Laurent Schwartz

Convergence de distributions dont les dérivées convergent

Studies in mathematical analysis and related topics,
Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1962, p. 364-372.

49

Convergence de Distributions dont les Dérivées Convergent

Laurent Schwartz

On a l'intuition du théorème suivant:

Soit Ω un ouvert connexe de $\boldsymbol{R}^N$ et soit m un entier > 0. Si des distributions T_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ sur Ω sont telles que leurs dérivées partielles d'ordre m convergent vers 0 dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ pour $n \to +\infty$, alors il existe une décomposition $T_n = P_n + S_n$, où les P_n sont des polynomes de degré $\leqq m-1$, et où les S_n sont des distributions qui convergent vers 0 dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Les suites peuvent évidemment être remplacées par des filtres. Il s'agit en réalité d'un théorème d'*homomorphisme*. Appelons $p = (p_1, p_2, \cdots, p_N)$ un indice de dérivation d'ordre $|p| = p_1 + p_2 + \cdots + p_N = m$.* Appelons d^m l'application linéaire continue $T \to d^m T = (D^p T)_{|p|=m}$ de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans $(\mathscr{D}'(\Omega))^M$ (où M est le nombre des indices p d'ordre $|p| = m$), qui à chaque T fait correspondre le système de ses dérivées d'ordre m.

Alors on aura:

L'application d^m de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans $(\mathscr{D}'(\Omega))^M$ est un homomorphisme.†

Remarquons que, pour $m = 1$, c'est un cas particulier des théorèmes de de Rham sur la cohomologie des variétés.‡

Le but de cet article est de montrer ce théorème, étendu à des espaces $\mathscr{A}$ autres que $\mathscr{D}'$.

1. Les espaces $\mathscr{A}$

Soit $\mathscr{A}(\Omega)$ un espace de distributions sur Ω, avec $\mathscr{E}(\Omega) \subset \mathscr{A}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, les injections étant continues.

Nous supposons *toujours* que $\mathscr{A}$ vérifie les deux conditions suivantes:

Condition 1°. *$\mathscr{A}(\Omega)$ est de type local. Nous entendons par là que "$T \in \mathscr{A}(\Omega)$"*

* Nous adoptons une fois pour toutes les notations de Schwartz [5].

† Voir Bourbaki [1, chap. III, sec. 2, no. 8, def. 1] pour la définition des homomorphismes.

‡ Voir de Rham [4, chap. IV, sec. 23].

Reprinted from STUDIES IN MATHEMATICAL ANALYSIS AND RELATED TOPICS edited by Gilbarg, Solomon, and others. Published by Stanford University Press.

est équivalent à: "Quelle que soit $\alpha \in \mathscr{D}(\Omega)$, αT est dans $\mathscr{A}(\Omega)$"; et que "T converge vers dans $\mathscr{A}(\Omega)$" est équivalent à: "Quelle que soit $\alpha \in \mathscr{D}(\Omega)$, αT converge vers 0 dans $\mathscr{A}(\Omega)$."

Par exemple on peut prendre $\mathscr{A}(\Omega) = \mathscr{E}^k(\Omega)$ (k fini ou infini), $\mathscr{D}'(\Omega)$, $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ (espace des classes de fonctions localement L^p dans Ω), etc.

Si Ω_1 est un ouvert de Ω, on peut alors définir $\mathscr{A}(\Omega_1)$ comme l'espace des $T \in \mathscr{D}'(\Omega_1)$ telles que $\alpha T \in \mathscr{A}(\Omega)$ pour toute $\alpha \in \mathscr{D}(\Omega_1)$, et lui mettre la topologie la moins fine pour laquelle, pour toute $\alpha \in \mathscr{D}(\Omega_1)$, $T \to \alpha T$ soit continue de $\mathscr{A}(\Omega_1)$ dans $\mathscr{A}(\Omega)$; et $\mathscr{A}(\Omega_1)$ est encore un espace de distributions sur Ω_1 de type local.

Pour qu'une distribution T sur Ω appartienne à $\mathscr{A}'(\Omega)$[resp. converge vers 0 dans $\mathscr{A}(\Omega)$], il faut et il suffit que, quel que soit $a \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de a dans Ω tel que $T \in \mathscr{A}(\mathscr{U})$[resp. tel que T converge vers 0 dans $\mathscr{A}(\mathscr{U})$].

