L. SCHWARTZ

Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico

Rend. Sem. Mat. fis. Milano, 27 (1958), p. 211-249.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

SCHWARTZ L.

Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico

Estratto dai
"Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano„
Vol. XXVII

1958
LIBRERIA EDITRICE POLITECNICA
CESARE TAMBURINI
MILANO
VIA PASCOLI, 55

LAURENT SCHWARTZ
(*dell'Università di Parigi*)

Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico (*)

SUNTO. — Dopo un richiamo degli aspetti principali della teoria delle distribuzioni, vengono esposti recenti risultati sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico, conseguiti nell'ambito di tale teoria.

1. PRELIMINARI.

Richiamiamo rapidamente per comodità del lettore alcuni concetti e definizioni di teoria degli spazi lineari (o vettoriali) topologici (s. l. t.) e di teoria delle distribuzioni, rinviando per maggiori dettagli ai testi di N. BOURBAKI [2], [3] e di L. SCHWARTZ [5], [6] (1).

Una *trasformazione* che ad ogni elemento x di un insieme E faccia corrispondere un elemento $f(x)$ di un altro insieme F si chiamerà anche un'*applicazione di E in F* e si scriverà d'abitudine con $x \to f(x)$. Se $f(x)$ percorre tutti gli elementi di F al variare di x in E allora si dirà che $x \to f(x)$ è una *applicazione di E su F*. Se E è un sottoinsieme di F e $x \to f(x)$ è l'applicazione di E in F che ad ogni x di E fa corrispondere se stesso si dirà che $x \to f(x)$ è l'*applicazione canonica* (o l'*iniezione*) di E in F.

Salvo esplicito avviso gli s. l. t. e le trasformazioni lineari che considereremo saranno lineari rispetto al corpo complesso.

DEF. 1.1: Uno spazio topologico E è *separato* (o di HAUSSDORFF) se verifica il seguente assioma: dati due punti x e y distinti di E esistono un intorno di x e uno di y senza punti comuni.

(*) Questo testo riproduce sostanzialmente, nella redazione fattane da un gruppo di ascoltatori, le conferenze tenute dal prof. L. SCHWARTZ nell'aprile 1957 presso l'Istituto Matematico dell'Università di Genova e per conto del gruppo dei Seminari Matematici delle Università di Milano, Torino, Pavia e Genova.

(1) V. bibliografia finale per i numeri tra [ ].

DEF. 1.2: Se indichiamo con $B(x)$ il sistema di tutti gli intorni del punto x di uno spazio topologico E, diremo che il sottoinsieme $G(x)$ di $B(x)$ costituisce un *sistema fondamentale di intorni di* x se ogni insieme di $B(x)$ contiene un insieme di $G(x)$.

DEF. 1.3: Uno s. l. t. E è *localmente convesso* (loc. conv.) se possiede un sistema fondamentale di intorni dell'origine ω (e quindi di ogni punto x) che siano convessi.

DEF. 1.4: *Un insieme* B di uno s. l. t. E è *limitato* se, fissato comunque un intorno U dell'origine di E è possibile mediante un'omotetia portare B in U (cioè se esiste un numero λ tale che $\lambda x \in U$ per ogni x di B).

DEF. 1.5: *Un'applicazione lineare* $x \to f(x)$ di uno s. l. t. E in un altro s. l. t. F è *limitata* se trasforma ogni insieme limitato di E in un insieme limitato di F.

TEOR. 1.1: Ogni applicazione lineare continua dello s. l. t. E nello s. l. t. F è anche limitata [3, § 1, n. 12].

DEF. 1.6: Un'applicazione lineare dello s. l. t. E nello s. l. t. dei numeri complessi, che indicheremo con C, si dirà *una forma* (o *un funzionale*) lineare su E.

DEF. 1.7: *Spazio duale di uno s. l. t.*. Indichiamo con $\mathcal{L}(E, C)$ l'insieme di tutti i funzionali lineari e continui su E. La somma di due tali funzionali e il prodotto di essi per un numero complesso sono ancora funzionali lineari continui su E; dunque $\mathcal{L}(E, C)$ può considerarsi come uno spazio lineare i cui elementi indicheremo con x'. Esso dicesi lo *spazio duale* di E. Si introducono di solito in esso diverse topologie [3, § 5 e 6]; noi intenderemo sempre in quel che segue di aver introdotto la cosiddetta topologia forte. Precisamente un sistema fondamentale di intorni dell'origine in $\mathcal{L}(E, C)$ si otterrà prendendo i sottoinsiemi $W(B; U)$ di $\mathcal{L}(E, C)$ tali che:

1) B è un qualunque insieme limitato di E

2) U è un qualunque intorno dello zero in C

3) x' appartiene a $W(B, U)$ se il valore $x'(x)$ che esso assume calcolato in un qualunque punto x di B appartiene a U.

Indicheremo con E' il duale di E quando si intenda introdotta in esso la topologia forte; E' chiamasi anche il *duale forte* di E ed è dunque uno s. l. t.

Conveniamo anche di indicare d'ora innanzi con $< x', x >$ il valore assunto da x' (elemento di E') nel punto x di E; il simbolo $< x', x >$ sta dunque ad indicare la dualità tra E ed E'.

Osserviamo poi che se consideriamo x fissato in E il numero complesso $< x', x >$ al variare di x' in E' definisce una forma (funzionale) lineare e continua su E', per la definizione stessa di E': $x' \to < x', x >$.

Questa forma è dunque un elemento del duale (forte) di E' (che chiamasi anche *biduale forte* di E e si indica con E''). Ebbene se E *è uno s. l. t. loc. conv. e separato* si dimostra facilmente come conseguenza del teorema di HAHN. BANACH, che questa forma è individuata univocamente [3, § 6 n. 3 e n. 15]; si può affermare che *se E è uno s. l. t., loc. conv. e separato gli elementi di E si possono identificare dal punto di vista algebrico con quelli di un sottospazio lineare di E'' (cioè c'è un isomorfismo algebrico di E in E''* (2)). Il simbolo $< x', x >$ rappresenta allora una *forma bilineare* (cioè lineare sia rispetto a x' che a x) e *continua separatamente* sul prodotto topologico $E' \times E$.

DEF. 1.8: Se E è uno s. l, t., loc. conv. e separato e se, previa l'identificazione di cui sopra, avviene che $E \equiv E''$ e inoltre la topologia indotta da E'' su E coincide con quella già esistente in E (cioè se la corrispondenza di cui sopra tra E e E'' è un isomorfismo algebrico e topologico di E su E'') allora diremo che E è *riflessivo*.

Ricordiamo anche che se E è uno spazio di BANACH (o normato) allora può introdursi anche in E' una norma, che induce su E' proprio la topologia forte di cui abbiamo sopra detto: basterà porre come è noto:

$$\| x' \|_{E'} = \underset{\|x\|_E = 1}{\text{estr. sup.}} \; | < x', x > |$$

DEF. 1.9: *Spazio* $\mathcal{D}(\Omega)$. Sia Ω un insieme aperto dello spazio euclideo R^n a n dimensioni. Consideriamo l'insieme delle funzioni complesse $\varphi(x)$ indefinitamente derivabili in Ω e a supporto (3) compatto, contenuto in Ω. Esso si può ovviamente considerare come uno spazio lineare $\mathcal{D}(\Omega)$ rispetto al corpo complesso. Introdurremo ora in $\mathcal{D}(\Omega)$ una topologia per la quale $\mathcal{D}(\Omega)$ risulterà uno s. l. t., loc. conv., separato.

---

(2) Si dice che un'applicazione lineare $x \to f(x)$ di uno spazio lineare E in un altro spazio lineare F è un *isomorfismo algebrico* di E in F (su F) se essa è biunivoca tra E e un sottospazio di F (F intero). Se inoltre E e F sono topologici, l'isomorfismo algebrico si dice di più *topologico* se $x \to f(x)$ è anche bicontinua.

(3) Il supporto di una funzione φ è l'insieme chiuso intersezione di tutti gli insiemi chiusi fuori dei quali φ è $\equiv 0$.

Sia $\{A\} \equiv \{A_0, A_1, \ldots A_\nu, \ldots\}$ una successione di insiemi aperti non vuoti contenuti in Ω e tali che $\overline{A}_\nu \subset A_{\nu+1}$, e che ogni compattò di Ω sia contenuto in A_ν per ν sufficientemente grande (se $\Omega \equiv R^n$ si può per es. prendere per A_ν la sfera $|x| < \nu + 1$). Siano poi $\{\varepsilon\} \equiv$ $\equiv \{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu, \ldots\}$ una successione decrescente e infinitesima di numeri positivi e $\{m\} \equiv \{m_0, m_1, \ldots, m_\nu, \ldots\}$ una successione di numeri interi ≥ 0, crescente e divergente.

Indichiamo con $U(\{m\}, \{\varepsilon\}, \{A\})$ l'insieme delle funzioni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ che per ogni ν, e per x non appartenente ad A_ν, verificano le relazioni

$$| D^p \varphi(x) | \leq \varepsilon_\nu \qquad \text{per} \qquad | p | \leq m_\nu$$

dove con $p \equiv \{p_1, \ldots, p_n\}$ indichiamo un sistema qualunque di n interi ≥ 0, con $| p |$ la somma $p_1 + \ldots + p_n$ e con D^p la derivata parziale

$$\frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}$$

Al variare di $\{m\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{A\}$ si ottiene così un sistema fondamentale di intorni dell'origine di $\mathcal{D}(\Omega)$. Introdotta questa topologia, $\mathcal{D}(\Omega)$ è allora uno s. l. t., loc. conv., separato e anche completo [5, cap. III, § 1].

Def. 1.10: Lo spazio duale (forte) di $\mathcal{D}(\Omega)$ dicesi *spazio delle distribuzioni su* Ω, $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Indicheremo con T i suoi elementi; *una distribuzione T è dunque una forma lineare e continua su* $\mathcal{D}(\Omega)$ e $< T, \varphi >$, indica una forma bilineare e continua separatamente su $\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Le misure μ in Ω e le funzioni f sommabili in ogni compatto di Ω (localmente sommabili in Ω) sono distribuzioni $\in \mathcal{D}(\Omega)$ quando si identifichino rispettivamente con i funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu \qquad \text{e} \qquad f(\varphi) = \int_\Omega f(x) \, \varphi(x) \, dx$$

Teor. 1.2: $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$ sono spazi riflessivi [5, cap. III, § 3, teorema XIV] ([4]).

Teor. 1.3: $\mathcal{D}(\Omega)$ (munito naturalmente della topologia indottavi da $\mathcal{D}'(\Omega)$) è denso in $\mathcal{D}'(\Omega)$ [5, cap. III, § 3, teor. XV].

Per semplicità quando non ci sarà pericolo di equivoco scriveremo $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ in luogo di $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$.

([4]) Sono anzi di più spazi di Montel [5, cap. III, § 2 e 3, teor. VII e XII].

DEF. 1.11: Si dirà *spazio di distribuzioni* ogni sottospazio lineare topologico H di $\mathcal{D}'$, munito di una topologia « più fine » di quella indottavi da $\mathcal{D}'$, tale cioè che l'applicazione canonica (iniezione) di H in $\mathcal{D}'$ sia continua.

DEF. 1.12: Uno *spazio H di distribuzioni si dice normale* se: 1) $\mathcal{D} \subset H \subset \mathcal{D}'$, 2) le iniezioni di H in $\mathcal{D}'$ e di $\mathcal{D}$ in H sono continue, 3) $\mathcal{D}$ è denso in H.

TEOR. 1.4: Se H è uno spazio normale di distribuzioni il suo duale H' si può identificare dal punto di vista algebrico con un sottospazio di $\mathcal{D}'$.

Dimostrazione. — Infatti se $x' \in H'$ esso è una forma lineare e continua su H e quindi per 1) e 2) definisce per « restrizione » una forma lineare e continua su $\mathcal{D}$, cioè una distribuzione T; si ottiene dunque un'applicazione (ovviamente lineare) di H' in un sottospazio K' di $\mathcal{D}'$, la quale è biunivoca tra H' e K' (ed è dunque un isomorfismo algebrico di H' in $\mathcal{D}'$), poichè se $T \equiv 0$ allora $x' \equiv 0$ su $\mathcal{D}$ ed essendo $\mathcal{D}$ denso in H $x' \equiv 0$ su H. C. v. d.

Si vede inoltre subito, per la stessa definizione, che la topologia di H' è «più fine» di quella di $\mathcal{D}'$ (nel senso precisato nella definizione 1.11).

Si osservi che se H è normale H' può non essere uno spazio di distribuzioni (v. esempi seguenti).

