

# ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

**Causalité et analyticité**

*An. Acad. Brasil. Ci.*, 34 (1962), p. 13-21.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*  
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Causalité et Analyticité \*)

LAURENT SCHWARTZ

*Faculté des Sciences, Paris, France*  
*et Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Gb*

(Reçu le 17 Novembre; présenté par J. LEITE LOPES)

## § 1. LA CONVOLUTION EN PHYSIQUE

Considérons un système physique qui, à chaque excitation définie par une fonction  $E(t)$  du temps  $t$ , nulle pour  $t$  négatif assez grand en valeur absolue, fournisse une réponse, définie par une fonction  $I(t)$ , nulle pour  $t$  négatif assez grand en valeur absolue (par exemple  $E$  est une force électromotrice,  $I$  une intensité).

On définit ainsi un opérateur qui à la fonction  $E$  fait correspondre la fonction  $I$ . Supposons que cet opérateur ait les propriétés suivantes:

1.° Il est linéaire. Si à  $E_1$  correspond  $I_1$  et à  $E_2$  correspond  $I_2$ , alors à  $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$  ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  constantes) correspond  $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2$ .

2.° Il commute avec les translations dans le temps, ce qui exprime l'invariabilité du système physique au cours du temps. Cela veut dire que si, à  $E(t)$ , correspond  $I(t)$ , à l'excitation décalée  $E(t - t_1)$  correspond la réponse décalée  $I(t - t_1)$ .

3.° La réponse n'a jamais lieu avant l'excitation: si  $E(t)$  est nulle pour  $t < t_1$ , alors  $I(t)$  aussi est nulle pour  $t < t_1$  (principe de causalité).

Tirons-en des conséquences, de façon intuitive. Prenons comme excitation  $E(t) = \delta(t)$ , "fonction" de Dirac et soit  $I(t) = A(t)$  la réponse;  $A(t)$  est nulle pour  $t < 0$  d'après 3.°.

Prenons ensuite comme excitation la même décalée dans le temps:  $E(t) = \delta(t - \tau)$ ; alors la réponse est la même décalée dans le temps:  $I(t) = A(t - \tau)$ , d'après 2.°.

Mais alors toute excitation peut se décomposer en combinaison linéaire

des  $\delta(t - \tau)$ :  $E(t) = \int E(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ . On en déduit, d'après 1.°, que

$$I(t) = \int E(\tau) A(t - \tau) d\tau.$$

---

\*) Reproduit d'un document de la *Faculté des Sciences de Paris, Séminaire Schwartz-Lévy, 1956-57*, après des conférences de l'auteur au *Centre Brésilien des Recherches Physiques*.

Autrement dit l'opérateur est un opérateur de convolution avec la "fonction"  $A(t)$ , nulle pour  $t < 0$ :

$$I = A * E. \quad (1,1)$$

Il est évident que ce raisonnement est mathématiquement insuffisant. D'abord il faut admettre des excitations ou des réponses qui soient des distributions du temps, et non des fonctions. Ensuite une intégrale n'est pas une somme, il y a en outre un passage à la limite; il faut donc supposer en outre, la continuité de l'opérateur  $E \rightarrow I$ . Mathématiquement on a la proposition suivante:

**PROPOSITION I:** Soit  $E \rightarrow I$  un opérateur qui à toute distribution  $E \in \mathcal{D}'_t$ , nulle pour  $t$  négatif assez grand en valeur absolue, fasse correspondre une distribution  $I \in \mathcal{D}'_t$  nulle pour  $t$  négatif assez grand en valeur absolue et ayant les propriétés suivantes:

- 1.° L'opérateur est linéaire;
- 2.° Il commute avec les translations dans le temps;
- 3.° Si  $E \in \mathcal{D}'_+$  (espace des distributions ayant leur support dans la demi-droite  $t \geq 0$ ), alors  $I \in \mathcal{D}'_+$ .
- 4.° L'opérateur est continu de  $\mathcal{D}'_+$  dans  $\mathcal{D}'_+$ . Alors l'opérateur est de la forme  $E \rightarrow I = A * E$ , où  $A$  est une distribution de  $\mathcal{D}'_+$ .