Condition 2°. Pour toute mesure $\tilde{\omega}$ sur $\mathbf{R}^N$, de support contenu dans la boule de centre origine et de rayon ρ, et pour toute distribution T de $\mathscr{A}(\Omega)$, la distribution $T * \tilde{\omega}$ (qui est définie dans l'ouvert Ω_0 des points de $\mathbf{R}^N$ dont la distance à $C\Omega$ est $> \rho$) appartient à $\mathscr{A}(\Omega_0)$; en outre, pour ρ et $\tilde{\omega}$ fixes, $T \to T * \tilde{\omega}$ est continue de $\mathscr{A}(\Omega)$ dans $\mathscr{A}(\Omega_0)$.

Les espaces $\mathscr{E}^k$ et L^p_{loc}, cités à la fin de 1°, satisfont aussi à 2°. Si $\mathscr{A}(\Omega)$ satisfait à 1° et 2°, il en est de même de $\mathscr{A}(\Omega_1)$ pour tout ouvert Ω_1 de Ω.

Alors nous appellerons $\mathscr{A}^m(\Omega)$ l'espace des distributions qui appartiennent à $\mathscr{A}(\Omega)$ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqq m$, et nous le nunirons de la topologie la moins fine pour laquelle chaque dérivation D^p ($|p| \leqq m$) est continue de $\mathscr{A}^m(\Omega)$ dans $\mathscr{A}(\Omega)$. L'espace $\mathscr{A}^m(\Omega)$ a encore les deux propriétés précédentes.*

2. Enoncés du théorème

THÉORÈME A. *L'application d^m de $\mathscr{A}^m(\Omega)$ dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ est un homomorphisme.*

Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour Ω *connexe*. Car, si les Ω_i ($i \in I$) sont les composantes connexes de Ω, une distribution appartient à $\mathscr{A}^m(\Omega)$ si et seulement si ses restrictions aux Ω_i sont dans les $\mathscr{A}^m(\Omega_i)$; $\mathscr{A}^m(\Omega)$ est isomorphe au produit $\prod_{i \in I} \mathscr{A}^m(\Omega_i)$, et $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ à $\prod_{i \in I}(\mathscr{A}(\Omega_i))^M$; l'application d^m de $\mathscr{A}^m(\Omega)$ dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ est alors le produit des applications d^m des $\mathscr{A}^m(\Omega_i)$ dans les $(\mathscr{A}(\Omega_i))^M$; et un produit d'homomorphismes est un homomorphisme.

---

* La notation $\mathscr{A}^m(\Omega)$ n'est pas toujours très heureuse. On a $(\mathscr{A}^l)^m(\Omega) = \mathscr{A}^{l+m}(\Omega)$. Si on part de $\mathscr{A} = \mathscr{E}^0$, espace des fonctions continues, on trouve $\mathscr{A}^m = \mathscr{E}^m$, espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^m$; mais si on part de $\mathscr{A} = \mathscr{E}$, espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, on trouve $\mathscr{A}^m = \mathscr{E}$, et non $\mathscr{E}^m$ évidemment; la notation $\mathscr{A}^m$ entre ici en conflit avec la notation $\mathscr{E}$ signifiant $\mathscr{E}^\infty$ et non $\mathscr{E}^0$. De même pour $\mathscr{A} = \mathscr{D}'$. Fréquemment on note par H^0_{loc} l'espace L^2_{loc}, et alors par H^m_{loc} l'espace $(L^2_{\text{loc}})^m$.

Soit donc Ω connexe. Le noyau de d^m est l'espace vectoriel $\mathscr{P}$ des polynomes de degré $\leqq m-1$. Sa dimension est finie; il a donc des supplémentaires topologiques dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$. Le théorème A est alors équivalent au suivant:

THÉORÈME B. *Soit Ω connexe. Soit $\mathscr{S}$ un supplementaire topologique de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$. Alors d^m est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ sur $d^m(\mathscr{A}^m(\Omega)) \subset (\mathscr{A}(\Omega))^M$.*

En outre il suffit d'avoir démontré pour un $\mathscr{S}$ particulier, que d^m est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ sur $d^m(\mathscr{A}^m(\Omega))$, pour que ce soit vrai pour tout $\mathscr{S}$.