Esempi di spazi di distribuzione sono:

1) lo spazio di BANACH $L^p(\Omega)$ delle funzioni f di potenza p-esima sommabile in Ω con $p \geq 1$, dove la norma sia definita al solito da

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} | f(x) |^p \, dx)^{1/p}$$

2) lo spazio di BANACH delle funzioni f misurabili e limitate in Ω dove la norma sia definita da $\| f \|$ = estr. inf. degli M tali che $| f(x) | > M$ solo su sottoinsiemi di Ω di misura nulla.

Questo spazio non è normale perchè ad es. la funzione $\equiv 1$ in Ω non è limite in esso di funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$.

DEF. 1.13: *Derivata di una distribuzione* [5, cap. II]. La derivata rispetto a x_i di una distribuzione T su Ω è la nuova distribuzione su che indicheremo con $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$, definita dalla relazione

$$< \frac{\partial T}{\partial x_i} , \varphi > = - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$$

Ogni distribuzione è dunque indefinitamente derivabile in questo senso e si ha

$$< D^p\, T,\ \varphi > \;=\; (-1)^{|p|} < T,\ D^p\, \varphi > .$$

TEOR. 1.5: La derivazione è un'applicazione lineare e continua di D′ su D′ [5, cap. III, § 5, teor. XVIII].

DEF. 1.14: Indicheremo con $H^s(\Omega)$ (s intero ≥ 0) lo spazio delle distribuzioni T tali che $D^p\, T \in L^2(\Omega)$ per $|\, p\, | \leq s$ ($D^0\, T = T$, dunque T è una funzione di $L^2(\Omega)$). $H^s(\Omega)$ è uno spazio di HILBERT quando si definisca in esso il prodotto scalare ponendo

$$(T_1,\ T_2) = \sum_{|p| \leq s} \int_{\Omega} (D^p\, T_1)\ (\overline{D^p\, T_2})\, dx .$$

Per dimostrare che $H^s(\Omega)$ è uno spazio di HILBERT occorre dimostrare che esso è completo; e ciò si vede immediatamente ricordando che lo spazio $L^2(\Omega)$ è completo e il teorema 1.5.

2. PROBLEMI AL CONTORNO PER OPERATORI ELLITTICI IN TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI.

Tratteremo ora dell'impostazione generalizzata per i problemi ai limiti data da J. L. LIONS ([4] e [7]). Per esemplificare ci limitiamo dapprima allo studio del problema di NEUMANN relativo all'operatore differenziale $D = -\Delta + \lambda$, dove Δ è l'operatore di LAPLACE e λ un numero reale positivo.

Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^n, la cui frontiera sia una ipersuperficie S sufficientemente regolare. Siano assegnate due funzioni f e h definite rispettivamente in Ω e su S. Il problema di NEUMANN per l'operatore D si enuncia come segue:

trovare una funzione u definita in $\Omega + S$, sufficientemente regolare e soddisfacente alle condizioni

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} &(-\Delta + \lambda)\, u = f && \text{in } \Omega \\ &\frac{du}{dn} = h && \text{su } S \end{aligned}$$

dove n è la normale esterna ad S.

Noi vogliamo dare a questo problema una forma opportunamente generalizzata, nella quale si potranno attenuare le ipotesi sia per quanto riguarda Ω ed S, sia per quanto riguarda i dati f e h, la soluzione verrà ricercata in una classe più ampia dell'abituale ciò che rende in generale più agevole la risoluzione del problema così generalizzato rispetto a quello ordinario. Successivamente si presenterà il problema di dimostrare che la soluzione « debole » così trovata gode delle proprietà di regolarità richieste nel problema ordinario quando si facciano sui dati ipotesi di sufficiente regolarità.

Supponiamo dapprima che sia $h = 0$; a questo caso ci si può ricondurre con un artificio ben noto e sul quale del resto ritorneremo in seguito.

Incominciamo allora con l'osservare che se u e v sono funzioni sufficientemente regolari in $\Omega + S$ vale la formula di GREEN

$$(2.2)\quad \int_\Omega Du\,\bar{v}\,dx = \int_\Omega \sum_1^n{}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\,dx + \lambda\int_\Omega u\,\bar{v}\,dx - \int_S \frac{du}{dn}\,\bar{v}\,d\sigma\,.$$

Da essa si ha in particolare, se $Du = f$ e v è nulla su S (in particolare se $v \in \mathcal{D}(\Omega)$)

$$(2.3)\qquad \int_\Omega f\,\bar{v}\,dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\,dx + \lambda\int_\Omega u\,\bar{v}\,dx$$

Ma viceversa se f e u sono sufficientemente regolari e u soddisfa la (2.3) per *ogni* v sufficientemente regolare e *nulla* su S, ad es. $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, segue, come è noto, assai facilmente che $Du = f$ in Ω. Dunque la (2.3) può sostituire l'equazione $Du = f$ nelle ipotesi dette di sufficiente regolarità. D'altra parte la (2.3) può aver senso anche in ipotesi più generali sia su Ω che su u e f, ad es. quando Ω è un insieme aperto e limitato di R^n, $u \in H^1(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, e $f \in L^2(\Omega)$; e il verificarsi di èssa per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ci dice appunto che Du, inteso nel senso della teoria delle distribuzioni, appartiene a $L^2(\Omega)$ e coincide con f. Potremo allora porre la seguente:

DEF. 2.1: *Se Ω è un insieme aperto e limitato di R^n e $f \in L^2(\Omega)$, diremo che una funzione u di $H^1(\Omega)$ soddisfa all'equazione $Du = f$ se verifica la* (2.3) *per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Sempre dalla formula di GREEN (2.2) possiamo ricavare anche un significato generalizzato per la condizione $\dfrac{du}{dn} = 0$ su S. Infatti se Ω e u sono sufficientemente regolari, condizione necessaria e sufficiente perchè $\dfrac{du}{dn} = 0$ su S è che valga la

$$(2.4)\qquad \int_\Omega Du\,\bar{v}\,dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\,dx + \lambda\int_\Omega u\,\bar{v}\,dx$$

per *ogni* v sufficientemente regolare. Ma la (2.4) ha significato anche in ipotesi più generali; potremo dunque generalizzare ponendo la seguente definizione:

DEF. 2.2: *Se* Ω *è un insieme aperto e limitato di* R^n *e* u *è una funzione* $\in H^1(\Omega)$ *e avente l'operatore* Du *(nel senso delle distribuzioni)* $\in L^2(\Omega)$, *diremo che* u *ha « derivata normale nulla su* S *» (o anche appartiene alla classe* N*) se verifica la* (2.4) *per ogni* v *di* $H^1(\Omega)$.

Dunque in sostanza il problema (2.1) nel caso $h = 0$ viene sostituito e generalizzato dalle (2.3) e (2.4); e si osservi che per assegnare le (2.3) e (2.4) basta assegnare la forma sesquilinieare ([5]) nelle u e v che sta a secondo membro della (2.4), la classe $H^1(\Omega)$ in cui si considera questa forma e la funzione $f \in L^2(\Omega)$.

Premesse queste considerazioni su un problema particolare, esaminiamo ora l'impostazione generalizzata dei problemi ai limiti da un punto di vista generale.

Sia Ω un insieme aperto di R^n; le distribuzioni che considereremo saranno sempre distribuzioni su Ω. Sia Q uno spazio di distribuzioni normale, loc. conv. e separato e V uno spazio di HILBERT di distribuzioni, non necessariamente normale, contenuto in Q:

$$\mathcal{D} \subset V \subset Q \subset \mathcal{D}'$$

le iniezioni di D in V, di V in Q, e di Q in D$'$ essendo continue. Sappiamo che Q' è identificabile (v. teor. 1.4) con uno spazio di distribuzioni contenuto in D', in generale diverso da Q (nell'esempio dato sopra è: $V \equiv H^1$, $Q \equiv Q' \equiv L^2$).

Assegnamo ora una forma sesquilineare e continua sul prodotto topologico $V \times V$; indichiamo questa forma con $((u, v))$; essa può anche non essere hermitiana.

Poichè $V \subset \mathcal{D}$ e $\mathcal{D}$ ha una topologia « più fine » di quella di V, fissato u in V la forma $((u, \varphi))$ è un funzionale pseudolineare e continuo in $\mathcal{D}$. Resta definita pertanto in $\mathcal{D}'$ una distribuzione Du, dipendente da u, tale che

$$(2.5) \qquad <Du, \bar{\varphi}> = ((u, \varphi)) \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}$$

e la trasformazione $u \to Du$ di V in $\mathcal{D}'$ è ovviamente lineare; essa è

([5]) Una forma $((u, v))$ nelle due variabili u e v dicesi sesquilineare se è lineare di u e pseudolineare (o semilineare) in v cioè $(au + bz, v)) = a((u, v)) + b(z, v))$, $((u, av + bw)) = \bar{a}((u, v)) + \bar{b}((u, w))$. Alcuni autori usano il termine bilineare anzichè sesquilineare; per noi però una forma è bilineare se è lineare sia in u che in v.

poi anche continua, poichè se $u \to \omega$ in V (ω origine di V), allora $((u, \varphi)) \to 0$ uniformemente al variare di φ in un insieme limitato di $\mathcal{D}$, dunque $Du \to \omega$ in $\mathcal{D}'$.

Ebbene noi porremo la seguente

DEF. 2.3: L'operatore Du definito da (2.5) si dirà l'*operatore definito dalla forma* $((u, v))$.

L'operatore Du può anche non essere differenziale (per es. integrale); ma in generale a noi interesserà il caso degli operatori differenziali. Così la forma

$$((u, v)) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \lambda \int_\Omega u \bar{v} \, dx$$

continua su $H^1 \times H^1$ definisce proprio l'operatore $Du = -\Delta + \lambda$.

Naturalmente dato l'operatore Du, non è detto che resti individuata la forma $((u, v))$, più forme $((u, v))$ potendo definire lo stesso operatore Du.

DEF. 2.4: Indicheremo con N la classe degli elementi u di V tali che:

a) $Du \in Q'$

b) $\langle Du, \bar{v} \rangle = ((u, v))$ per ogni $v \in V$

e diremo che $u \in V$ *soddisfa alle condizioni al contorno omogenee* se $u \in N$.

In generale N non coinciderà con V; basta ricordare l'esempio sopra studiato.

Diremo poi che due elementi di V, u_1 e u_2, *soddisfano alla stessa condizione al contorno* se $u_1 - u_2 \in N$.

Il problema al contorno per l'operatore Du definito da (2.5) si enuncia allora nel modo seguente:

Assegnata $h \in V$ e tale che $Dh \in Q'$, ed $f \in Q'$ trovare $u \in V$ in modo che

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Du = f \\ u - h \in N \end{cases}$$

Posto $g = f - Dh \in Q'$ e $u - h = w$, si è condotti a risolvere il problema seguente:

Trovare un elemento w di V tale che $Dw = g$ con $g \in Q'$ e $w \in N$ cioè trovare $w \in V$ tale che

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} Dw = g \\ <Dw, \bar{v}> = ((w, v)) \quad \text{per ogni } v \in V \end{cases}
$$

Daremo ora una condizione sufficiente per la risolubilità del problema (II) e quindi di (I). Decomponiamo $((u, v))$ nella sua parte hermitiana e in quella antihermitiana, ponendo precisamente:

$$
\text{(2.6)} \qquad \begin{aligned} ((u, v))_1 &= \frac{1}{2} \left[((u, v)) + \overline{((v, u))}\right] \\ ((u, v))_2 &= \frac{1}{2i} \left[((u, v)) - \overline{((v, u))}\right] \end{aligned}
$$

per cui

$$
((u, v)) = ((u, v))_1 + i((u, v))_2
$$

DEF. 2.5: Diremo che $((u, v))$ *è V-ellittica* se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che per ogni $u \in V$ si abbia

$$
((u, u))_1 \geq \alpha \| u \|_V^2
$$

Dimostriamo allora il

TEOR. 2.1: Se $((u, v))$ è V-ellittica il problema (II) ammette una e una sola soluzione per ogni g di Q': di più l'operatore Du stabilisce un isomorfismo algebrico e topologico tra N e Q'.

Infatti se $((u, v))$ è V-ellittica, si ha che $((u, v))_1$ definisce in V un prodotto scalare di norma corrispondente equivalente alla norma $\| u \|_V$ (6). È facile vedere che il problema (II) è equivalente al problema di trovare $w \in V$ tale che

$$
\text{(III)} \qquad ((w, v)) = <g, \bar{v}> \qquad \text{per ogni} \quad v \in V
$$

Ora per g fissato in Q', $<g, \bar{v}>$ è un funzionale pseudolineare continuo in V, spazio di HILBERT rispetto alla norma $\| u \|_V$ e quindi anche rispetto alla norma $((u, u))_1$; dunque esisterà un elemento $Jg \in V$ tale che $<g, \bar{v}> = ((J g, v))_1$ per ogni $v \in V$ e l'operatore J stabilisce una applicazione lineare continua di Q' in V, come è subito visto.