La démonstration en est donnée (aux questions de support près, mais elles sont évidentes), dans Théorie des Distributions, tome II, théorème X, p. 18, et p. 53.

On remarque simplement, comme plus haut, que si à  $\delta_t$  correspond  $A_t \in \mathcal{D}'_t$ , alors

$$\begin{aligned} &\text{à } \delta_{t-\tau} \text{ correspond } A_{t-\tau}, \text{ et à} \\ &\Sigma c_\nu \delta(t - \tau_\nu) \text{ correspond } \Sigma c_\nu A(t - \tau_\nu) \end{aligned}$$

Autrement dit la formule  $I = A * E$  est vraie si  $E$  est une combinaison linéaire finie  $\Sigma c_\nu \delta(t - \tau_\nu)$ ; comme ces combinaisons sont denses dans  $\mathcal{D}'_+$  et que l'opérateur est continu, elle est toujours vraie. La distribution  $A_t$  s'appellera l'*admittance* du système physique.

Supposons maintenant qu'on émette une excitation périodique  $E(t) = e^{-2i\pi\omega t}$ . Alors, bien que cette excitation ne soit pas nulle pour  $t$  négatif assez grand en valeur absolue, il se peut qu'il lui corresponde une seule réponse périodique de même fréquence,  $a(\omega) e^{-2i\pi\omega t}$ . On pourra admettre que, si  $E(t)$  est une excitation assez régulière, développable en intégrale de Fourier:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\omega) e^{-2i\pi\omega t} d\omega, \text{ il lui corresponde une réponse donnée}$$

$$\text{par } I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\omega) a(\omega) e^{-2i\pi\omega t} d\omega.$$

Mais si  $I$  a une transformée de Fourier,  $i(\omega)$ , on a aussi

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\omega) e^{-2i\pi\omega t} d\omega \text{ d'où } i(\omega) = e(\omega) a(\omega).$$

Ce raisonnement est mathématiquement assez dénué de sens. Il pourra arriver que, pour certaines valeurs de  $\omega$ , il n'y ait pas de réponse périodique d'amplitude finie (résonance,  $a(\omega) = \infty$ ). Alors les intégrales n'auront qu'un sens très douteux. D'autre part, si à l'excitation périodique  $E$  correspond, parmi toutes les réponses possibles, une seule réponse de même fréquence, à une excitation  $E$  quelconque correspondent plusieurs réponses  $I$  (à cause des oscillations propres du circuit); il est difficile d'en choisir une meilleure que les autres et d'assurer qu'elle est égale à l'intégrale ci-dessus. Mieux vaut dire que la formule  $I = A * E$  donne, si  $A, I, E$ , sont des distributions tempérées, et si elles sont images de Fourier  $A_t = \mathcal{F} a_\omega, I_t = \mathcal{F} i_\omega, E_t = \mathcal{F} e_\omega$ , par la formule de transformation de la convolution en multiplication:  $i_\omega = a_\omega e_\omega^1$  si les conditions requises pour la transformation de la convolution en multiplication sont vérifiées.  $I_t = A_t * E_t$  a toujours un sens, puisque ces distributions sont dans  $\mathcal{D}'_+$ , mais la formule de multiplication n'en a pas toujours.

Naturellement  $a_\omega$  n'est pas arbitraire, puisque son image de Fourier  $A_t$  a son support dans la demi-droite  $t \geq 0$ .

## § 2. PROBLÈME: SOIT $a_\omega$ UNE DISTRIBUTION TEMPÉRÉE [2]

Examiner à quelle condition l'image de Fourier  $A_t = \mathcal{F} a_\omega =$

$$= \int \exp(-2i\pi\omega t) a_\omega d\omega \text{ a son support dans la demi-droite } t \geq 0.$$

On connaît une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi: il faut et il suffit que  $a_\omega$  soit la limite (dans l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'_\omega$ )  $a_\omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\omega + i\varepsilon)$ , où  $a(Z)$  est une fonction holomorphe pour  $\Im Z > 0$ , majorée en module par une puissance de  $|Z|$  pour  $\Im Z \geq N > 0$  quelconque [3].