Si alors on appelle $P=\pi(T)$ et $S=\sigma(T)$ les composantes de $T\in\mathscr{A}^m(\Omega)$ sur $\mathscr{P}$ et $\mathscr{S}$ respectivement, la convergence de d^mT vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ entraine celle de S dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$. C'est l'énoncé de la propriété signalée a l'introduction pour $\mathscr{A}=\mathscr{D}'$ et pour des suites; on outre la décomposition $T_n=P_n+S_n$ peut être choisie indépendante de la suite, puisque c'est la décomposition de T_n suivant $\mathscr{P}$ et $\mathscr{S}$.

Alors les théorèmes A et B sont encore équivalents au suivant:

THÉORÈME C. *Soit Ω connexe. Il existe des applications linéaires $T\to\pi(T)=P$ et $T\to\sigma(T)=S$ de $\mathscr{A}^m(\Omega)$ dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{P}^m(\Omega)$ respectivement, avec $T=P+S$, et telles que la convergence de d^mT vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ entraîne celle de S vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$.*

En effet, nous venons de voir que les théorèmes A et B entraînent l'existence de π et σ (qui sont même alors des projecteurs continus); et si π et σ existent, alors la convergence de d^mT vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ entraîne bien celle de T dans l'espace quotient $\mathscr{A}^m(\Omega)/\mathscr{P}$, et d^m est bien un homomorphisme de $\mathscr{A}^m(\Omega)$ dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$.

Dans ce qui précède, l'hypothèse $T\in\mathscr{A}^m(\Omega)$ est inutile; nous verrons (lemme 2 de la sec. 3) que $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ et $d^mT\in(\mathscr{A}(\Omega))^M$ implique $T\in\mathscr{A}^m(\Omega)$. Alors les théorèmes auront le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *L'espace $d^m(\mathscr{A}^m(\Omega))$ est fermé dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$.*

Supposons d'abord $\mathscr{A}=\mathscr{D}'$ et Ω connexe; alors, si $\mathscr{S}$ est un supplémentaire topologique de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, il est fermé dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ donc complet; mais $d^m(\mathscr{D}'(\Omega))$ lui est isomorphe, il est donc aussi complet, donc fermé dans $(\mathscr{D}'(\Omega))^M$. Si maintenant Ω n'est pas connexe, et si les Ω_i $(i\in I)$ sont ses composantes connexes,

$$d^m(\mathscr{D}'(\Omega))=\prod_{i\in I} d^m(\mathscr{D}'(\Omega_i))$$

est encore fermé dans

$$(\mathscr{D}'(\Omega))^M=\prod_{i\in I}(\mathscr{D}'(\Omega_i))^M .$$

Prenons enfin $\mathscr{A}$ quelconque. Nous avons dit plus haut que $T\in\mathscr{A}^m(\Omega)$ équivaut à $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ et $d^mT\in(\mathscr{A}(\Omega))^M$; autrement dit

$$d^m(\mathscr{A}^m(\Omega)) = d^m(\mathscr{D}'(\Omega)) \cap (\mathscr{A}(\Omega))_M$$

donc $d^m(\mathscr{A}^m(\Omega))$ est fermé dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ même pour la topologie moins fine induite par $(\mathscr{D}'(\Omega))^M$.

3. Démonstration des théorèmes A, B, C

LEMME 1. *Si Ω est un ouvert convexe de $\boldsymbol{R}^N$, alors d^m est un homomorphisme de $\mathscr{E}(\Omega)$ dans $(\mathscr{E}(\Omega))^M$.*

DÉMONSTRATION. On a la formule de Taylor relative à $a \in \Omega$, valable parce que Ω est convexe:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{|p| \leqq m-1} \frac{D^p f(a)}{p!}(x-a)^p + \int_0^1 \Big(\sum_{|p|=m} D^p f(a + t(x-a)) \frac{(x-a)^p}{p!} \Big) m(1-t)^{m-1}\, dt .$$

Si $d^m f$ converge vers 0 dans $(\mathscr{E}(\Omega))^M$, on voit aussitôt que $\int_0^1$ converge vers 0 dans $\mathscr{E}(\Omega)$, donc f converge vers 0 dans le quotient $\mathscr{E}(\Omega)/\mathscr{P}$.

