mathcal{K} \rightarrow E$ et $\mathcal{H} \rightarrow E$ sont les injections canoniques, donc aussi $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$; autrement dit $\mathcal{H}$ est sous-espace hilbertien de E , $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, tel que l'injection $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ soit compacte. Il suffit alors d'appliquer le Corollaire 1.

Exemples. $E = \mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{O}_M, \mathcal{O}'_M, \mathcal{O}_C, \mathcal{O}'_C$ (⁶⁰).

Supposons maintenant que $\bar{E}'$ soit sous-espace de E , dans les conditions du §11. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hermitien normal de E . Son anti-dual $\bar{\mathcal{H}}'$ est alors un sous-espace hermitien normal de E , si l'on transporte la structure hermitienne de $\mathcal{H}$ sur $\bar{\mathcal{H}}'$ par l'isomorphisme γ . La Proposition 28 bis reste alors valable. Par contre il ne semble pas y avoir d'équivalent des Propositions 29, 30.

Si le noyau H de $\mathcal{H}$ est prolongeable, il est nécessaire, pour que $\mathcal{H}$ soit normal, que H ait un inverse hermitien, puisque le noyau $\bar{H}'$ de $\bar{\mathcal{H}}'$ en est un; mais cela n'a aucune raison d'être suffisant. (Si d'ailleurs H a un noyau inverse bilatère quelconque L , il a aussi un inverse hermitien $(L + L^*)/2$). Il serait intéressant d'étendre aux opérateurs différentiels hermitiens la théorie du potentiel et le problème de Dirichlet tels qu'ils ont été exposés au §11.

Index des définitions et notations.

Sous-espace préhilbertien ou hilbertien d'un espace vectoriel topologique page 124.

Application anti-linéaire, anti-isomorphisme, note (1), page 119.

Anti-espace $\bar{E}$, page 119.

Dual, anti-dual, transposée, contragrédiente, page 120.

Application sesquilinéaire, note (5) page 121.

Conjuguée, adjointe d'une application, ${}^t u, u^*$, page 122.

Espace quasi-complet note (6), page 124.

Topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ note (7), page 124.

Complété d'un sous-espace préhilbertien, page 129; Q -complété, page 131.

Opérations sur les sous-espaces hilbertiens; multiplication par les scalaires, page 132, addition page 132, relation d'ordre page 136.

Cône convexe saillant, page 137.

Noyau, page 139; Noyau associé ou reproduisant, page 141.

Image d'un espace hilbertien par une application, $u(\mathcal{H})$, page 174.

Espace normal, page 209.

(⁶⁰) Tous ces espaces sont tonnelés, nucléaires, réflexifs, donc aussi leurs duals. Voir par exemple Schwartz [1], Chapitres 3 et 7, et Grothendieck [1], Chapitre II, §2,n.3, page 54.

Sous-espace préhermitien admissible, page 235; espace hermitien, page 244;
 sous-espace hermitien, page 244.

Noyau d'unicité, page 245.

E'^* , page 125.

$\mathcal{H}^s$, page 126; $\wedge^2(X, \mu)$, page 128.

Hilb(E), page 132; Herm(E), page 239; Foncteur Hilb, page 187.

$\mathcal{L}^+(E)$, page 141; $\mathcal{L}^h(E)$, page 239; Foncteur $\mathcal{L}^+$, page 187.

Noyau d'Aronszajn $A(x, \xi)$, page 189.

H et $\tilde{H}$, page 140.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

- N. ARONSZAJN: Il faudrait citer de nombreux travaux. En voici un, qui contient une bibliographie: "Theory of reproducing kernels", *Trans. Amer. Math. Soc.*, tome 68, 1950, p. 337-404.
- S. BERGMAN: Il faudrait citer un grand nombre de travaux. En voici un, qui contient une bibliographie: "The kernel function and conformal mapping", *Mathematical Surveys*, n^o.V, *Amer. Math. Soc.* 1950;
- S. BERGMAN [1]: "Les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, avec les applications à la théorie des fonctions analytiques", Interscience Publishers, New-York, 1941.
- S. BERGMAN ET M. SCHIFFER [1] "Kernel functions and elliptic differential equations in Mathematical Physics", Academic Press, New-York, 1953.
- BOURBAKI, [1]: "Espaces vectoriels topologiques", Paris, Hermann, 1953 et 1955
 [2]: "Utilisation des nombres réels en topologie générale", Paris, Hermann, 1958
 [3]: "Intégration vectorielle", Paris, Hermann, 1959
- J. DENY [1]: "Les potentiels d'énergie finie", *Acta Mathematica*, tome 82(1950), p. 107-183.
- J. DIEUDONNÉ-L.SCHWARTZ [1]: "La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}\mathcal{F}$ ", *Annales de l'Institut Fourier*, tome 1, 1949, p. 61-101.
- J. DIXMIER [1]: "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien", Paris, Gauthiers-Villars, 1957.
- L. HÖRMANDER [1]: "Linear partial differential operators", Berlin, Springer, 1963.
- B. MALGRANGE [1]: "Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution", *Annales de l'Institut Fourier*, tome 6, 1955-56, p. 271-355.
- G. DE RHAM [1]: "Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques", Paris, Hermann, 1955.
- M. SCHIFFER ET S. BERGMAN, voir S. BERGMAN of M. SCHIFFER.
- L. SCHWARTZ [1]: "Théorie des Distributions", Paris, Hermann, 1957 et 1959.
 [2]: "Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles", *Journal d'Analyse Mathématique*, Jerusalem, Vol. IV, 1954-55, p. 88-148.

[3] "Distributions à valeurs vectorielles", *Annales de l'Institut Fourier*, tome VII, 1957, p. 1-141, et tome VIII, 1959 p. 1-210.

[4]: "Sous-espaces hilbertiens et anti-noyaux associés," Séminaire Bourbaki, 1961-62, exposé n°. 238, p 1-18.

[5]: "Spazi di Hilbert e nuclei associati" *Centro Internazionale Matematico Estivo*, Université de Rome, 1961.

L. SCHWARTZ-J. DIEUDONNÉ, voir J. DIEUDONNÉ-L. SCHWARTZ.

A. WEIL [1]: "Variétés kählériennes", Paris, Hermann, 1958.

(Reçu le 8 mars 1964)

INSTITUT HENRI POINCARÉ
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE PARIS.