D'altra parte fissato w in V, $((w, v))_2$ è un funzionale pseudolineare continuo in V dunque esisterà un elemento $Aw \in V$ tale che

$$
\text{(2.7)} \qquad ((w, v))_2 = ((Aw, v))_1
$$

(6) Due norme $\|u\|_1$ e $\|u\|_2$ si dicono equivalenti se esistono due costanti c e C tali che $c \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C \|u\|_1$ per ogni u dello spazio.

con A esso pure operatore lineare continuo di V in V. In definitiva (III) si scrive

$$((w, v)) = ((w, v))_1 + i((w, v))_2 = ((w, v))_1 + i((Aw, v))_1 = \\ = ((w + i\,Aw, v))_1 = <g, \bar{v}>$$

e per quanto si è sopra visto ciò equivale all'equazione

(IV) $$(I + iA)w = Jg \qquad \text{in } V$$

Ora A è un operatore hermitiano relativamente al prodotto scalare $((u, v))_1$ in vista di (2.6) e (2.7) e poichè lo spettro di un operatore hermitiano è reale si ha che $I + iA$ è invertibile e quindi (IV) ammette una e una sola soluzione data da

$$w = (I + iA)^{-1}\,Jg = Gg$$

e l'operatore G, come è subito visto, è lineare e continuo tra Q e N; c. v. d.

L'operatore G dicesi *operatore di Green* per il problema.

Come applicazione si ricava allora per il problema di NEUMANN inizialmente considerato il

TEOR. 2.2: Assegnata comunque una funzione $f \in L^2(\Omega)$ e una funzione $h \in H^1(\Omega)$ e tale che $(-\Delta + \lambda)h \in L^2(\Omega)$ esiste una e una sola funzione $u \in H^1(\Omega)$ che soddisfa l'equazione $-\Delta u + \lambda\, u = f$ nel senso della DEF. 2.2 e tale che $u - h$ ha derivata normale nulla nel senso della DEF. 2.2.

Non possiamo per brevità svolgere completamente la teoria di J. L. LIONS; per gli ulteriori sviluppi in particolare per l'applicazione della teoria di RIESZ all'operatore $Du + \lambda\, u$ e per l'effettiva costruzione della forma $((u, v))$ una volta assegnato l'operatore Du (come appunto capita nelle applicazioni) rinviamo a [4].

Naturalmente rimane ora il problema delle ulteriori proprietà (qualitative) di differenziabilità della soluzione « debole » così trovata sia all'interno di Ω che sulla frontiera S. Di esse, almeno limitatamente all'interno di Ω, ci occuperemo nei numeri seguenti.

3. OPERATORI ELLITTICI ED IPOELLITTICI.

Sia D un operatore differenziale di ordine m, a coefficienti complessi indefinitamente derivabili nell'insieme aperto Ω dello spazio $R^n \equiv (x_1, \ldots, x_n)$:

(3.1) $$D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p\,(x)\, D^p$$

DEF. 3.1: Un tale operatore D, che supporremo effettivamente di ordine m (e cioè supporremo non tutti identicamente nulli gli $\alpha_p(x)$ con $|p| = m$), sarà detto *ellittico* nell'insieme aperto Ω se l'insieme dei coefficienti $\alpha_p(x)$ con $|p| = m$ per $x \in \Omega$ soddisfa alla seguente condizione:

$$\sum_{|p|=m} \alpha_p(x)\, \xi^p \neq 0 \qquad \text{per} \qquad \xi \neq 0 \tag{3.2}$$

dove ξ indica la n-pla di numeri reali $\xi_1, \ldots, \xi_n$, e $\xi \neq 0$ significa che uno almeno dei numeri $\xi_1, \ldots, \xi_n$ è diverso da zero, e $\xi^p = \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}$.

Un classico esempio di operatore ellittico è dato dall'operatore Δ [o anche dagli operatori iterati Δ^k]: la (2.2) diventa infatti:

$$\sum_i^{1\cdots n} \xi_i^2 \neq 0 \left[\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^k \neq 0 \right]$$

se uno almeno dei numeri $\xi_1, \ldots, \xi_n$ è diverso da zero.

Esistono anche operatori ellittici del primo ordine (necessariamente a coefficienti complessi); ad es. l'operatore:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

è ellittico perchè la condizione (2.2) diventa in tal caso

$$\frac{1}{2} (\xi + i \eta) \neq 0 \quad \text{per } \xi, \eta \text{ (reali) non entrambi nulli.}$$

Evidentemente un operatore di ordine dispari può essere ellittico solo se ha coefficienti complessi.

Sia ora dato un sistema di l operatori differenziali di ordine m nelle k funzioni $f_1(x), \ldots, f_k(x)$; esso si può anche scrivere con notazione matriciale nel modo seguente:

$$Df \equiv \sum_{|p| \leq m} \alpha_p(x)\, D^p f \tag{3.3}$$

con

$$f \equiv \begin{Vmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k \end{Vmatrix}, \quad D^p f \equiv \begin{Vmatrix} D^p f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D^p f_k \end{Vmatrix}, \quad \alpha_p(x) \equiv \begin{Vmatrix} \alpha_p^{11}(x) & \ldots & \alpha_p^{1k}(x) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_p^{l1}(x) & \ldots & \alpha_p^{lk}(x) \end{Vmatrix}$$

Df è allora una matrice ad l linee e una colonna.

Per un tale operatore differenziale *matriciale* si può intrcdurre una definizione di ellitticità che estende quella data precedentemente.

DEF. 3.2: *Diremo che l'operatore matriciale D definito dalla* (3.3) *è ellittico nell'insieme aperto Ω, se per ogni punto x di Ω e per ogni scelta della n-pla di numeri reali* $\xi \equiv (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ con $\xi \neq 0$, *la matrice*:

$$\sum_{|p|=m} \alpha_p(x)\, \xi^p \qquad (\xi^p = \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}), \tag{3.4}$$

(*ad l linee e k colonne*), *ha caratteristica uguale a k*. In altre parole la matrice (3.4) per ogni x di Ω ha un numero di linee $\geq$ al numero delle colonne e, interpretata come matrice dei coefficienti di una trasformazione lineare tra lo spazio complesso a k dimensioni e lo spazio complesso ad l dimensione, definisce una trasformazione lineare *biunivoca tra lo spazio in cui opera e il suo codominio.*

Se la matrice (3.4) *relativa all'operatore* (3.3) *è quadrata* ($l = k$), *la condizione di ellitticità si traduce nell'ipotesi che il suo determinante sia* $\neq 0$.

Secondo la definizione di ellitticità che abbiamo data risulta ellittico, ad es., l'operatore gradiente che fa corrispondere alla funzione f il vettore:

$$\operatorname{grad} f \equiv \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

In tal caso si ha infatti $k = 1$, $l = n$, e la matrice (3.4) diventa:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$$

Se i numeri $\xi_1, \ldots, \xi_n$ non sono tutti nulli essa ha caratteristica eguale al numero delle colonne (cioè 1), e definisce una applicazione biunivoca dello spazio ad una dimensione in un sottoinsieme dello spazio ad n dimensioni, e precisamente in una retta uscente dall'origine:

$$\begin{cases} y_1 = \xi_1\, x \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = \xi_n\, x \end{cases}$$

Al contrario l'operatore divergenza per $n > 1$ *non* è ellittico. Esso infatti fa corrispondere ad un vettore a $k = n$ componenti un vettore ad $l = 1$ componenti, cioè un numero, e la matrice (3.4) che nel caso attuale diventa:

$$\| \xi_1 \ldots \xi_n \|$$

non può certo avere caratteristica eguale al numero delle colonne, d'accordo col fatto che una trasformazione lineare dello spazio ad n dimensioni sulla retta non può essere biunivocamente invertibile.

I coefficienti dell'operatore (3.1) dell'operatore matriciale (3.3) saranno sempre supposti indefinitamente derivabili in Ω. In tal modo l'operatore (2.1) [(2.3)] può essere applicato ad una distribuzione di $D'(\Omega)$ [ad una distribuzione vettoriale]. (7)

La nozione di ellitticità di un operatore differenziale si collega, come vedremo, ad una nozione di natura assai diversa che vogliamo ora introdurre.

È intanto evidente che se la distribuzione T è una funzione indefinitamente derivabile in Ω allora anche la distribuzione DT è una funzione indefinitamente derivabile in Ω.

DEF. 3.3: *Diremo che l'operatore matriciale D è ipoellittico nell'insieme aperto Ω se: ogni qualvolta DT è una funzione [matrice] indefinitamente derivabile in Ω anche T è una funzione [matrice] indefinitamente derivabile in Ω.*

TEOR. 3.1: *Ogni operatore ellittico in Ω* (3.1) [*o operatore matriciale ellittico* (3.3)] *è ipoellittico in Ω* (8).

L'interesse del teorema (analogo ad un teorema di BERNSTEIN) consiste nella possibilità di affermare che le soluzioni di un problema al contorno per equazioni differenziali ellittiche, in ipotesi di regolarità per i coefficienti e per il termine noto, sono regolari nell'interno del loro campo di definizione. (9)

---

(7) Si ricordi che in generale non è possibile definire il prodotto di due distribuzioni qualunque; è però sempre possibile definire il prodotto di una funzione indefinitamente derivabile per una distribuzione [5, cap. V, § 1].

(8) Il teorema inverso *non* sussiste: ad es. l'operatore (del calore) $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ è ipoellittico ma non ellittico.

Gli operatori ipoellittici a coefficienti costanti sono stati caratterizzati da HÖRMANDER, Acta Math. vol. 94, 1955.

(9) Un'altra applicazione del teorema 3.1 è la seguente: si introduca per le funzioni di due variabili $f(x, y)$ la seguente definizione di *olomorfia*: $f(x, y)$ è olomorfa se $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, le derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni.

Si vede allora che le funzioni olomorfe $\left(\text{essendo ellittico l'operatore } \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ sono indefinitivamente derivabili nel senso usuale e dunque coincidono con le funzioni olomorfe usuali.

Tutte le considerazioni che faremo serviranno per conseguire la dimostrazione del teorema enunciato; riteniamo però utile esporle con qualche maggiore generalità di quel che sarebbe strettamente necessario, perchè il loro interesse non è limitato alla dimostrazione del teorema 3.1.

4. Richiami sulla trasformata di Fourier in teoria delle distribuzioni.

Per comodità del lettore richiamiamo qui brevemente alcune proprietà e definizioni sulla trasformata di Fourier in teoria delle distribuzioni. Tutte le distribuzioni e funzioni considerate saranno definite in R^n.

Def. 4.1: Indicheremo con $\mathcal{S}$ (spazio delle funzioni a decrescenza rapida) lo spazio lineare delle funzioni $\varphi(x)$ complesse indefinitamente differenziabili in R^n e tali inoltre che risulti:

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^k D^p \varphi(x) = 0 \tag{4.1}$$

per ogni n-pla $p \equiv \{p_1, \ldots, p_n\}$ di interi ≥ 0 e per ogni k intero ≥ 0.

Introdurremo in $\mathcal{S}$ la seguente topologia: un sistema fondamentale di intorni dell'origine sarà costituito dagli insiemi $V(m, k, \varepsilon)$ di punti φ di S tali che

$$|(1 + |x|^2)^k D^p \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

per ogni derivata D^p d'ordine $|p| \leq m$, essendo m e k interi ≥ 0 qualunque prefissati ed ε numero reale positivo qualunque prefissato.

Lo spazio $\mathcal{S}$ è loc. conv. separato completo e riflessivo (anzi di Montel) [6, cap. VII, § 3].

Def. 4.2: Diremo spazio $\mathcal{S}'$ (spazio delle distribuzioni temperate) lo spazio duale (forte) di $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}'$ è uno spazio di distribuzioni ed è loc. conv. separato completo e riflessivo (anzi di Montel) [6, cap. VII, § 4].

Valgono inoltre le seguenti relazioni pressochè evidenti

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

ciascuno degli spazi avendo topologia «meno fine» del precedente, che è in esso contenuto. Di più $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}$ (e quindi $\mathcal{D}$) è denso in $\mathcal{S}'$; gli spazi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono dunque spazi normali di distribuzioni [6, cap. VII, §§ 3 e 4].