REMARQUE. La formule (1) donne en outre une décomposition de $T = f$ suivant le théorème C, avec $P = \sum_{|p| \leqq m-1}$ et $S = \int_0^1$; si $d^m T$ converge vers 0 dans $(\mathscr{E}(\Omega))^M$, S converge vers 0 dans $\mathscr{E}(\Omega)$.

LEMME 2. *Soit Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^N$, et Ω_0 un ouvert convexe et relativement compact dans Ω. Il existe des applications lineaires $T \to u(T) = U$ et $T \to v(T) = V$, de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_0)$ et $\mathscr{E}(\Omega_0)$ respectivement, telles que $U + V$ soit la restriction de T à Ω_0, et que la convergence de $d^m T$ vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ entraîne celle de U dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$ et celle de $d^m V$ dans $(\mathscr{E}(\Omega_0))^M$.*

Ce lemme montre en particulier que $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $d^m T \in (\mathscr{A}(\Omega))^M$ implique $T \in \mathscr{A}^m(\Omega_0)$; ceci étant vrai pour des Ω_0 formant un recouvrement de Ω, on en déduit $T \in \mathscr{A}^m(\Omega)$, comme nous l'avons énoncé avant le corollaire donné à la sec. 2.

DÉMONSTRATION. $\bar{\Omega}_0$ étant compact, il existe $\rho > 0$ tel que la plus courte distance de $\bar{\Omega}_0$ et de $C\Omega$ soit $> \rho$. Soit alors $\tilde{\omega}$ une paramétrix* de l'opérateur Δ^k, où k est le plus petit entier $\geqq m/2$, de support contenu dans la boule de centre origine et de rayon ρ. On a

$$(2) \qquad \Delta^k \tilde{\omega} = \delta - L \qquad (L \in \mathscr{D}) .$$

D'autre part $\tilde{\omega}$ est une fonction C^∞ dans le complémentaire de l'origine; au voisinage de l'origine, elle est proportionnelle à r^{2k-N} si N est impair ou si $2k - N < 0$, et à $r^{2k-N} \log r$ si N est pair et $2k - N \geqq 0$; $\tilde{\omega}$ est une mesure (et même une fonction) ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqq 2k-1$. L'ensemble des points dont la distance à $C\Omega$ est $> \rho$ contient Ω_0. On peut alors utiliser la propriété 2° de l'espace $\mathscr{A}$. On aura dans Ω_0, en convolant (2) avec T:

* Voir Schwartz [5, tome II, eqs. VI. 6, VI. 22].

(3) $$T = (\tilde{\omega} * \Delta^k T) + (L * T)$$

ou

(4) $$T = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial xj} * \frac{\partial}{\partial xj} \Delta^{k-1} T\right) + (L * T)\,.$$

En appelant U la première parenthèse, V la deuxième, on répondra aux conditions de l'énoncé. D'abord on a bien $V \in \mathscr{E}(\Omega_0)$ puisque $L \in \mathscr{D}$. Supposons que $d^m T$ converge vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$. Alors $d^m V = L * d^m T$ converge vers 0 dans $(\mathscr{E}(\Omega_0))^M$. Si k est pair, $k = m/2$, $2k - 1 = m - 1$, $\Delta^k T$ converge vers 0 dans $\mathscr{A}(\Omega)$, comme somme finie de dérivées d'ordre m de T; et $\tilde{\omega}$ a ses dérivées d'ordre $\leqq m - 1$ qui sont des mesures, donc la première parenthèse de (3), qui donne U, converge vers 0 dans $\mathscr{A}^{m-1}(\Omega_0)$. Si m est impair, $k = (m + 1)/2$, $2k - 1 = m$, donc les $(\partial/\partial xj)\Delta^{k-1} T$, sommes de dérivées d'ordre m de T, convergent encore vers 0 dans $\mathscr{A}(\Omega)$, et $\partial\tilde{\omega}/\partial xj$ a ses dérivées d'ordre $\leqq 2k - 2 = m - 1$ qui sont des mesures, donc la première parenthèse de (4), qui donne U, converge encore vers 0 dans $\mathscr{A}^{m-1}(\Omega_0)$. Mais comme $d^m T$ et $d^m V$ convergent vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega_0))^M$, il en est de même de $d^m U$, donc U converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, et Ω_0 un ouvert convexe relativement compact de Ω. Il existe des applications linéaires $T \to P = \pi(T)$ et $T \to S = \sigma(T)$ de $\mathscr{A}^m(\Omega)$ dans $\mathscr{P}$ et dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$ respectivement, avec $T = P + S$, et telles que la convergence de $d^m T$ vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ entraîne celle de S dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$.*

Notons que π et σ dépendent de Ω_0.