Cette analyticité de  $a(Z)$  permet d'obtenir une relation entre les parties réelle et imaginaire de  $a_\omega$  (pour  $\omega$  réel). Si l'on ne fait sur  $a_\omega$  aucune restriction de décroissance à l'infini, cette relation ne permettra sûrement pas de calculer  $\mathcal{J} a_\omega$  à partir de  $\mathcal{R} a_\omega$ ; en effet, " $a_\omega =$  constante complexe  $\alpha + i\beta$ " a les propriétés demandées, quelles que soient les constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$ , puisque  $A_t = \mathcal{F} a_\omega = (\alpha + i\beta) \delta$ ; il ne doit donc pas être possible de calculer  $\beta$  à partir de  $\alpha$ . Nous nous poserons donc le

**PROBLÈME:** Moyennant quelle condition de décroissance à l'infini sur  $a_\omega$  est-il possible d'exprimer que  $A_t$  a son support dans  $t \geq 0$  par une relation entre  $\mathcal{R} a_\omega$  et  $\mathcal{J} a_\omega$ , permettant de calculer chacune de ces quantités à partir de l'autre?

### §3. CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS AVEC $\text{vp} \frac{1}{x}$

**DÉFINITION.** On appellera  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$  l'espace des distributions  $I$  telles que  $\frac{I}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{D}'_{L^1}$ . On dira que  $I$  converge vers 0 dans l'espace  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$  si  $\frac{I}{\sqrt{1+x^2}}$  converge vers 0 dans  $\mathcal{D}'_{L^1}$ .

**EXEMPLES:** Toute distribution à support borné appartient à  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ .

Toute fonction  $f$  telle que  $\frac{f}{\sqrt{1+x^2}} \in L^1$  appartient à  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ ; en particulier toute fonction continue  $f$  majorée, pour  $|x| \rightarrow \infty$ , par  $\frac{1}{|x|^k}$ ,  $k > 0$ , ou par  $\left(\frac{1}{\log|x|}\right)^k$ , pour  $k > 1$ .

La constante 1 n'appartient pas à  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ .

Si  $I \in \sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ , il en est de même des dérivées de  $I$ , et la dérivation est une opération linéaire continue sur  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ .

Les espaces de distribution  $\mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{S}', O'_c, \mathcal{D}'_{L^p}$  pour  $p < \infty$ , sont dans  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$  et sont denses dans cet espace.  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$  est contenu dans  $\mathcal{S}'$ .

**DÉFINITION.** La distribution tempérée  $\text{vp} \frac{1}{x}$  est définie par

$$\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x}, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (3,1)$$

**PROPOSITION 2.** Si  $T \in \sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ , l'expression

$$- \left\langle \frac{T}{\sqrt{1+x^2}}, \sqrt{1+x^2} \left( \text{vp} \frac{1}{x} * \varphi \right) \right\rangle = - \left\langle \frac{T}{\sqrt{1+x^2}}, \psi \right\rangle \quad (3,2)$$

a un sens pour toute  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Elle définit une forme linéaire continue de  $\varphi \in \mathcal{S}$  donc une distribution tempérée, que nous appellerons  $T * \text{vp} \frac{1}{x}$ .

L'application  $T \rightarrow T * \text{vp} \frac{1}{x}$  est continue de  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$  dans  $\mathcal{S}'$ , et coïncide avec la convolution avec  $\text{vp} \frac{1}{x}$  si cette convolution existe pour les raisons habituelles ( $T \in O'_c, T \in \mathcal{D}'_{L^p}, p < \infty$ ).