Indicheremo con $\hat{\varphi}(y)$ la trasformata usuale di Fourier di una funzione $\varphi(x)$ definita in tutto R^n:

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{R^n} \varphi(x) \exp(-2\pi i\, x \cdot y)\, dx \tag{4.2}$$

dove $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Per noti risultati sulla trasformata di FOURIER usuale (v. ad es. [1]), possiamo senz'altro dire che, se $\varphi \in \mathcal{S}$, $\hat{\varphi}$ esiste e si può anche facilmente vedere [6, cap. VII, § 6, teor. XII] che $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e che valgono la formula di reciprocità.

$$\varphi(x) = \int_{R^n} \hat{\varphi}(y) \exp(2\pi i\, x \cdot y)\, dy \tag{4.3}$$

e la formula di PARSEVAL

$$\int_{R^n} \hat{\varphi}_1(y)\, \overline{\hat{\varphi}_2(y)}\, dy = \int_{R^n} \varphi_1(x)\, \overline{\varphi_2(x)}\, dx \tag{4.4}$$

per ogni coppia di funzioni di S; e tenendo conto del fatto che

$$\overline{\hat{\varphi}(x)} = \int_{R^n} \overline{\varphi(y)} \exp(2\pi i\, x \cdot y)\, dy$$

la (4.4) equivale anche alla

$$\int_{R^n} \varphi_1(x)\, \hat{\varphi}_2(x)\, dx = \int_{R^n} \hat{\varphi}_1(x)\, \varphi_2(x)\, dx \tag{4.5}$$

Le (4.2) e (4.3) stabiliscono due isomorfismi algebrici e topologici reciproci l'uno dell'altro, di $\mathcal{S}$ su se stesso [6, cap. VII § 6, teor. XII].

Si può allora definire la trasformata $\hat{T}$ di una qualunque distribuzione T di $\mathcal{S}'$ ponendo per definizione

DEF. 4.3: $$<\hat{T}, \varphi> = <T, \hat{\varphi}>$$

$\hat{T}$ è così la trasformazione trasposta (o aggiunta) della trasformazione di FOURIER in $\mathcal{S}: \varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ definita dalla (4.3).

$\hat{T}$ appartiene perciò ancora ad S'.

Analogamente si definisce la trasformazione reciproca (o coniugata) come trasposta della (4.3) in $\mathcal{S}$.

La trasformazione di FOURIER e la sua reciproca così definite stabiliscono due isomorfismi algebrici e topologici, reciproci l'uno dell'altro, di S' su se stesso [6, cap. VII, § 6, teor. XIII].

La def. 4.3 equivale alla formula usuale (4.2) nei casi in cui quest'ultima è valida. la def. 4.3 è dunque un'effettiva estensione della usuale trasformata di FOURIER. Ed è anche da notare per il seguito la validità [6, cap. VII, § 6, pag. 106] della formula di PARSEVAL nella forma (4.4) e cioè

$$(4.6) \qquad < \hat{T}, \bar{\hat{\varphi}} > = < T, \hat{\varphi} >$$

(la (4.5) è estesa dalla def, 4.3 stessa); e inoltre la validità [6, cap. VII, § 7, pag. 109] della classica formula per la derivazione

$$(4.7) \qquad \widehat{\frac{\partial T}{\partial x_i}} = 2 \pi i y_i \hat{T}$$

il prodotto $y_i \hat{T}$ essendo inteso nel senso delle distribuzioni [5, cap. V, § 1] e cioè $< y_i \hat{T}, \varphi > = < \hat{T}, y_i \varphi >$.

5. Proprietà fondamentali degli spazi H^s.

D'ora innanzi considereremo salvo avviso contrario, distribuzioni e funzioni definite in tutto R^n, indicheremo più semplicemente gli spazi che considereremo con i simboli $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, H^s ecc. ...

Nel n. 1 abbiamo definito gli spazi H^s per s intero ≥ 0. Vedremo ora come possa introdursi lo spazio H^s *per s numero reale qualunque.*

Incominciamo con l'osservare che una funzione f appartiene ad H^s con s intero ≥ 0 se e solo se la sua trasformata di FOURIER appartiene a L^2 insieme alle trafsormate delle sue derivate e cioè, se sono di quadrato sommabile in R^n le funzioni

$$(2 \pi i \xi)^p \hat{f}(\xi) \quad \text{per ogni} \quad p \equiv \{p_1, \dots p_n\} \quad \text{tale che} \quad |p| \leq s$$
$$[(2 i \pi \xi)^p = (2 i \pi \xi_1)^{p_1} \dots (2 i \pi \xi_n)^{p_n}] ;$$

ciò in vista di note proprietà sulla trasformata di FOURIER in L^2 (v. ad es. [1, pag. 126]). La cosa equivale anche al fatto che *ogni* espressione del tipo

$$P(\xi) \hat{f}(\xi)$$

con $P(\xi)$ polinomio di grado s, risulta di quadrato sommabile in R^n, o anche

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2$$

È allora naturale porre la seguente definizione:

DEF. 5.1: *Diremo che la distribuzione T appartiene ad H^s (s reale qualunque) se $T \in \mathcal{S}'$ e la sua trasformata $\hat{T}$ è una funzione tale che*

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2}\ \hat{T}(\xi) \in L^2 \quad [10]$$

Per s intero ≥ 0 si ritrova la definizione usuale data nel n. 1. Per $s \geq 0$ T risulta una funzione di L^2 insieme alle sue derivate d'ordine $\leq [s]$.

Lo spazio H^s è uno spazio di HILBERT (completo) se si assume come prodotto scalare di due elementi S e T

$$(S, T)_s = \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s\, \hat{S}(\xi)\, \overline{\hat{T}}(\xi)\, d\xi$$

e quindi come norma

$$\| T \|_s = \left(\int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s\, |\hat{T}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2}$$

Se s è intero ≥ 0 si ottiene così una norma equivalente [11] a quella usuale definita nel n. 1.

Si hanno per gli H^s le seguenti relazioni di inclusione pressochè evidenti.

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset H^s \subset H^r \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' \qquad (s \geq r)$$

Inoltre l'applicazione canonica di ciascuno spazio nel successivo è continua (cioè ciascuno spazio ha topologia - più fine - del successivo) e tutti i suddetti spazi sono spazi normali di distribuzione.

Accanto agli H^s si introducono a volte lo spazio H^∞, intersezione di tutti gli H^s, e quello $H^{-\infty}$, unione di tutti gli H^s, la topologia introdotta in H^∞ essendo quella - estremo superiore - delle topologie degli H^s e quella introdotta in $H^{-\infty}$ essendo la topologia - limite induttivo - delle topologie degli H^s; noi non avremo però bisogno in seguito di detti spazi e rimandiamo perciò per maggiori precisazioni a [6, cap. VI, § 8] dove H^∞ e $H^{-\infty}$ sono rispettivamente indicati con $\mathcal{D}_{L^2}$ e D'_{L^2}.

Una fondamentale proprietà degli H^s è espressa dal

TEOR. 5.1 (*di dualità*): *Il duale (forte) di H^s si può identificare con H^{-s} sia dal punto di vista algebrico che topologico (cioè c'è un isomorfismo algebrico e topologico di $(H^s)'$ su H^{-s}).*

Occorre naturalmente precisare come deve essere fatta questa identificazione [12]; essa è da intendersi nel senso precisato dal teorema 1.4 (si ricordi che H^s è uno spazio normale di distribuzioni).

---

[10] Si ha ad es. che la funzione di DIRAC $\delta \in H^s$ per $s < -n/2$; infatti $\hat{\delta} = 1$ e $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L^2$ per $s < -n/2$.

[11] V. nota [6].

[12] Si osservi ad es. che in quanto H^s è uno spazio di HILBERT il suo duale può identificarsi con H^s stesso, come è ben noto, attraverso la rappresentazione dei funzionali lineari continui come prodotti scalari.

Il teorema 1.4 ci dice dunque che $(H^s)'$ è identificabile algebricamente con un sottospazio K' di $\mathcal{D}'$. Dimostriamo allora anzitutto che K' è esattamente H^{-s}.

È intanto evidente che se $T \in K'$ essa $\in \mathcal{S}'$, poichè T è una forma lineare continua su H^s e quindi su $\mathcal{S}$.

Per dimostrare che $T \in H^{-s}$ bisognerà dunque dimostrare che

$$(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\,\hat{T}(\xi) \in L^2$$

Osserviamo anzitutto che, poichè T è una forma lineare continua su H^s risulta

$$|<T, \bar{\varphi}>| \leq M$$

dove M è una costante indipendente da φ, al variare di φ nell'insieme delle funzioni di $\mathcal{S}$ tali che $\|\varphi\|_s \leq 1$.

Per la formula di PARSEVAL (4.6) abbiamo allora anche

$$|<\hat{T}, \bar{\hat{\varphi}}>| \leq M \qquad \text{per le stesse } \varphi$$

Posto allora

$$\hat{\psi}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\bar{\hat{\varphi}}(\xi)$$

si ha

$$\left|<\hat{T}, \frac{\hat{\psi}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}>\right| \leq M$$

e per la definizione stessa di prodotto tra distribuzioni [5, cap. V, § 1] si ha anche

$$|<(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\,\hat{T}(\xi), \hat{\psi}(\xi)>| \leq M$$

Osserviamo che $\hat{\psi}$ può essere una qualunque funzione appartenente ad $\mathcal{S}$ e di norma in L^2 minore o uguale ad 1, $\|\hat{\psi}\|_{L^2} \leq 1$.

Ne segue che la distribuzione

$$(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\,\hat{T}(\xi)$$

è una forma lineare continua su L^2 e dunque essa stessa una funzione di L^2 e si ha

$$<(1 + |\xi|^{2-\frac{s}{2}})\,\hat{T}(\xi), \hat{\psi}(\xi)> = \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{-s/2}\,\hat{T}(\xi)\,\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

Assegnata viceversa una distribuzione $T \in H^{-s}$ dimostriamo che essa è anche una forma lineare e continua su H^s.

Presa infatti una generica funzione $\varphi \in \mathcal{S}$, esiste l'integrale

$$\int_{R^n} \hat{T}(\xi)\,\bar{\hat{\varphi}}(\xi)\,d\xi = \int_{R^n} [(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\,\hat{T}(\xi)]\,[(1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\bar{\hat{\varphi}}(\xi)]\,d\xi$$

perchè entrambi i fattori tra [ ] sono per le ipotesi poste di quadrato sommabile.

Detto integrale per la formula di PARSEVAL (4.6) risulta uguale a $< T, \overline{\varphi} >$ ed è, come si vede facilmente, una forma pseudolineare e continua su H^s; dunque $< T, \varphi >$ è una forma lineare e continua su H^s, cioè un elemento di $(H^s)'$.

Rimane infine da dimostrare che l'isomorfismo tra $(H^s)'$ e H^{-s} è anche topologico; per il che basta osservare che se in $(H^s)'$ si introduce la topologia (forte) mediante la norma consueta (v. il n. 1, def. 1.8)

$$\| T \|_{(H^s)'} = \underset{\| \varphi \|_s \leq 1}{\text{estr. sup.}} \; | T(\varphi) |$$

la corrispondenza considerata tra $(H^s)'$ e H^{-s} risulta addirittura una *isometria*, come si verifica facilmente.

Vogliamo ora stabilire la seguente proprietà degli spazi H^{-m} con m intero ≥ 0:

TEOR. 5.2: *Le distribuzioni $T \in H^{-m}$ sono caratterizzate dal fatto di essere esprimibili come combinazioni lineari di derivate d'ordine $\leq m$ di funzioni di quadrato sommabile.*

Questa proprietà è analoga alla proprietà delle funzioni di H^m di avere derivate m-esime di quadrato sommabile.

È intanto evidente che se una distribuzione T verifica la

$$T = \sum_{i=1}^{r} D^{p_i} g_i \qquad \text{con} \qquad | p_i | \leq m \qquad \text{e} \qquad g_i \in L^2$$

allora in virtù della (4.6) T appartiene ad H^{-m}.

Se viceversa $T \in H^{-m}$ si ha:

$$\frac{\hat{T}(\xi)}{1 + | \xi_1 |^m + \ldots + | \xi_n |^m} \in L^2$$

Indicando con $\hat{f}(\xi)$ questa funzione di quadrato sommabile la $\hat{T}(\xi)$ può essere scritta nella forma:

$$\hat{T}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \sum_i^{1..n} |\xi_i|^m \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \sum_i^{1..n} (2\, i\, \xi_i)^m \left[\frac{| \xi_i |^m}{\xi_i^{\ m}} \; \frac{\hat{f}(\xi)}{(2\, \pi\, i)^m} \right]$$

e di qui, indicando con $\hat{g}_i(\xi)$ l'espressione entro parentesi quadra, che risulta di quadrato sommabile, si ottiene

$$\hat{T}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \sum_i^{1..n} (2\, i\, \pi\, \xi_i)^m \; \hat{g}_i(\xi)\,, \qquad (\hat{f},\ \hat{g}_i \in L^2)$$

ossia sempre per la (4.6)

$$T = f + \sum_{i}^{1..n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m g_i \,, \qquad (f,\ g \in L^2)\,,$$

e con ciò la proprietà è dimostrata.

