L. Schwartz

Généralisation des espaces L^p

Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 6 (1957), p. 241-250.

GÉNÉRALISATION DES ESPACES L^p

par

L. SCHWARTZ

Faculté des sciences de Paris

INTRODUCTION

Le but de cet article est de développer les principales propriétés des "σ-fonctions" de M. Paul Levy, utilisées et introduites en calcul des probabilités. Les σ-fonctions, que nous appellerons ici des $(\frac{1}{2})$-mesures bornées, sur un espace topologique localement compact X dénombrable à l'infini (1), forment un espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(X)$, intrinsèquement attaché à X. Nous définirons plus généralement les $(\frac{1}{p})$-mesures bornées, $1 \leqslant p < +\infty$ (2), et des espaces $\mathcal{H}^p(X)$ attachés à X.

LA FONCTION $Z \longrightarrow Z^{[p]}$

Si Z est un nombre complexe, $Z = \rho e^{i\theta}$, et si $0 < p < \infty$, appelons $Z^{[p]}$ le nombre $\rho^p e^{i\theta}$, de module $|Z|^p$, de même argument que Z ($Z^{[p]} = 0$ si $Z = 0$). Alors $Z \longrightarrow Z^{[p]}$ est un homéomorphisme du plan complexe sur lui-même; on a $(uv)^{[p]} = u^{[p]}\, v^{[p]}$, $(Z^{[p]})^{[q]} = Z^{[pq]}$, mais $Z^{[p]}\, Z^{[q]} \neq Z^{[p+q]}$. Si f est une fonction sur X, $f^{[p]}$ sera la fonction $x \longrightarrow (f(x))^{[p]}$. On sait que $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, μ mesure (3) $\geqslant 0$, si et seulement si $f^{[p]} \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$; on peut alors définir la mesure $f^{[p]}\mu$; c'est une mesure bornée (4).

---

(1) Une partie des conclusions reste valable si X n'est pas dénombrable à l'infini.

(2) On peut aussi définir un espace $\mathcal{H}^\infty$, mais il semble d'intérêt très limité. $\mathcal{H}^\infty$ n'est pas le dual de $\mathcal{H}^1$.

(3) "Mesure" signifie toujours ici mesure de Radon. Nous employons les notations de BOURBAKI, Intégration, Paris, Hermann, 1952 (Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 1175), ouvrage auquel nous référerons par : BOURBAKI, Int.

$\mathcal{L}^p(X,\mu)$ est l'espace des fonctions dites de puissance p-ième sommable par rapport à μ, muni de la semi-norme $\| f \|_p = (\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$; il n'est pas séparé, et l'espace séparé associé est $L^p(X,\mu)$, espace des classes de fonctions de puissance p-ième sommable.

(4) BOURBAKI, Int., Ch. III, parag. 2, n° 6.

LES $(\frac{1}{p})$ - MESURES BORNÉES, L'ESPACE $\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(X)$, $1 \leq p < \infty$