D'abord  $\text{vp} \frac{1}{x} * \varphi$  est la fonction

$$\theta(x) = \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

On a la majoration

$$\frac{1}{|\xi|} \leq \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{1+(x-\xi)^2} \text{ pour } |\xi| \geq 1. \text{ Donc}$$

$$\left| \int_{|\xi| \leq 1} \varphi(x-\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \int_{|\xi| \geq 1} |\varphi(x-\xi)| \sqrt{1+(x-\xi)^2} \cdot d\xi =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\xi)| \sqrt{1+\xi^2} d\xi \leq \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ puisque } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Par ailleurs

$$\left| \text{vp} \int_{|\xi| \leq 1} \varphi(x-\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right| = \left| \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x-\xi) - \varphi(x)}{\xi} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \text{Max}_{|\xi-x| \leq 1} |\varphi'(\xi)| \leq \frac{C_2}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ puisque } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Finalement

$$|\theta(x)| \leq \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{1+x^2}},$$

donc  $\psi = \sqrt{1+x^2} \theta$  est une fonction bornée. Mais les dérivées successives de  $\theta$  s'obtiennent par la même formule de convolution, dans laquelle  $\varphi$  est remplacée par ses dérivées; donc toutes les fonctions  $\sqrt{1+x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \theta$  sont bornées, donc  $\sqrt{1+x^2} \theta = \psi$  est bornée ainsi que chacune de ses dérivées:

$$\psi \in \mathcal{B}. \text{ Comme alors } \frac{\mathbf{T}}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{D}'_{L^1},$$

l'expression (3,2) a bien un sens [5]. D'autre part si  $\varphi$  converge vers 0 dans  $\mathcal{S}$ , (3,2) converge vers 0, parce que  $\psi$  converge vers 0 dans  $\mathcal{B}$ . Donc on définit bien par (3,2) une distribution  $\mathbf{S}$  tempérée, telle que  $\langle \mathbf{S}, \varphi \rangle = (3,2)$ . Il est

normal de poser  $\mathbf{S} = \mathbf{T} * \text{vp} \frac{1}{x}$  car, dans les cas où ce produit de convolution

a un sens pour les raisons habituelles, on a bien  $\langle \mathbf{T} * \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{T}, -$

$$- \text{vp} \frac{1}{x} * \varphi \rangle = - \langle \frac{\mathbf{T}}{\sqrt{1+x^2}}, \sqrt{1+x^2} \left( \text{vp} \frac{1}{x} * \varphi \right) * \rangle = \langle \mathbf{S}, \varphi \rangle$$

L'application  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T} * \text{vp} \frac{1}{x}$  est continue de  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ , dans  $\mathcal{S}'$ ; car si  $\varphi$  parcourt un ensemble borné dans  $\mathcal{S}'$ ,  $\psi$  parcourt un ensemble borné dans  $\mathcal{B}$ ; si alors  $\mathbf{T}$  converge vers 0 dans  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ ,  $\frac{\mathbf{T}}{\sqrt{1+x^2}}$  converge

vers 0 dans  $\mathcal{D}'_{L^1}$ , et pour que  $T$  appartienne à  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ , il faut et il suffit qu'elle puisse s'écrire  $T = T_0 + x T_1$ ,  $T_0 \in \mathcal{D}'_{L^1}$ ,  $T_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}$  (elle peut alors s'écrire  $T = x S_1$ ,  $S_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}$ ). (3,2) converge vers 0.

On peut considérer que " $T \in \sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ " est la condition la plus générale sous laquelle  $T * \text{vp} \frac{1}{x}$  puisse se définir; on dira donc aussi que  $\sqrt{1+x^2} \mathcal{D}'_{L^1}$  est l'espace des distributions composables avec  $\text{vp} \frac{1}{x}$ .

#### §4. MULTIPLICATION DES DISTRIBUTIONS PAR DES FONCTIONS À VARIATION LOCALEMENT BORNÉE

**DÉFINITION.** On appellera  $(\mathcal{E}^0)'$  l'espace des distributions qui sont somme de dérivées premières de fonctions continues.

Comme une fonction continue est elle-même dérivée d'une fonction continue, il revient au même de dire que  $(\mathcal{E}^0)$  est l'espace des dérivées premières de fonctions continues.

**EXEMPLE.** Toute fonction localement sommable est dans  $(\mathcal{E}^0)'$ ;  $\delta$  n'est pas dans  $(\mathcal{E}^0)'$ .