Indichiamo con $\mathcal{B}$ lo spazio lineare delle funzioni indefinitamente derivabili in R^n e limitate insieme a ciascuna delle loro derivate; e dimostriamo il

TEOR. 5.3 (*o di moltiplicazione*). *Il prodotto di una funzione* $\alpha \in \mathcal{B}$ *per una distribuzione* $T \in H^s$, *con* s *intero, appartiene ancora a* H^s *e l'applicazione* $T \rightarrow \alpha\, T$ *è lineare e continua.*

Supponiamo prima $s \geq 0$. Per $T \in H^s$, $\alpha \in \mathcal{B}$, ogni derivata di ordine $\leq s$ del prodotto $\alpha\, T$ è allora esprimibile come combinazione lineare a coefficienti limitati di derivate di ordine $\leq s$ della funzione T, donde la tesi.

Se invece $s < 0$, posto $s' = -s$ si tratta di dimostrare che $\alpha\, T \in H^{-s'}$ e ciò è assicurato, per il teorema di dualità, dal fatto che $\alpha\, T$ risulta una forma lineare continua su $H^{s'}$: si ha infatti per definizione stessa di prodotto [5, cap. V, § 1] $< \alpha\, T,\ \varphi > \; = \; < T,\ \alpha\, \varphi >$.

Ovviamente poi l'applicazione $T \rightarrow \alpha\, T$ è lineare e continua.

Osservazione al teor. 5.3: il teorema non è stato finora dimostrato e probabilmente è falso nel caso che s non sia intero.

Esso continua però a sussistere per s qualunque se, in luogo dell'ipotesi $\alpha \in \mathcal{B}$, si fa l'ipotesi più restrittiva $\alpha \in L^1$ e $\xi^p \hat{\alpha}(\xi) \in L^1$ e in particolare *se* $\alpha \in \mathcal{S}$.

Corollario. — Se D *è un operatore di ordine* m *a coefficienti in* $\mathcal{S}$ *esso opera con continuità da* H^s *in* H^{s-m} *(e ciò qualunque sia* s*).*

In quanto segue dimostreremo che viceversa se D è inoltre ellittico, dal fatto che $DT \in H^{s-m}$ segue $T \in H^s$ (13), e dunque se DT è indefinitamente derivabile anche T è indefinitamente derivabile, ciò che è in sostanza il teor. 3.1.

Ricordiamo intanto alcune proprietà del prodotto di composizione in teoria delle distribuzioni: rinviando per la definizione in generale a [6, cap. VI, § 2] ci basterà ricordare per il seguito il caso del prodotto $T * \alpha$ di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ per una funzione $\alpha \in \mathcal{D}$: $T * \alpha$ risulta allora in sostanza definito dalle relazioni [6, cap. VI, § 4]

---

(13) Ad es. se $\Delta T \in L^2$ allora $T \in H^2$.

$$< T * \alpha, \varphi > = < T, \psi > \qquad \alpha, \varphi \in \mathcal{D}, \qquad T \in \mathcal{D}'$$

dove

$$\psi(x) = \int_{R^n} \alpha(t)\, \varphi(x + t)\, dt$$

(e quindi $\psi(x)$, in quanto $\alpha \in \mathcal{D}$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, appartiene anche a $\mathcal{D}$).

Risulta da qui, come è noto [6, cap. VI, § 4, teor. XI] che T è una funzione indefinitamente derivabile e che $T * \alpha = \alpha * T$.

La funzione $\alpha * T$ (o $T * \alpha$) chiamasi la - regolarizzata di T mediante α -.

Dimostreremo ora di più che

TEOR. 5.4: Se $T \in H^s$ e $\alpha \in \mathcal{D}$, allora $T * \alpha \in H^s$ e inoltre $T \to T * \alpha$ è una applicazione lineare continua di H^s in sè.

Di più $T * \alpha \in H^\infty$.

Si consideri infatti la trasformata di FOURIER di $T * \alpha$; per noti risultati [6, cap. VII, § 8] si ha $\widehat{T * \alpha} = \hat{T} \times \hat{\alpha}$.

Essendo $\alpha \in \mathcal{D}$, $\hat{\alpha}$ è (v. ad es. 6, cap. VII, § 6, pag. 105) una funzione di $\mathcal{S}$ e quindi se $\hat{T}(\xi)\,(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L^2$ anche la funzione $\hat{T}(\xi)\,(1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\hat{\alpha}(\xi) \in L^2$ e cioè $T * \alpha \in H^s$ (anzi di più si può dire che: $\hat{T}(\xi)\,(1 + |\xi|^2)^{r/2}\,\hat{\alpha}(\xi) \in L^2$ qualunque sia r e dunque $T * \alpha \in H^\infty$).

La trasformazione $T \to T * \alpha$ è anche continua da H^s ad H^s stesso poichè

$$\| T * \alpha \|_s = \left(\int_{R^n} |\widehat{T * \alpha}|^2 (1 + |\xi|^2)^s\, d\xi\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\int_{R^n} |\hat{T} \cdot \hat{\alpha}|^2 (1 + |\xi|^2)^s\, d\xi\right)^{1/2} \leq K \, \| T \|_s$$

con K costante tale che $|\hat{\alpha}| \leq K$.

Osservazione al teor. 5.4: Con dimostrazione analoga al teor. 5.4 vale anche se α è una misura di massa totale (o variazione totale) finita in tutto R^n.

Dimostriamo ora il seguente *teorema di approssimazione*:

TEOR. 5.5: *Se $T \in H^s$ e $\{\alpha_j\}$ è una successione di funzioni di $\mathcal{D}$, non negative, con supporti tendenti uniformemente all'origine per $j \to \infty$ e tali che $\int_{R^n} \alpha_j\, dx = 1$* (14)*, allora $T * \alpha_j$ converge per $j \to \infty$ a T in H^s.*

Infatti per le ipotesi fatte sulle α_j, le trasformate $\hat{\alpha}_j$ sono equilimitate dalla costante 1 in modulo, dunque dal teor. 5.4 segue che

(14) Si dice allora anche che $\alpha_j \to \delta$ nello spazio $\mathcal{E}'$ [5, cap. III, § 7]. (δ funzione di DIRAC).

$T * \alpha_j$ è una successione di trasformazioni lineari e continue di H^s in sè che sono anche equilimitate (e dunque equicontinue: $\| T * \alpha_j \|_s \leq \leq \| T \|_s$). È sufficiente allora per un noto teorema di teoria delle trasformazioni lineari (v. ad es. S. BANACH, *Theorie des operations lineaires*, teor. 3, pag. 79), dimostrare che $\lim_{j \to \infty} T * \alpha_j = T$ in H^s per tutti i T di un insieme ovunque denso in H^s, ad es. per tutti i $T \in \mathcal{D}$; ma se $T \in \mathcal{D}$ è assai facile vedere che $T * \alpha_j \to T$ in $\mathcal{D}$ e quindi a fortiori in H^s.

6. ULTERIORI PROPRIETÀ DEGLI SPAZI H^s.

D'ora innanzi per brevità indicheremo con $\| T \|_s$ la norma di un elemento T di H^s; è dunque

$$\| T \|_s = \left(\int_{R^n} (1 + | \xi |^2)^s \, | \hat{T}(\xi) |^2 \, d\xi\right)^{1/2} \tag{6.1}$$

Sia ora K un compatto fissato di R^n; indichiamo con $H_K{}^s$ il sottospazio di H^s costituito dalle distribuzioni di H^s aventi supporto contenuto in K. La (6.1) costituisce una norma anche in $H_K{}^s$. Dimostriamo il seguente

TEOR. 6.1: *Se K è un compatto fissato di R^n, in $H_K{}^s$ la norma* (6.1) *è equivalente alla norma*

$$\int_{|\xi| \geq A} | \xi |^{2s} \, | \hat{T}(\xi) |^2 \, d\xi \tag{6.2}$$

dove A è una costante fissata ad arbitrio.

Dobbiamo dimostrare che esistono due costanti positive c e C che dipendono da A, K, s ma non dalla distribuzione T tali che per ogni $T \in H_K{}^s$

$$c \int_{R^n} (1 + | \xi |^2)^s \, | \hat{T}(\xi) |^2 \, d\xi \leq \tag{6.3}$$

$$\leq \int_{|\xi| \geq A} | \xi |^{2s} \, | \hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi \leq C \int_{R^n} (1 + | \xi |^2)^s | \hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi$$

Osserviamo innanzitutto che (6.2) è effettivamente una norma in $H_K{}^s$. Infatti se

$$\int_{|\xi| \geq A} | \xi |^{2s} \, | \hat{T}(\xi) |^2 \, d\xi = 0$$

allora $\hat{T}(\xi) = 0$ nell'insieme: $| \xi | \geq A$. Essendo però T a supporto compatto, $\hat{T}$, per un teorema di PALEY-WIENER (v. ad es. 6, cap. VII, § 8, teor. XVI) è analitica ed annullandosi fuori della sfera di centro l'origine e raggio A si annulla in tutto lo spazio.

La relazione « destra » in (6.3) è evidente in quanto $|\xi| \geq A$ è contenuto in R^n e $|\xi|^{2s} \leq (1 + |\xi|^2)^s$.

Per dimostrare che esiste una costante c tale che:

$$\int_{|\xi| \geq A} |\xi|^{2s} \, |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi \geq c \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi \tag{6.4}$$

ragioniamo per assurdo. Supponiamo che questo non sia vero. Esiste allora una successione di distribuzioni di $H_K{}^s$: $T_1, T_2, \ldots T_j, \ldots$ che gode delle seguenti proprietà

$$\text{(6.5)} \qquad \begin{aligned} &a) \quad \| T_j \|_s = 1 \\ &b) \quad \int_{|\xi| \geq A} |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, |\xi|^{2s} \, d\xi \to 0 \end{aligned}$$

L'insieme delle T_j essendo, per a), limitato in H^s è a fortiori limitato in $\mathcal{D}'$, quindi, per un noto teorema sugli spazi di distribuzioni, [5, cap. III, § 3, teor. XII] è in $\mathcal{D}'$ relativamente compatto. Si può allora estrarre da esso una successione parziale che indicheremo ancora con T_j, convergente in $\mathcal{D}'$ verso un limite T. Allora, tenuto conto che le T_j hanno supporti contenuti in un compatto fissato, per il teorema di PALEY-WIENER citato, le loro immagini di FOURIER $\hat{T}_j(\xi)$ sono funzioni analitiche, inoltre risulta:

$$\int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \leq 1$$

e quindi per ogni compatto L di R^n

$$\int_L |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \leq h(L) \quad \text{con} \quad h(L)$$

costante dipendente solo da L; di qui essendo le $\hat{T}_j$ analitiche si deduce con ben noti ragionamenti che le $T_j(\xi)$ convergono uniformemente su ogni compatto L di R^n, necessariamente a $\hat{T}$. Se L è ora un compatto di R^n, non contenente l'origine ([15]) si avrà dunque che

$$\lim_{j \to \infty} \int_L |\xi|^{2s} \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi = \int_L |\xi|^{2s} \, |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi \tag{6.6}$$

Ne segue, tenuto conto della (6.5), b), che se L è esterno alla sfera $|\xi| \leq A$

$$\int_L |\xi|^{2s} \, |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi = 0 \tag{6.7}$$

([15]) Ciò perchè s potrebbe essere negativo.

Quindi $\hat{T}(\xi)$ è nulla quasi ovunque fuori della sfera di centro l'origine e raggio A ed essendo analitica è nulla in tutto R^n.

Decomponiamo ora la norma $\| T_j \|_s$ nel modo seguente

$$\| T_j \|_s^2 = \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi = \tag{6.8}$$

$$= \int_{|\xi| \geq A} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{|\xi| \leq A} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

A meno di una costante $\int_{|\xi| \geq A} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi$ è maggiorato da $\int_{|\xi| \geq A} |\xi|^{2s} \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi$, quindi, per (6.5), b), tende a zero per $j \to \infty$.

Nel compatto: $|\xi| \leq A$, la funzione $(1 + |\xi|^2)^s$ è limitata, mentre $\hat{T}_j(\xi)$ converge, per quanto visto, uniformemente a zero, ne segue che anche

$$\int_{|\xi| \leq A} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

converge a zero per $j \to \infty$. In definitiva

$$\lim_{j \to \infty} \| T_j \|_s = 0$$

il che è assurdo per l'ipotesi [(6.5) a)].

Il teorema 6.1 è così dimostrato.