DÉMONSTRATION. Le lemme 2 donne une décomposition $T = U + V$, où $U \in \mathscr{A}^m(\Omega)$ et $V \in \mathscr{E}(\Omega_0)$. Le lemme 1 (voir remarque qui le suit; ou considérer que le lemme 1 est le théorème A de la sec. 2 pour $\mathscr{A} = \mathscr{E}$, et que le théorème C est équivalent au théorème A) donne alors une décomposition $V = P + W$, où $P \in \mathscr{P}$ et $W \in \mathscr{E}(\Omega_0)$. Alors $T = U + P + W$. En posant $S = U + W$, on répond à la question. On a bien en effet $T = P + S$ ($P \in \mathscr{P}$), et $S = T - P \in \mathscr{A}^m(\Omega)$. Si $d^m T$ converge vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$, U converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$ et $d^m V$ dans $(\mathscr{E}(\Omega_0))^M$ (lemme 2); alors W converge vers 0 dans $\mathscr{E}(\Omega_0)$ (lemme 1), donc S converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$, d'où le résultat du lemme 3.

LEMME 4. *Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur $\mathscr{A}^m(\Omega)$. Si l'image de ce filtre par d^m converge vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$, l'ensemble A des points de Ω au voisinage desquels $\mathscr{F}$ converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m$ est ouvert et fermé dans Ω.*

DÉMONSTRATION. Nous disons que $\mathscr{F}$ converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m$ un voisinage de $a \in \Omega$, s'il existe un ouvert $\mathscr{U}$ de Ω contenant a, tel que l'image de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{A}^m(\mathscr{U})$ par la restriction $\mathscr{A}^m(\Omega) \to \mathscr{A}^m(\mathscr{U})$ converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\mathscr{U})$.

Alors l'ensemble A est ouvert par définition. Montrons qu'il est fermé.

Soit $a \in \bar{A}$. Soit Ω_0 un voisinage ouvert convexe relativement compact de a dans Ω. Il existe $b \in A$ dans Ω_0; soit $\mathscr{U}$ un voisinage ouvert de b dans Ω_0, tel que $\mathscr{F}$ converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\mathscr{U})$. Le lemme 3 appliqué a Ω et Ω_0 donne une décomposition $T = P + S$. Suivant $\mathscr{F}$, $d^m T$ converge vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$, donc S converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$, donc dans $\mathscr{A}^m(\mathscr{U})$; T converge aussi vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\mathscr{U})$, donc aussi P. Mais, $\mathscr{P}$ étant de dimension finie, la topologie induite par $\mathscr{A}^m(\mathscr{U})$ sur $\mathscr{P}$ est la même que celle de $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$. Alors P et S convergent vers 0 suivant $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$, donc aussi T; cela montre que $a \in A$, donc A est bien fermé.

Démonstration des théorèmes A, B, C, de la sec. 2. Nous allons démontrer le théorème C. Soit Ω_0 un ouvert convexe relativement compact de Ω. Le lemme 3 nous donne une décomposition

$$I = \pi + \sigma , \qquad T = P + S \quad [T \in \mathscr{A}^m(\Omega), P \in \mathscr{P}, S \in \mathscr{A}^m(\Omega)] ,$$

telle que la convergence de $d^m T$ vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ entraîne la convergence de S vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega_0)$, mais avec la convergence de $d^m S = d^m T$ vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega)).^M$ Appliquant alors le lemme 4 à S, on trouve un ensemble A ouvert et fermé dans Ω, ensemble des points de Ω au voisinage desquels S converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m$. $A \supset \Omega_0$ donc A n'est pas vide; Ω est connexe donc $A = \Omega$; de sorte que, la convergence dans $\mathscr{A}^m$ étant de nature locale, la convergence de $d^m T$ vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ entraîne celle de S dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$, et le théorème C est complètement démontré.