**DEFINITION.** Soit  $T \in (\mathcal{E}^0)'$ . Soit  $f$  une fonction à variation localement bornée, c. a. d. telle que  $f'$  soit une mesure. On définit le produit  $Tf$  par

$$Tf = g'f = (gf)' - gf' \quad (4,1)$$

où  $g$  est l'une quelconque des primitives de  $T$ . Le produit  $Tf$  est une forme bilinéaire de  $T$  et  $f$ .  $Tf$  coïncide avec le produit multiplicatif usuel quand celui-ci existe pour les raisons habituelles ( $T =$  fonction, localement sommable par exemple, où  $f =$  fonction continuellement différentiable).

D'abord (4,1) a un sens. Car  $gf$  est le produit de deux fonctions, toutes deux localement bornées, donc il est une fonction localement bornée; alors  $(gf)'$  est sa dérivée au sens des distributions; ensuite  $f'$  est une mesure et  $g$  une fonction continue, donc  $gf'$  a un sens. (4,1) est indépendant du choix de la primitive  $g$  de  $T$ ; car une autre primitive s'écrit  $g + C$ ,  $C =$  constante, alors  $((g + C)f)' - (g + C)f' = (gf)' - gf'$ .

La bilinéarité est évidente.

Si  $f$  est une fonction continuellement différentiable,  $Tf$  est bien le produit multiplicatif usuel de  $T \in \mathcal{D}'^1$  par  $f \in \mathcal{E}^1$  [6]; on en déduit que  $Tf$  est bien le produit multiplicatif usuel pour  $T$  fonction localement sommable et  $f$  à variation localement bornée, par passage à la limite.

**PROPOSITION 3.** Soit  $Y$  la fonction d'Heaviside (égale à 0 pour  $x < 0$ , à 1 pour  $x > 0$ ),  $\check{Y}$ , sa symétrique par rapport à l'origine (égale à 1 pour  $x < 0$ , à 0 pour  $x > 0$ ). Pour qu'une distribution  $T \in (\mathcal{E}^0)'$  ait son sup-

port dans la demi-droite  $x \geq 0$ , il faut, il suffit que  $\check{Y}T = 0$  ou que  $T = YT$ ; dans ce cas,  $T$  est dérivée d'une fonction continue  $g$ , nulle pour  $x \leq 0$ .

Soit en effet  $T \in (\mathcal{E}^0)'$  une distribution de support dans la demi-droite  $x \geq 0$ . Parmi ses primitives, il en existe une,  $g$ , de support dans  $t \geq 0$ : comme elle est continue,  $g(x)$  est nulle pour  $x \leq 0$ . On a alors  $\check{Y}T = (\check{Y}g)' - \check{Y}'g = 0 + g(0)\delta = 0$ . Alors  $YT = (1 - \check{Y})T = T$ .

Réciproquement si  $T \in (\mathcal{E}^0)'$  vérifie l'une de ces deux conditions équivalentes, on a, dans l'ouvert  $x < 0$ ,  $T = 0$ , puisque  $Y$  vaut 1 dans cet ouvert, donc  $T$  a son support dans  $x \geq 0$ .

### § 5. IMAGES DE FOURIER DE $\text{vp} \frac{1}{\omega}$ , $\delta_\omega^-$ , $\delta_\omega^+$

DÉFINITION.

$$\delta_\omega^+ = \frac{1}{2} \delta_\omega + \frac{1}{2i\pi} \text{vp} \frac{1}{\omega}$$

$$\delta_\omega^- = \frac{1}{2} \delta_\omega - \frac{1}{2i\pi} \text{vp} \frac{1}{\omega} \quad \text{d'où} \quad (5,1)$$

$$\delta_\omega^+ + \delta_\omega^- = \delta_\omega$$

$$\delta_\omega^+ - \delta_\omega^- = \frac{1}{i\pi} \text{vp} \frac{1}{\omega} \quad (5,2)$$

PROPOSITION 4. On a les formules suivantes:

$$\mathcal{Q} \delta_\omega^+ = \check{Y}_t \quad (5,3)$$

$$\mathcal{Q} \delta_\omega^- = Y_t$$

$$\mathcal{Q} \text{vp} \frac{1}{\omega} = -i\pi \frac{t}{|t|} = -i\pi(Y - \check{Y}_t)$$