Osservazione. — In particolare se è $s \geq 0$ in (6.2) si può assumere $A = 0$ e usare quale norma equivalente alla (6.1) in H_K^s la radice quadrata di

$$\int_{R^n} |\xi|^{2s} \, |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi \tag{6.9}$$

Sia h un numero reale > 0. Abbiamo già detto che H^s è un sottospazio di H^{s-h} e che l'applicazione canonica di H^s in H^{s-h} è continua. Dimostriamo il seguente

TEOR. 6.2: *Se K è un compatto fissato di R^n ed h un numero reale e positivo l'applicazione canonica di H_K^s in H_K^{s-h} è completamente continua.*

Essendo H_K^s e H_K^{s-h} spazi di HILBERT la completa continuità equivale come è noto a dimostrare che l'applicazione canonica di H_K^s in H_K^{s-h} trasforma ogni successione di distribuzioni debolmente convergente a zero in H_K^s in una successione fortemente convergente a zero in H_K^{s-h}.

Sia $T_1, T_2, \ldots, T_j, \ldots$ una successione debolmente convergente a zero in H_K^s, dimostriamo che essa tende a zero fortemente in H_K^{s-h}.

Se $T_j \to 0$ debolmente in $H_K{}^s$ a fortiori $T_j \to 0$ debolmente in $\mathcal{D}'$, ma poichè in $\mathcal{D}'$, la convergenza debole e quella forte (per le successioni) sono identiche [5, cap. III, § 3, pag. 75], $T_j \to 0$ fortemente in $\mathcal{D}'$ ed avendo le T_j il loro supporto contenuto in uno stesso compatto K, per il teorema di Paley-Wiener e per un ragionamento già fatto le loro immagini di Fourier $\widehat{T}_j(\xi)$ convergono a zero uniformemente in ogni insieme compatto di R^n.

Ciò posto consideriamo la norma di T_j in $H_K{}^{s-h}$:

$$\int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{s-h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \tag{6.10}$$

e dimostriamo che $\to 0$ quando $j \to \infty$. A tal fine è utile sostituire la (6.10) con la norma equivalente (per il teorema 6.1):

$$\| T_j \|^*_s = \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2s-2h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \tag{6.11}$$

Per dimostrare che questa norma tende a zero per $j \to \infty$ decomponiamola nel modo seguente:

$$\int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2s-2h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{1 \leq |\xi| \leq B} |\xi|^{2s-2h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi + \tag{6.12}$$
$$+ \int_{|\xi| \geq B} |\xi|^{2s-2h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

dove B è una costante positiva > 1 che determineremo in seguito.

Per l'ultimo di questi integrali sussiste la limitazione

$$\int_{|\xi| \geq B} |\xi|^{2s-2h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \leq \frac{1}{B^{2h}} \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2s} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{B^{2h}} \| T_j \|_s^* \tag{6.13}$$

Poichè T_j convergono, per ipotesi, debolmente in $H_K{}^s$ per un noto teorema di Banach-Steinhaus le norme $\| T_j \|_s^*$ sono limitate, quindi fissato $\varepsilon > 0$ da (6.13) si ha che se B è sufficientemente grande,

$$\int_{|\xi| \geq B} |\xi|^{2s-2h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.14}$$

qualunque sia j. Fissato B in modo che valga la (6.14), esaminiamo ora l'integrale

$$\int_{1 \leq |\xi| \leq B} |\xi|^{2s-2h} \, |\widehat{T}_j(\xi)|^2 \, d\xi \tag{6.15}$$

Si ha: $\widehat{T}_j \to 0$ uniformemente su ogni compatto di R^n, in particolare sull'insieme $1 \leq |\xi| \leq B$, ed ivi la funzione $|\xi|^{2s-2h}$ è limitata, quindi è possibile determinare un j_ε tale che per $j > j_\varepsilon$ l'integrale

(6.15) sia $< \frac{\varepsilon}{2}$. In definitiva, fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare un j_ε tale che per $j > j_\varepsilon$

$$\| T_j \|_s^* < \varepsilon$$

e ciò prova il teorema.

Dal teorema 6.2 segue, nell'ipotesi che $s \geq 0$, il seguente

Corollario. — Se K è un compatto fissato di R^n, h un numero > 0 ed $s \geq 0$, la norma dell'applicazione canonica di $H_K{}^s$ in $H_K{}^{s-h}$ tende a zero quando diam. $K \to 0$.

Se con N indichiamo tale norma, per ogni fissato K si ha, come è noto,

$$N = \underset{\| T \|_s = 1}{\text{estr. sup.}} \| T \|_{s-h} \quad , \qquad (T \in H_K{}^s)$$

Per fissare le idee sia $\{K_n\}$ una successione decrescente di compatti, contenuti nello stesso compatto K_0 tali che diam. $K_n \to 0$.

È evidente che se $K_{n+1} \subset K_n$ allora anche $H^s_{K_{n+1}} \subset H^s_{K_n} \subset H^s_{K_0}$ e $H^{s-h}_{K_{n+1}} \subset H^{s-h}_{K_n} \subset H^{s-h}_{K_0}$.

In ogni spazio $H^s{}_{K_n}$ consideriamo la sfera unitaria; queste sfere costituiscono una successione decrescente di insiemi chiusi e limitati di $H^s_{K_0}$ trasformata dalla applicazione $H^s_{K_0} \to H^{s-h}_{K_0}$ in una successione decrescente di insiemi compatti di $H^{s-h}_{K_0}$ la quale, quando diam. $K \to 0$, converge all'elemento prodotto di tutti gli insiemi della successione stessa. Questo prodotto è una distribuzione che dovendo appartenere a tutti gli $H_{K_n}^s$ per ogni K_n ha per supporto un solo punto, e poichè $s \geq 0$ essa appartiene a L^2. Ora una funzione di L^2 il cui supporto è ridotto a un punto è nulla. E ciò prova che la norma $N \to 0$ quando diam. $K_n \to 0$.

TEOR. 6.3 (*dell'artificio di Korn*): *Sia D un operatore differenziale (non necessariamente ellittico) d'ordine m a coefficienti $\alpha_p(x)$ infinitamente derivabili e tali che $\alpha_p(0) = 0$ per $| p | = m$, sia $s \geq 0$, K un compatto contenente l'origine di R^n, D allora rappresenta una trasformazione lineare e continua di H^s_K in H^{s-m}_K la cui norma converge a zero quando il* diam. *K tende a zero.*

Consideriamo dapprima il caso $m = 0$. D si riduce allora alla moltiplicazione per una funzione che si annulla all'origine ed è infinitamente differenziabile. Supponiamo dapprima che $DT = x_i T$ con i fissato tra 1 ed n, e supponiamo che il compatto K sia la sfera K_ε di centro l'origine e raggio ε.

Se $T(x)$ è una funzione localmente sommabile, allora

$$<T(\xi),\ \varphi> \ = \int_{R^n} T(x)\,\varphi(x)\,dx$$

da cui si ha facilmente

$$(6.16)\qquad <T(\varepsilon\, x),\ \varphi> \ = \int_{R^n} T(\varepsilon\, x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{R^n} T(y)\ \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\ <T,\ \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)>$$

L'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro della (6.16) si può assumere come definizione nel caso che T sia una distribuzione del tutto generica.

È ovvio che se $T(x)$ è una distribuzione con supporto contenuto nella sfera K_ε di centro l'origine e raggio ε, $T(\varepsilon\, x)$ ha supporto contenuto nella sfera unitaria.

Assumendo come norma $\| T \|_s$ la radice quadrata di (6.9) si vede facilmente che

$$(6.17)\qquad \| T(x) \|_s = \| T(\varepsilon\, x) \|_s\, \varepsilon^{\frac{n}{2}-s} \qquad [16]$$

e similmente

$$(6.17')\qquad \| x_i\, T(x) \|_s = \| x_i\, T(\varepsilon\, x) \|_s\, \varepsilon^{\frac{n}{2}-s+1}$$

Detta N la norma della trasformazione continua $D(T) = x_i\, T$ nell'insieme delle $T \in H^s$ a supporto contenuto nella sfera unitaria (quindi N non dipende da ε) si ha che

$$\| x_i\, T(\varepsilon\, x) \|_s \leq N \,\| T(\varepsilon\, x) \|_s$$

quindi per la (6.17'):

$$\| x_i\, T \|_s \leq N \,\| T(\varepsilon\, x) \|_s\, \varepsilon^{\frac{n}{2}-s+1}$$

e tenuto conto della (6.17) si ha in definitiva

$$\| x_i\, T \|_s \leq N\, \varepsilon\, \| T \|_s$$

ciò che prova la tesi, nel caso considerato.

Supponiamo ora $m = 0$ ma D di tipo più generale, precisamente

$$D(T) = \alpha(x)\, T$$

---

[16] Si tenga presente che la trasformata di FOURIER di $T(\varepsilon\, x)$ è $\dfrac{1}{\varepsilon^n}\,\hat{T}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)$.

con $\alpha(x)$ funzione indefinitamente derivabile nulla nell'origine: $\alpha(0) = 0$.

Per ogni fissato K, D è una trasformazione continua di H_K^s in H_K^s (v. corollario del teor. 5.3).

Osserviamo che $\alpha(x)$ si può scrivere nella forma

$$\alpha(x) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$$

con $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n$ funzioni indefinitamente derivabili ([17]).

Allora si ha:

$$\| \alpha\, T \|_s = \| \Sigma_i\, x_i\, \alpha_i\, T \|_s \leq \Sigma_i \| x_i\, \alpha_i\, T \|_s$$

e se K è sufficientemente piccolo, detta C una costante opportuna: $\| x_i\, \alpha_i\, T \|_s \leq C\,\varepsilon\, \| \alpha_i\, T \|_s$ e poichè le $\alpha_i(x)$ sono indefinitamente derivabili esisterà una costante c tale che

$$\| \alpha_i\, T \|_s \leq c\, \| T \|_s$$

In definitiva

$$\| \alpha\, T \|_s \leq C\, c\, \varepsilon\, \| T \|_s$$

e anche in questo caso il teorema è dimostrato.

Sia ora $m \neq 0$ ([18]). Consideriamo l'operatore differenziale

$$DT = \sum_{|p|=0}^{m} \alpha_p(x)\, D^p T$$

Decomponiamo DT nella forma:

$$\sum_{|p|=m} D^p(\alpha_p T) + \sum_{|p|=m} \{\alpha_p D^p T - D^p(\alpha_p T)\} + \ldots$$

cioè

$$DT = \sum_{p=m} D^p(\alpha_p T) + D_1 \quad , \quad (\alpha_p(0) = 0)\,,$$

([17]) Basta decomporre $\alpha(x)$ nella maniera seguente:

$$\alpha(x) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \alpha(0, x_2, \ldots, x_n) + \alpha(0, x_2, \ldots, x_n) - \alpha(0, 0, x_3, \ldots, x_n) + \\ + \alpha(0, 0, x_3, \ldots, x_n) - \ldots - \alpha(0, 0, \ldots, 0, x_n) + \alpha(0, 0, \ldots, 0, x_n)\,.$$

Le

$$\begin{array}{l} \alpha(x_1, \ldots, x_n) - \alpha(0, x_2, \ldots, x_n) \\ \alpha(0, x_2, \ldots, x_n) - \alpha(0, 0, x_3, \ldots, x_n) \\ \alpha(0, 0, x_3, \ldots, x_n) - \alpha(0, 0, 0, x_4, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha(0, \ldots, x_{n-1}, x_n) - \alpha(0, \ldots, 0, x_n) \\ \alpha(0, \ldots, 0, x_n) \end{array}$$

sono funzioni indefinitamente derivabili considerate rispettivamente nelle variabili $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$, e si annullano nell'origine, e pertanto si possono scrivere nella forma

$$x_1\,\alpha_1 \quad , \quad x_2\,\alpha_2 \quad , \ldots , \quad x_n\,\alpha_n$$

([18]) Osserviamo che non è detto che $s - m$ sia $\geqq 0$.

dove D_1 risulta un operatore differenziale d'ordine al più $m-1$ per il corollario del teor. 5.3.

Essendo D^p una trasformazione continua di $H_K{}^s$ in $H_K{}^{s-m}$ per ogni fissato K, si ha che

$$\| D^p(\alpha_p T) \|_{s-m} \leq \text{cost.} \ \| \alpha_p T \|_s$$

e quindi preso $\sigma > 0$ ad arbitrio, per K di diametro sufficientemente piccolo, poichè α_p si annulla all'origine, si ha per il risultato stabilito nel caso precedente:

$$\| D^p(\alpha_p T) \|_{s-m} \leq \frac{\sigma}{2} \ \| T \|_s$$

L'operatore differenziale D_1 individua una trasformazione lineare e continua di H_K^{s-1} in H_K^{s-m}, quindi

$$\| D_1 T \|_{s-m} \leq c \, \| T \|_{s-1} \qquad (c \text{ costante})$$

e poichè s è positivo in virtù del corollario del teorema 6.2 si ha che se K è sufficientemente piccolo

$$c \, \| T \|_{s-1} \leq \frac{\sigma}{2} \ \| T \|_s$$

quindi in definitiva per K sufficientemente piccolo

$$\| DT \|_{s-m} \leq \sigma \, \| T \|_s$$

e ciò dimostra completamente il teorema.