4. Quelques applications

Théorème D. *Soit Ω un ouvert connexe de $\boldsymbol{R}^N$. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur $\mathscr{A}^m(\Omega)$. Si son image par d^m converge vers* 0 *dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$, et si $\mathscr{F}$ converge vers* 0 *pour une topologie θ d'espace vectoriel sur $\mathscr{A}^m(\Omega)$, moins fine que celle de $\mathscr{A}^m(\Omega)$, non nécessairement séparée mais induisant sur $\mathscr{P}$ une topologie séparée, alors $\mathscr{F}$ converge vers* 0 *dans la topologie initiale de $\mathscr{A}^m(\Omega)$.*

Démonstration. Utilisons la décomposition $T = P + S$ du théorème C. Alors, suivant $\mathscr{F}$, S converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$, donc dans θ; il en est de même de T par hypothèse, donc de P. Mais, $\mathscr{P}$ étant de dimension finie, la topologie θ, séparée sur $\mathscr{P}$, est identique à celle de $\mathscr{A}^m(\Omega)$; donc P converge vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$, ainsi que S, donc aussi T, cqfd.

Exemple 1°. θ est la topologie $\mathscr{D}'(\omega)$ faible, où ω est un ouvert non vide de Ω.

Exemple 2°. Soient A_ν des formes linéaires continues sur $\mathscr{A}^m(\Omega)$, telles que 0 soit le seul polynôme de $\mathscr{P}$ orthogonal à toutes les A_ν. Alors la convergence vers 0 de $d^m T$ dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$, et des $\langle A_\nu, T \rangle$ dans C, entraîne celle de T dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$. Ici θ est la topologie définie par les semi-normes $T \to |\langle A_\nu, T \rangle|$. Si $\mathscr{A} = \mathscr{E}$, on peut prendre pour A_ν les $D^p \delta_{(a)}$, où $|p| \leqq m - 1$; pour $f \in \mathscr{E}(\Omega)$, la convergence de $d^m f$ vers 0 dans $(\mathscr{E}(\Omega))^M$

et des $D^p f(a)$ dans $\mathbf{C}(|p| \leqq m-1)$, entraîne la convergence de f vers 0 dans $\mathscr{E}(\Omega)$; c'est ce que donnait directement la formule de Taylor (1), pour Ω convexe.

Exemple 3°. Le lemme de transmission de Morel [3, chap. I, sec. 2, no. 2, lemme 6] est une conséquence immédiate du théorème D. En utilisant ses notations (mais en écrivant m là où il écrit k), avec Ω ouvert connexe de $\mathbf{R}^N$, $\mathscr{A} = L^p_{\text{loc}}$, la convergence de $\| u \|_{(h),p}$ vers 0 entraîne la convergence de $d^m u$ vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$, tandis que la convergence vers 0 de $\| u \|_{m-1,p,K}$ entraîne la convergence vers 0 de u dans une topologie θ, non séparée sur $\mathscr{A}^m(\Omega)$ mais séparée sur $\mathscr{P}$; ces deux convergences entraînent donc la convergence de u vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$ par le théorème D, donc la convergence vers 0 de $\| u \|_{m,p,K'}$. La proposition 1 de [3, chap. I, sec. 2, no. 3] s'obtient de la même manière; une fonction, dont les dérivées d'ordre $m \geqq 1$ sont dans L^p local, est bien définie presque partout sur tout hyperplan, et

$$\varphi \to \int \sum_{|\alpha| \leqq m-1} | D^\alpha \varphi |^p \, d\sigma$$

est une semi-norme continue sur $\mathscr{A}^m(\Omega)$, définissant sur $\mathscr{P}$ une topologie séparée, d'où son résultat.

Voici une autre variante d'applications:

THÉORÈME E. *Soit $\mathscr{T}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}^m(\Omega)$, et Ω connexe. Pour que, pour $T \in \mathscr{T}$, la convergence de $d^m T$ vers 0 dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ soit équivalente à la convergence de T vers 0 dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$, il faut et il suffit que $\mathscr{T} \cap \mathscr{P} = \{0\}$; ou encore que $\mathscr{T}$ soit contenu dans un supplémentaire topologique de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$; ou encore qu'il existe un système de formes linéaires continues A_ν sur $\mathscr{A}^m(\Omega)$, nulles sur $\mathscr{T}$, mais qui ne soient toutes nulles sur aucun polynôme $P \neq 0$ de $\mathscr{P}$.*