En effet,  $\text{vp} \frac{1}{\omega}$  est la seule distribution *impaire* dont le produit

par  $-2i\pi\omega$  soit la constante  $-2i\pi$ , donc  $\mathcal{Q} \text{vp} \frac{1}{\omega}$  est la seule distribution im-

paire dont la dérivée soit  $-2i\pi\delta$ , c'est donc  $-i\pi \frac{t}{|t|}$ . Comme  $\mathcal{Q} \delta_\omega = 1$ ,

on en déduit  $\mathcal{Q} \delta_\omega^+$  et  $\mathcal{Q} \delta_\omega^-$ .

REMARQUE. La formule de réciprocity de Fourier donne alors

$$\delta_\omega^+ \equiv \overline{\mathcal{Q}} \check{Y}_t \int_{-\infty}^0 e^{2i\pi t\omega} dt = \int_0^\infty e^{-2i\pi t\omega} dt \quad (5,4)$$

$$\delta_\omega^- \equiv \overline{\mathcal{Q}} Y_t = \int_0^\infty e^{2i\pi t\omega} dt.$$



§6. TRANSFORMATION DE FOURIER, CONVOLUTION AVEC  $\delta_\omega^+$  ET MULTIPLICATION PAR  $\check{Y}_t$ .

PROPOSITION 5. Si  $a_\omega \in \sqrt{1 + \omega^2} \mathcal{D}_{L^1}$ , alors

$A_t = \mathcal{Q} a_\omega \in (\mathcal{E}_t^0)'$ . De plus, l'image de Fourier de  $a_\omega * \delta_\omega^+$  est  $A_t \check{Y}_t$ .

Si en effet  $a_\omega \in \sqrt{1 + \omega^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ , on peut écrire

$$a_\omega = (1 - 2i\pi\omega) b_\omega, \quad b_\omega \in \mathcal{D}'_{L^1}. \quad (6,1)$$

Alors, si  $A_t = \mathcal{Q} a_\omega$ ,  $B_t = \mathcal{Q} b_\omega$

$$A_t = B_t + B'_t$$

Mais l'image de Fourier  $B_t$  de  $b_\omega \in \mathcal{D}'_{L^1}$  est une fonction continue [7] donc  $A_t \in (\mathcal{E}_t^0)'$ .

Ensuite  $a_\omega$  est composable avec  $\text{vp } \frac{1}{\omega}$  donc avec  $\delta_\omega^+$  (prop. 2), et  $A_t$  est multipliable par  $Y_t$  (définition de §4); donc les deux expressions  $a_\omega * \delta_\omega^+$ ,  $A_t \check{Y}_t$  ont un sens.

Soit maintenant  $a_\omega^{(\nu)}$  une suite de distributions à support compact qui, pour  $\nu \rightarrow \infty$  tend vers  $a_\omega$  dans  $\sqrt{1 + \omega^2} \mathcal{D}'_{L^1}$ .

Les  $b_\omega^{(\nu)} = \frac{a_\omega^{(\nu)}}{1 - 2i\pi\omega}$  tendent vers  $b_\omega$  dans  $\mathcal{D}'_{L^1}$ . Alors les  $B_t^{(\nu)} = \mathcal{Q} b_\omega^{(\nu)}$  convergent vers  $B_t$ , uniformément sur tout intervalle fini de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $\nu$ , on a (transformation de la convolution en multiplication, TD, tome II, Théorème XV, p. 124)

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(a_\omega^{(\nu)} * \delta_\omega^+) &= A_t^{(\nu)} \check{Y}_t \\ &= (B_t^{(\nu)} + B_t'^{(\nu)}) \check{Y}_t \\ &= B_t^{(\nu)} Y_t + (B_t^{(\nu)} \check{Y}_t)' + B_t^{(\nu)}(0) \delta_t. \end{aligned}$$

Comme la convolution avec  $\text{vp } \frac{1}{\omega}$  est continue de  $\sqrt{1 + \omega^2} \mathcal{D}'_{L^1}$  dans  $\mathcal{S}'_\omega$  (prop. 2),  $a_\omega^{(\nu)} * \delta_\omega^+$  converge pour  $\nu \rightarrow \infty$  vers  $a_\omega * \delta_\omega^+$  dans  $\mathcal{S}'_\omega$ , donc le premier membre de (6,3) converge vers  $\mathcal{Q}(a_\omega * \delta_\omega^+)$  dans  $\mathcal{S}'_t$ .