Consideriamo ora una successione β_ε di funzioni che godono della seguente proprietà

$$\begin{cases} \beta_\varepsilon \in \mathcal{D} \quad \text{e il supporto di } \beta_\varepsilon \text{ contenga l'origine di } R^n \\ \beta_\varepsilon \geq 0 \\ \int \beta_\varepsilon(x)\, dx = 1 \\ \text{per } \varepsilon \to 0 \text{ il diametro del supporto di } \beta_\varepsilon \to 0 \end{cases}$$

(ciò che esprimeremo brevemente dicendo che $\beta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \delta$ (v. nota (14)) e inoltre delle due proprietà supplementari (che peraltro non sono indispensabili per il teorema che ora dimostreremo) che esista una costante K tale che

$$| \beta_\varepsilon(x) | \leq \frac{k}{\varepsilon^n} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq \frac{k}{\varepsilon^{n+1}}$$

Diremo che $\{\beta_\varepsilon\}$ costituisce una successione di regolarizzanti « ammessa ».

È facile costruire successioni $\{\beta_\varepsilon\}$ di regolarizzanti che godono delle proprietà elencate. Ad esempio se $\beta(x)$ è una funzione di $\mathcal{D}$, non negativa e tale che $\int \beta(x)\, dx = +1$ basta considerare le funzioni β_ε così definite

$$\beta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\, \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Sia T una distribuzione di H^s e D un operatore differenziale d'ordine m. Si ha allora in virtù dei teoremi 5.4 e 5.5:

$$\beta_\varepsilon * T \in H^\infty\,, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon * T = T \quad \text{in} \quad H^s$$

e poichè D è una trasformazione continua di H^s in H^{s-m} (corollario del teor. 5.3) si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D(\beta_\varepsilon * T) = DT \qquad \text{in} \qquad H^{s-m}$$

ed anche

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon * DT = DT \qquad \text{in} \quad H^{s-m}$$

Da queste relazioni segue

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{D(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * DT\} = 0 \qquad \text{in} \qquad H^{s-m} \tag{6.18}$$

Se però β_ε gode delle proprietà enunciate si può dimostrare qualcosa di più di quanto non affermi la relazione (6.18), precisamente:

TEOR. 6.4 (*di Friedrichs*): *Se $\{\beta_\varepsilon\}$ è una successione di regolarizzanti ammessa, D è un operatore differenziale d'ordine m con coefficienti appartenenti a $\mathcal{S}$ e T varia in H^s, allora:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{D(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * DT\} = 0 \qquad \text{in} \qquad H^{s-m+1} \tag{6.19}$$

Dimostriamo anzitutto che $D(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * DT$ per $T \in H^s$ è limitata in H^{s-m+1}. Ci potremo limitare a dimostrare questa affermazione nel solo caso $m = 0$, cioè nel caso dell'operatore $DT = T$ con $\alpha \in \mathcal{S}$; e infatti se è $DT = \sum_{|p|=0}^{m} \alpha_p D^p T$ allora [6, cap. VI, § 3, teor. IX]:

$$D(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * DT = \sum_{p=0}^{m} \{\alpha_p(\beta_\varepsilon * D^p T) - \beta_\varepsilon * \alpha_p D^p T\}$$

e si è così ricondotti al caso $m = 0$ se si sostituisce T con $D^p T$.

Dimostriamo dunque che, per $\alpha \in \mathcal{S}$ e T fissato in H^s, $\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * \alpha\, T$ è limitata in H^{s+1} al variare di ε cioè che esiste una costante

c_1 indipendente da ε e da T tale che

$$(6.20) \qquad \int_{R^n} [\,|\Phi(\xi)|\,(1+|\xi|^2)^{(s+1)/2}]^2\, d\xi \leq c_1 \,\|T\|_s^2$$

dove $\Phi(\xi)$ è la trasformata di FOURIER di $\alpha(\beta_\varepsilon * T) - \beta_\varepsilon * \alpha T$.

Ora risulta [6, cap. VII, § 8, teor. XV]:

$$\Phi = \hat{\alpha} * (\hat{\beta}_\varepsilon \hat{T}) - \hat{\beta}_\varepsilon(\hat{\alpha} * \hat{T})$$

e poichè $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}_\varepsilon$ appartengono ad $\mathcal{S}$ e $T \in H^s$ si riconosce subito per ogni ξ:

$$\hat{\alpha}(\xi) * \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)\,\hat{T}(\xi) = \int_{R^n} \hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta)\,\hat{T}(\xi-\eta)\,\hat{\alpha}(\eta)\, d\eta$$

$$\hat{\beta}_\varepsilon(\xi)\,(\hat{\alpha}(\xi) * \hat{T}(\xi)) = \int_{R^n} \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)\,\hat{T}(\xi-\eta)\,\hat{\alpha}(\eta)\, d\eta$$

si osservi inoltre che $(1+|\xi|^2)^{(s+1)/2} = (1+|\xi|^2)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}$ e che $(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq c_2(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}$, ($c_2$ costante) per ogni coppia di vettori ξ e η ([19]).

Si ha allora

$$|\Phi(\xi)|\,(1+|\xi|^2)^{(s+1)/2} =$$

$$= \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{(s+1)/2}\,\hat{\alpha}(\eta)\,\hat{T}(\xi-\eta)\,[\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)]\, d\eta \leq$$

$$\leq c_2 \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{1/2}\,|\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)|\,(1+|\eta|^2)^{|s|/2}\,|\hat{\alpha}(\eta)|\,.$$

$$.\,(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}\,|\hat{T}(\xi-\eta)|\, d\eta$$

di qui, poichè

$$(6.21) \qquad (1+|\xi|^2)^{1/2}\,|\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)| \leq c_3(1+|\eta|^2)^{1/2}$$

(c_3 costante) ([20])

([19]) Infatti per $s \geq 0$ basta osservare che $|\xi| \leq |\eta| + |\xi - \eta|$; per $s < 0$ si ponga s' s, allora la disuguaglianza equivale alla

$$\left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)^{s'/2} \leq c_2(1+|\eta|^2)^{s/2}\left(\frac{1}{1+|\xi-\eta|^2}\right)^{s'/2}$$

di verifica immediata.

([20]) Per dimostrare la (6.21) è evidentemente sufficiente stabilire le due maggiorazion seguenti:

(*) $$|\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)| \leq 2$$

(**) $$|2\pi i\,\xi_i[\hat{\beta}_\varepsilon(\xi-\eta) - \hat{\beta}_\varepsilon(\xi)]| \leq c\sqrt{1+|\eta|^2}\,.$$

La (*) è immediata conseguenza del fatto che essendo per ipotesi $\int \beta_\varepsilon\, dx = 1$ le funzioni $\hat{\beta}_\varepsilon$ sono uniformemente limitate dalla costante 1.

La (**) è poi equivalente alla seguente:

(***) $$\int \left|\frac{\partial}{\partial x_i}[(e^{2i(x/\eta)} - 1)\,\beta_\varepsilon(x)]\right| dx \leq c\sqrt{1+|\eta|^2}$$

come risulta osservando che il primo membro della (**) è la trasformata di FOURIER dell'in-si ha:

$$\Phi(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{(s+1)/2} \leq c_2 c_3 \int (1+|\eta|^2)^{(|s|+1)/2}\,|\hat{\alpha}(\eta)|\,.$$
$$(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}\,|\hat{T}(\xi-\eta)|\,d\eta =$$
$$= c_2 c_3 \{(1+|\xi|^2)^{(|s|+1)/2}\,|\hat{\alpha}(\xi)| * (1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\hat{T}(\xi)|\}.$$

L'ultimo membro per noti risultati sul prodotto di composizione (v. ad es. [6, cap. VI, § 1, pag. 7]) è una funzione di L^2, la cui norma in L^2 è maggiorabile con

$$\|(1+|\xi|^2)^{(s+1)/2}\,|\hat{\alpha}(\xi)|\,\|_{L^1}\cdot\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\hat{T}(\xi)|\,\|_{L^2}$$

La (6.20) è dunque dimostrata.

La (6.19) è inoltre di immediata verifica se $T \in \mathcal{D}$; per la (6.20) e poichè $\mathcal{D}$ è ovunque denso in H^s si ha allora, per un noto teorema di analisi funzionale lineare già adoperato, che (6.19) è vera per ogni $T \in H^s$.

7. Proprietà degli operatori ellittici.

Sia $H^{s,r}$ lo spazio delle r-ple ordinate di distribuzioni $(T_1, \ldots, T_r)$ (che diremo anche distribuzioni a valore vettoriale) appartenenti ad H^s.

Come prodotto scalare di due distribuzioni a valore vettoriale S e $T \in H^{s,r}$ si assuma:

$$(S, T)_{s,r} = \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s \sum_{i=1}^{r} \hat{S}_i(\xi)\,\hat{T}_i(\xi)\,d\xi\,.$$

Indicheremo con $\|T\|_s$ la corrispondente norma, cioè

$$\|T\|_{s,r} = \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s\,|\hat{T}(\xi)|^2\,d\xi$$

---

tegrando della (***) (prescindendo dai segni di valore assoluto).

Resta ora da dimostrare la (***). A tale scopo basta stabilire le:

$$\int |\,2\pi i\,\eta_i\,(e^{2i(x/\eta)}-1)\,\beta_\varepsilon(x)\,|\,dx \leq |\eta|$$
$$\int\left|\,(e^{2i(x/\eta)}-1)\,\frac{\partial\beta_\varepsilon(x)}{\partial x_i}\,\right|\,dx \leq |\eta|\,.$$

La prima di queste segue dall'ipotesi $\int \beta_\varepsilon(x)\,dx = 1$, e la seconda dalle maggiorazioni:

$$|e^{iu}-1| \leq |u| \qquad |(x|\eta)| \leq |x|\cdot|\eta|$$

e dall'ipotesi:

$$\left|\frac{\partial\beta_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}$$

tenendo inoltre conto che l'integrazione è eseguita in una sfera di raggio ε (dove $|x| \leq \varepsilon$).

dove

$$| \hat{T}(\xi) |^2 = \sum_{i=1}^{r} | \hat{T}_i(\xi) |^2$$

Se K è un compatto fissato di R^n indicheremo con $H_K^{s,r}$ il sottospazio di $H^{s,r}$ costituito dalle distribuzioni vettoriali $T \equiv (T_1, ..., T_r)$ le cui componenti appartengono a H_K^s, cioè hanno il supporto contenuto in K. La norma $\| T \|_{s,r}$ definita in $H^{s,r}$ è norma anche in $H_K^{s,r}$.

Si ha il seguente:

TEOR. 7.1: *Sia D un operatore (matriciale) ellittico di ordine m, a coefficienti costanti, che operi da $H_K^{s,r}$ su $H_K^{s-m,l}$ (r e l in genere diversi); si ha allora per ogni $T \in H_K^{s,r}$*

$$\| T \|_{s,r} \leq c \, \| DT \|_{s-m,l} \quad , \qquad (c \text{ costante}) \tag{7.1}$$

(*ciò che si esprime dicendo anche che D è un monomorfismo di $H^{s,r}$ in $H^{s-m,l}$*).

All'operatore D, scritto nella forma $D = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p D^p$ associamo il polinomio matrice:

$$P(\xi) = \sum_{|p| \leq m} \alpha_p (2 i \pi \xi)^p \qquad [\xi \equiv (\xi_1, ..., \xi_n)]$$

che decomponiamo in:

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi)$$

dove P_0 indica la matrice formata con il complesso dei termini di grado massimo (cioè m).