DÉMONSTRATION. Les deux premières conditions sont équivalentes (Hahn-Banach). Elles sont suffisantes (théorème B). Elles sont aussi trivialement nécessaires; car, si $\mathscr{T} \cap \mathscr{P} \neq \{0\}$, alors il existe un filtre $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{T}$, convergeant vers $P \neq 0$ de $\mathscr{P}$, et tel que, cependant, son image par d^m converge, dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$, vers $d^m P = 0$. La troisième condition est équivalente aux deux premieres; car, si elle est réalisée, $\mathscr{T}$ est contenu dans le sous-espace vectoriel fermé d'équations $\langle A_\nu, T \rangle = 0$, dont l'intersection avec $\mathscr{P}$ est réduite à $\{0\}$; et, si $\mathscr{T}$ est contenu dans un supplémentaire topologique $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}$, on pourra prendre des A_ν en nombre égal à dim $\mathscr{P}$ ayant la propriété indiquée. Donnons par exemple l'application suivante. Supposons que $\mathscr{A}$ verifie, non seulement les conditions 1° et 2° données àla sec. 1, mais la suivante:

Condition 2A. *Si la mesure $\tilde{\omega}$ converge vaguement vers δ en restant de norme bornée, et en gardant son support dans la boule de centre origine et de rayon ρ, alors $T * \tilde{\omega}$ converge vers T dans $\mathscr{A}(\Omega_0)$.*

En raisonnant d'abord sur T à support compact, on voit, par régularisation, que $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{A}^m(\Omega) \cap \mathscr{E}'(\Omega)$; mais, d'apres la condition

1, ce dernier est dense dans $\mathscr{A}^m(\Omega)$. Alors $\mathscr{A}^m(\Omega)$ est un espace de distributions "normal" ($\mathscr{D}$ dense) et son dual est un sous-espace vectoriel $(\mathscr{A}^m(\Omega))'$ de $\mathscr{D}'(\Omega)$, et même de $\mathscr{E}'(\Omega)$, puisque $\mathscr{E}(\Omega) \subset \mathscr{A}^m(\Omega)$ avec injection continue. Soit maintenant K une partie fermée de Ω, et soit $\mathscr{T}$ le sous-espace des $T \in \mathscr{A}^m(\Omega)$ a support dans $\Omega - K$. $\mathscr{D}(\Omega - K)$ est dense dans $\mathscr{T}$; car toute T de $\mathscr{T}$ est limite des αT, qui sont à support *compact* dans $\Omega - K$, et αT est limite de ses règularisées, qui sont dans $\mathscr{D}(\Omega - K)$. L'orthogonal $\mathscr{T}^0$ de $\mathscr{T}$ est donc le sous-espace formé des $A \in (\mathscr{A}^m(\Omega))'$ à support (compact) contenu dans K. Alors le théorème E donne:

COROLLAIRE 1. *Supposons que $\mathscr{A}$ vérifie les conditions* 1, 2, 2A. *Soit Ω connexe, et soit K fermé dans Ω; soit $\mathscr{T}$ le sous-espace de $\mathscr{A}^m(\Omega)$ fermé des distributions à support dans $\Omega - K$. Pour que, pour $T \in \mathscr{T}$, la convergence de $d^m T$ vers* 0 *dans $(\mathscr{A}(\Omega))^M$ soit équivalente à la convergence de T vers* 0 *dans $\mathscr{T}$, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun polynôme $P \neq 0$ de $\mathscr{P}$ orthogonal à l'espace $\mathscr{T}^0$ des distributions de $(\mathscr{A}^m(\Omega))'$ à support* (*compact*) *contenu dans K.*

Prenons, par exemple, $\mathscr{A}(\Omega) = H^0(\Omega) = L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ et $m = 1$. Alors $\mathscr{A}^1(\Omega) = H^1_{\text{loc}}(\Omega)$,*

$$(\mathscr{A}^1(\Omega))' = H^{-1}_{\text{comp}}(\Omega) \quad [= H^{-1}(\Omega) \cap \mathscr{E}'(\Omega)];$$