Mais  $B_t^{(\nu)}$  converge vers  $B_t$  uniformément sur tout intervalle fini, donc le deuxième membre de (6,3), converge dans  $\mathcal{D}'_t$  vers

$$\begin{aligned} B_t \check{Y}_t + (B_t \check{Y}_t)' + B_t(0) \delta_t &= \\ = A_t \check{Y}_t. \quad \text{On a donc bien } \mathcal{Q}(a_\omega * \delta_\omega^+) &= A_t \check{Y}_t. \end{aligned}$$

## § 7. LE THÉORÈME FONDAMENTAL

Ce théorème n'est qu'un corollaire trivial de la proposition 5:

**THÉORÈME.** Soit  $a_\omega$  une distribution composable avec  $\text{vp } \frac{1}{\omega}$ . La condition nécessaire et suffisante pour que  $A_t = \mathcal{Q} a_\omega$  ait son support dans la demi-droite  $t \geq 0$ , est  $a_\omega * \delta_\omega^+ = 0$  ou

$$a_\omega = -\frac{1}{i\pi} a_\omega * \text{vp } \frac{1}{\omega} \quad \text{ou} \quad (7,1)$$

$$\mathcal{R} a_\omega = -\frac{1}{\pi} \mathcal{J} a_\omega * \text{vp } \frac{1}{\omega}; \quad \mathcal{J} a_\omega = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} a_\omega * \text{vp } \frac{1}{\omega}$$

En effet  $\mathcal{Q}(a_\omega * \delta_\omega^+) = A_t \check{Y}(t)$  (prop. 5) et pour que  $A_t$  ait son support dans  $t \geq 0$ , il faut et il suffit que  $A_t \check{Y}_t$  soit nul (prop. 3).

**COMMENTAIRES.** La condition, telle qu'elle est exprimée, suppose nécessairement que  $a_\omega$  soit composable avec  $\text{vp } \frac{1}{\omega}$ , donc nous n'avons fait sur  $a_\omega$  aucune hypothèse superflue.

Par ailleurs, il y a d'autres cas, plus généraux que ceux pour lesquels  $a_\omega$  est composable avec  $\text{vp } \frac{1}{\omega}$ , où l'on peut quand même trouver une relation entre  $\mathcal{R} a_\omega$  et  $\mathcal{J} a_\omega$  permettant de calculer l'une à partir de l'autre (par exemple il suffit que  $a_\omega$  converge vers 0 à l'infini,  $a_\omega \in \mathcal{B}'_\omega$ , voir TD, tome II, § 8); mais il y en a "bien peu", puisque  $a_\omega = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  constantes complexes, ne doit pas rentrer dans ces cas généraux.

## NOTES

- [1] TD, tome II, théorème XV, p. 124.  
 [2] TD (théorie des distributions), tome II, chap. VII.  
 [3] Nous ne démontrerons pas ici. On pourra le voir en utilisant SCHWARTZ: "Transformation de Laplace des distributions". *Séminaire Math. Univ. Lund*, tome dédié à Marcel Riesz, 1952, p. 196-206.  
 [4] TD, tome II, chapitre VI, § 8, pg. 55.
- Nous écrivons  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  pour avoir la même décroissance à l'infini que  $\frac{1}{|x|}$  mais sans singularité à l'origine. On pourra prendre aussi  $\frac{1}{x + i\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \neq 0$ .
- [5]  $(S, x)$  a un sens pour  $S \in \mathcal{D}'_{L^1}$ ,  $x \in \mathcal{B}$ : TD tome II, dualité entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{D}'_{L^1}$  p. 58.  
 [6] TD, tome I, chapitre V, § 1, formule (V, 1; 4).  
 [7] TD, tome II, exemple 4, p. 112.