Avendo supposto D ellittico possiamo affermare che il modulo dell'applicazione della matrice $P_0(\xi)$ ad una matrice colonna (cioè un vettore) $\vec{e}$ dello spazio complesso a r dimensioni è $\neq 0$ per $\xi \neq 0$ ed $\vec{e} \neq 0$, e dunque, dipendendo con continuità da ξ e da $\vec{e}$, ha minimo positivo c_1 al variare di ξ, $\vec{e}$ con $| \xi | = 1$, $| \vec{e} | = 1$, cioè

$$| P_0(\xi) \vec{e} \, | \geq c_1 > 0 \quad \text{per} \quad | \xi | = 1 \, , \quad | \vec{e} \, | = 1 \, .$$

Si ha dunque, tenendo conto che $P_0(\xi)\vec{e}$ è una matrice colonna funzione omogenea di grado m in ξ e di grado 1 in $\vec{e}$:

$$| P_0(\xi) \vec{e} \, | \geq c_1 \, | \xi |^m \, | \vec{e} \, | \, .$$

Considerando invece il polinomio matrice $P_1(\xi)\vec{e}$, di grado $m - 1$ in ξ, si ha:

$$| P_1(\xi) \vec{e} \, | \leq c_2 (1 + | \xi |)^{m-1} \, | \vec{e} \, |$$

Confrontando queste due disuguaglianze si deduce l'esistenza di due costanti $A > 0$ e $c_3 > 0$ tali che

(7.2) $$| P(\xi)\vec{e} \, | \geq c_3 \, | \, \xi \, |^m \, |\vec{e}\, | \qquad \text{per} \qquad | \, \xi \, | \geq A \, .$$

Tenendo conto del teorema 6.1 e osservando che la trasformata di Fourier di DT è $P(\xi)\, \widehat{T}(\xi)$, il secondo membro della (7.1) può essere scritto nella forma:

$$\| \, DT \, \|^2_{s-m,l} \geq c \int_{|\xi| \geq A} | \, \xi \, |^{2s-2m} \, | \, P(\xi) \, \widehat{T}(\xi) \, |^2 \, d\xi$$

Applicando la (7.2) con $\widehat{T}(\xi) \equiv (\widehat{T}_1(\xi), \ldots, \widehat{T}_n(\xi))$ in luogo di $\vec{e}$ si ha allora:

$$\| \, DT \, \|^2_{s-m,l} \geq c \, c_3^2 \int_{|\xi| \geq A} | \, \xi \, |^{2s-2m} \, | \, \xi \, |^{2m} \, | \, \widehat{T}(\xi) \, |^2 \, d\xi = c_4 \| \, T \, \|^2_{s,r}$$

e così la (7.1) è dimostrata.

Dimostriamo ora il seguente

Teor. 7.2: *Sia D un operatore di ordine m a coefficienti variabili;* (*indefinitamente derivabili*) *ellittico in un punto a* (*e dunque in un suo intorno I*)*; se il compatto K contiene a ed è contenuto in un intorno sufficientemente piccolo di a, allora D è ancora un monomorfismo di $H_K^{s,r}$ in $H_K^{s-m,l}$, vale cioè la* (7.1) *per ogni* $T \in H_K^{s,r}$.

Sarà sufficiente per il seguito stabilire questo teorema supponendo $s \geq 0$. Esso è però valido per s qualunque.

Decomponiamo l'operatore D in un operatore D_1 a coefficienti costanti e in uno D_2 a coefficienti nulli nel punto a: $D = D_1 + D_2$.

Applicando all'operatore (ellittico) D_1 il teorema 7.1 si ha:

$$\| \, T \, \|_{s,r} \leq c \, \| \, D_1 T \, \|_{s-m,l}$$

e quindi:

(7.3) $$\| \, T \, \|_{s,r} \leq c \, \| \, DT \, \|_{s-m,l} + c \, \| \, D_2 T \, \|_{s-m,l} \, .$$

Applicando all'operatore D_2 il teorema 6.3 (avendo supposto $s \geq 0$) si ha:

(7.4) $$\| \, D_2 T \, \|_{s-m,l} \leq \varepsilon \, \| \, T \, \|_{s,r}$$

se il compatto K è contenuto in un intorno sufficientemente piccolo del punto a.

Dalle (7.3), (7.4) segue in modo ovvio:

$$\| \, T \, \|_{s,r} \leq c_5 \, \| \, DT \, \|_{s-m,l} \qquad (c_5 \text{ costante}),$$

il che prova la tesi.

Introduciamo ora lo spazio $\mathcal{L}^{s,r}(\Omega)$ delle distribuzioni vettoriali $T \equiv (T_1, \ldots, T_r)$ definite in un aperto Ω tale che per ogni punto a di Ω e per ogni T esista un intorno di a in cui T coincide con una distribuzione appartenente ad $H^{s,r}$. In altre parole diremo che T appartiene ad $\mathcal{L}^{s,r}(\Omega)$ se per ogni funzione $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ indefinitamente derivabile ed avente supporto in Ω la distribuzione αT appartiene ad $H^{s,r}$.

Si ha allora il seguente

TEOR. 7.3: *Sia D un operatore di ordine m ellittico, a coefficienti indefinitamente differenziabili in Ω.*

Le relazioni: $T \in \mathcal{L}^{s-1,r}(\Omega)$, $DT \in \mathcal{L}^{s-m,l}(\Omega)$ implicano che $T \in \mathcal{L}^{s,r}(\Omega)$.

Importa stabilire questo teorema per ogni valore di s. Per ottenere ciò è sufficiente aver stabilito i teoremi precedenti per $s \geq 0$.

Per dimostrare il teorema 7.3 distinguiamo due casi.

1) sia $s \geq 1$.

Preso un punto a di Ω dobbiamo dimostrare che in un intorno di a, T appartiene ad $H^{s,r}$.

Determiniamo un intorno I_1 del punto a per il quale valga il teorema 7.2 ed una funzione $\alpha \in \mathcal{D}$ avente supporto I_2 interno ad I_1 e contenente nel suo interno il punto a, tale che in un intorno I_3 del punto a sia $\alpha \equiv 1$.

Assegnata una distribuzione T soddisfacente alle ipotesi del teorema consideriamo la distribuzione $S = \alpha T$. È evidente che anche S soddisfa alle ipotesi di T:

$$S \in \mathcal{L}^{s-1,r}(\Omega)$$
$$DS \in \mathcal{L}^{s-m,l}(\Omega)$$

La prima di queste relazioni è evidente, ed anche la seconda se si osserva che:

$$DS = D(\alpha T) = \alpha\, DT + D_1 T$$

dove D_1 è un operatore di ordine $m - 1$ (e quindi tale che, essendo $T \in \mathcal{L}^{s-1,r}(\Omega)$, si ha: $D_1 T \in \mathcal{L}^{s-m,l}(\Omega)$.

Per dimostrare il teorema, nel caso in cui ci siamo posti, basta mostrare che $S \in \mathcal{L}^{s,r}(\Omega)$.

Consideriamo le regolarizzanti:

$$\beta_\varepsilon * S \qquad\qquad \beta_\varepsilon * DS$$

con ε sufficientemente piccolo (in relazione all'intorno fissato I_1 del punto a).

Si ha per il teorema 6.4 (poichè il supporto di $\mathcal{S}$ è un compatto K possiamo pensare di prolungare i coefficienti di D fuori di K in modo che appartengano a $\mathcal{S}$):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [D(\beta_\varepsilon * S) - \beta_\varepsilon * DS] = 0 \qquad \text{in} \qquad H^{s-m,l}.$$

D'altra parte $DS \in H_K^{s-m,l}$ e quindi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon * DS = DS \qquad \text{in} \quad H_K^{s-m,l}$$

Dal confronto di queste due relazioni di limite segue che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D(\beta_\varepsilon * S) = DS \qquad \text{in} \quad H_K^{s-m,l}$$

e pertanto, applicando il teorema 7.2, $\beta_\varepsilon * S$ ha limite in $H_K^{s,r}$ e a fortiori in $\mathcal{D}'_r(\Omega)$ (21); ma $\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon * S = S$ in $\mathcal{D}'_r(\Omega)$, dunque $\beta_\varepsilon * S$ tende ad S in $H_K^{s,r}$ e ciò prova che S appartiene ad $H_K^{s,r}$.

2) Supponiamo ora $s < 1$.

Introduciamo come nel caso precedente la distribuzione $S = \alpha T$, che potremo scrivere nella forma:

$$S = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k U \ \text{(22)} \quad (\Delta \text{ operatore di Laplace})$$

La restrizione di U ad Ω appartiene ad $\mathcal{L}^{s-1+2k,r}(\Omega)$.

Si ha inoltre per ipotesi:

$$D\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k U \in \mathcal{L}^{s-m,l}(\Omega).$$

L'operatore

$$D\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$$

è ellittico e d'ordine $m + 2k$. In tal modo ci si riconduce, per k sufficientemente grande (in modo che $s - 1 + 2k \geq 1$), al caso precedente, e se ne deduce

$$U \in \mathcal{L}^{s+2k,r}(\Omega)$$

e quindi

$$S = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k U \in \mathcal{L}^{s,r}(\Omega).$$

---

(21) Con $\mathcal{D}_r'(\Omega)$ indichiamo lo spazio delle r-ple di distribuzioni $T \equiv (T_1, ..., T_r)$ ciascuna delle quali appartiene a $\mathcal{D}'(\Omega)$ è ovvio come verrà definita la convergenza in $\mathcal{D}_r'(\Omega)$.

(22) Non è difficile trovare U, e risulta anzi $U \in H^{s-1+2k,r}$; basta infatti assumere

$$\hat{U}(\xi) = \left(\frac{1}{1 + |\xi|^2}\right)^k \hat{S}(\xi).$$

Il teorema 7.1 che abbiamo ora dimostrato completamente, sussiste anche prescindendo dall'ipotesi che $T \in \mathcal{L}^{s-1,r}(\Omega)$. Si ha infatti il

TEOR. 7.4: *Sia D un operatore di ordine m a coefficienti indefinitamente differenziabili ellittico in* Ω.

La relazione $DT \in \mathcal{L}^{s-m,l}(\Omega)$ *implica che* $T \in \mathcal{L}^{s,r}(\Omega)$.

Questo teorema risolve il problema che abbiamo impostato nei numeri precedenti, in quanto da esso si deduce che ogni operatore ellittico è ipoellittico.

Basta stabilire il teorema ponendoci in un sottoinsieme ω aperto e relativamente compatto di Ω. È noto che in un aperto relativamente compatto ogni distribuzione è d'ordine finito, [5, cap. III, § 6, teor. XXI] (e cioè è la derivata di ordine finito di una funzione di L_2), esiste cioè un numero σ tale che $T \in \mathcal{L}^{\sigma,r}(\omega)$.

a) Se $\sigma \geq s$ il teorema è banale.

b) Se $\sigma = s - 1$ il teorema si riduce al teorema 7.3.

c) Se $\sigma < s - 1$ si ha:

$T \in \mathcal{L}^{\sigma,r}(\omega)$, $\quad DT \in \mathcal{L}^{s-m,l}(\omega)$ e a fortiori $\in \mathcal{L}^{\sigma-m+1,l}(\omega)$

Ne segue per il teorema 7.3 che $T \in \mathcal{L}^{\sigma+1,r}(\omega)$.

Così proseguendo si giunge a provare che $T \in \mathcal{L}^{\rho,r}(\omega)$, con $s + 1 \leq \rho < s$, e a fortiori, $T \in \mathcal{L}^{s-1,r}(\omega)$; ci si riconduce così al caso *b*).

Nota. — Il metodo da noi seguito nei nn. 5-7 è analogo a quello di B. MALGRANGE [9].

MALGRANGE utilizza un metodo analogo a quello qui adoperato, ma sostituendo il metodo di FRIEDRICHS (Teor. 6.4) con quello di NIRENBERG.

SUMMARY. — After a brief review of the principal aspects of the Theory of Distributions, the Author illustrates some recent results regarding elliptic partial differential equations obtained by means of this theory.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. BOCHNER-K. CHANDRASEKHARAN, *Fourier transforms.* Ann. of Math. St. n. 19 Princeton 1949.

[2] N. BOURBAKI, *Topologie generale (Fasc. des résultats).* Act. Sc. Ind. n. 1196. Paris 1953.

[3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques (Fasc. des resultats).* Act. Sc. Ind. n. 1230. Paris 1955.

[4] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites en théorie des distributions.* Acta Math. t. 94 (1955). pp. 13-153.

[5] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions.* Vol. I (1^a ediz.). Act. Sc. Ind. n. 1091. Paris 1950.

[6] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions.* Vol. II. Act. Sc. Ind. n. 1122. Paris 1951.

[7] L. SCHWARTZ, *Problèmes aux limites pour équations elliptiques.* Colloque de Bruxelles. C.B.R.M., pp. 13-24 (1954).

[8] J. L. LIONS, *Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique.* Annals of Math. v. 64 n. 2 (1946).

[9] B. MALGRANGE, *Sur les sistèmes d'équations elliptiques* (articolo in corso di stampa).

[10] S. MIZOHATA, *Hypoéllipticité des opérateurs différentiels.* La théorie des équations aux derivées partielles. Colloques internationaux du Centre National de la recherche scientifique. (Nancy 1956).

[11] M. TREVES, *Eléments de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions.* Fasc. I e II. Centre de documentation Universitaire. Paris 1955.

Ulteriori indicazioni bibliografiche utili nell'ordine di idee seguito si trovano in:

L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions.* Vol. I (II ediz.). Act. Sc. Ind. n. 1245. Paris 1957.