$\mathscr{P}$ est l'espace des constantes. Si K est de capacité nulle, il ne porte aucune $A \in H^{-1}_{\text{comp}}(\Omega)$ sauf 0, donc $\mathscr{T}^0 = \{0\}$ et la condition précédente n'est pas réalisée. Si K est de capacité > 0, il porte au moins une A non nulle de $H^{-1}_{\text{comp}}(\Omega)$, et par conséquent aussi une A_1 de masse non nulle, $\langle A_1, 1\rangle \neq 0$ (car, si $A \in H^{-1}_{\text{comp}}(\Omega)$, on a aussi $\varphi A \in H^{-1}_{\text{comp}}(\Omega)$, pour $\varphi \in \mathscr{D}$, et $\langle \varphi A, 1\rangle = \langle A, \varphi\rangle$, de sorte que $A_1 = \varphi A$ répond à la question si on choisit φ telle que $\langle A, \varphi\rangle \neq 0$). $\mathscr{P}$ étant l'espace des constantes, "$A_1 \in \mathscr{T}^0, \langle A_1, 1\rangle \neq 0$" donne juste la condition du corollaire 1. Alors:

COROLLAIRE 2. *Soit Ω connexe dans $\mathbf{R}^N$, et K fermé dans Ω. Pour que, pour des $f \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ à support dans $\Omega - K$, la convergence des dérivées premières de f dans $H^0_{\text{loc}}(\Omega)$ entraîne la convergence de f dans $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, il faut et il suffit que K soit de capacité* > 0.

Ceci étend un resultat de Morel [3, chap. I, sec. 2, no. 3, exemple 2 après le théorème 1]. L'extension a $m \geqq 2$ (qui correspondraït à des recherches analogues à celles de Hörmander-Lions [2], mais avec H^m_{loc} au lieu de H^m) semble beaucoup plus difficile, car les variétés algébriques contenant K (définies par des équations polynomiales $P_\nu(x) = 0$) jouent un rôle important.

Remarquons aussi qu'on peut étendre des résultats de cet article à certains espaces $\mathscr{A}$ ne vérifiant pas les conditions de la sec. 1. Par exemple, si $\mathscr{S}'$ est l'espace des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^N$, alors d^m est un homomorphisme de $\mathscr{S}'$ dans $(\mathscr{S}')^M$, bien que $\mathscr{S}'$ ne soit pas de type local.

On le verra par des précedés tout à fait analogues à ceux de la sec. 3. La formule de Taylor (lemme 1) montre que d^m est un homomorphisme de $\mathscr{O}_M$

* Voir note 4 *supra*.

dans $(\mathcal{O}_M)^M$ et que $d^m T \in \mathcal{O}_M$ entraîne $T \in \mathcal{O}_M$.* Une paramétrix $\tilde{\omega}$ de Δ^k montrera, comme au lemme 2, qu'il existe dans $\mathcal{D}'$ une décomposition $T = U + V$ $(U \in \mathcal{D}', V \in \mathcal{E})$, de manière que la convergence de $d^m T$ vers 0 dans $\mathcal{S}'$ entraîne celle de U dans $\mathcal{S}'$ et celle de $d^m V$ dans $(\mathcal{O}_M)^M$ (et en particulier que $d^m T \in \mathcal{S}'$ entraîne $T \in \mathcal{S}'$, donc que $d^m \mathcal{S}' = d^m \mathcal{D}' \cap (\mathcal{S}')^M$). Alors, comme au lemme 3, on posera $V = P + W$ $(P \in \mathcal{P}, W \in \mathcal{O}_M)$, de manière que la convergence de $d^m V$ dans $(\mathcal{O}_M)^M$ entraîne celle de W dans $\mathcal{O}_M$; on prendra $S = U + W$; on aura $T = P + S$, et la convergence de $d^m T$ dans $\mathcal{S}'$, entraînera celle de S dans $\mathcal{S}'$, ce qui prouvera la propriété.

Université de Paris

RÉFÉRENCES

[1] BOURBAKI, *Topologie Générale*. Paris: Hermann, 1960, chaps. III et IV.

[2] HÖRMANDER, L., and J. L. LIONS, Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, *Mathematica Scandinavica*, **4** (1956), 259-70.

[3] MOREL, H., Introduction de poids dans l'étude des problèmes aux limites, *Annales de l'Institut Fourier*, **12** (1962) 299-414.

[4] DE RHAM, G. W., *Variétés Différentiables*. Paris: Hermann, 1955.

[5] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*. Paris: Hermann, 1957-1959.

* Voir Schwartz [5, tome II, p. 99]. Les deux M de $(\mathcal{O}_M)^M$ n'ont evidemment pas la même signification!