On appellera $\mathfrak{h}^p(X)$ l'ensemble des couples (f,μ) d'une mesure $\mu \geq 0$ et d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$. On dira que deux couples (f,μ), (g,ν), sont équivalents, et on écrira $(f,\mu) \sim (g,\nu)$, si les mesures $f^{[p]}\mu$, $g^{[p]}\nu$, sont identiques. On établit ainsi sur $\mathfrak{h}^p(X)$ une relation d'équivalence; la classe d'équivalence d'un élément (f,μ) sera notée $(f,\mu)^{\cdot}$, on aura donc $(f,\mu) \in (f,\mu)^{\cdot}$. C'est une telle classe d'équivalence que nous appellerons une $(\frac{1}{p})$-mesure bornée. L'ensemble de ces classes, ou ensemble quotient de $\mathfrak{h}^p(X)$ par la relation d'équivalence, sera noté $\mathcal{H}^p(X)$. Pour toute mesure $\mu \geq 0$, et toute fonction $\alpha > 0$ telle que $\frac{1}{\alpha}$ soit localement μ- intégrable, on a $(f,\mu) \sim (f\sqrt[p]{\alpha}, \frac{\mu}{\alpha})$; comme on peut toujours choisir α telle que $\frac{\mu}{\alpha}$ soit une mesure bornée, on voit que dans toute classe d'équivalence de $\mathfrak{h}^p(X)$, il existe des couples (g,ν) pour lesquels ν est une mesure bornée. Si $\xi \in \mathcal{H}^p(X)$, et si on note $\xi^{[p]}$ la mesure $f^{[p]}\mu$, $(f,\mu) \in \xi$, on voit $\xi \to \xi^{[p]}$ est une bijection de $\mathcal{H}^p(X)$ sur l'espace $\mathcal{H}^1(X) = \mathfrak{M}(X)$ des mesures bornées (c'est manifestement une injection ; mais c'est aussi une épijection, car si ν est une mesure bornée, $\nu = \alpha|\nu|$, où α est $|\nu|$ mesurable et de valeur absolue 1, alors $\alpha^{[\frac{1}{p}]}$ est dans $\mathcal{L}^p(|\nu|)$, et $(\alpha^{[\frac{1}{p}]}, |\nu|)^{\cdot} = \xi$ est telle que $\xi^{[p]} = \nu$). Si $\xi^{[p]} = \nu \in \mathfrak{M}(X)$, nous poserons $\xi = \nu^{[\frac{1}{p}]}$. Plus généralement, si $1 \leq q < \infty$, et si à chaque $\xi \in \mathcal{H}^p(X)$ on associe l'unique élément ζ de $\mathcal{H}^q(X)$ tel que $\zeta^{[q]} = \xi^{[p]}$, on peut poser $\zeta = \xi^{[\frac{p}{q}]}$; $\xi \to \xi^{[\frac{p}{q}]}$ est une bijection de $\mathcal{H}^p(X)$ sur $\mathcal{H}^q(X)$; si $1 \leq r < \infty$, on a $(\xi^{[\frac{p}{q}]})^{[\frac{q}{r}]} = \xi^{[\frac{p}{r}]}$. Si $(f,\mu)^{\cdot} = \xi \in \mathcal{H}^p(X)$, alors $(f^{[\frac{p}{q}]},\mu)^{\cdot} = \xi^{[\frac{p}{q}]}$.

Examinons d'un peu plus près la relation d'équivalence dans $\mathfrak{h}^p(X)$. Soient (f,μ), (g,ν), deux couples quelconques de $\mathfrak{h}^r(X)$. Soit λ une mesure ≥ 0 quelconque majorant μ et ν. On peut écrire $\mu = \alpha\lambda$, $\nu = \beta\lambda$, où α et β sont des fonctions λ-mesurables, définies λ-presque partout, comprises entre 0 et 1. Les mesures $f^{[p]}\mu$, $g^{[p]}\nu$ ne sont autres que $(f^{[p]}\alpha)\lambda$, $(g^{[p]}\beta)\lambda$; bien que $f^{[p]}$ soit seulement μ-mesurable et non nécessairement λ-mesurable, $f^{[p]}\alpha$ est λ-mesurable. Et de même $g^{[p]}\beta$ est λ-mesurable. Alors, pour que (f,μ) et (g,ν) soient équivalentes, il faut et il suffit que $f^{[p]}\alpha = g^{[p]}\beta$, λ-presque partout, Ce résultat doit être indépendant de la mesure λ considérée, puisqu'il peut s'exprimer indépendamment de λ par l'égalité des mesures $f^{[p]}\mu$, $g^{[p]}\nu$. Autrement dit si, pour une mesure $\lambda \geq 0$ particulière, majorant μ et ν, avec $\mu = \alpha\lambda$, $\nu = \beta\lambda$, on a $f\sqrt[p]{\alpha} = g\sqrt[p]{\beta}$ λ-presque partout, les couples (f,μ), (g,ν) sont équivalents, et on a la même relation pour toute mesure $\lambda \geq 0$ majorant μ et ν.

On peut se borner à supposer que λ domine μ et ν, autrement dit que $\mu = \alpha\lambda$, $\nu = \beta\lambda$, où α et β sont des fonctions ≥ 0, définies λ-presque partout, λ-localement intégrables, et la relation d'équivalence s'écrit toujours : "$f\sqrt[p]{\alpha} = g\sqrt[p]{\beta}$, λ-presque partout".

L'espace X étant toujours le même, nous le supprimerons désormais dans toutes les écritures et nous écrirons $\mathcal{H}^p$, $\mathfrak{h}^p$, $\mathcal{L}^p(\mu)$, au lieu de $\mathcal{H}^p(X)$, $\mathfrak{h}^p(X)$, $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL SUR $\mathcal{H}^p$

Soient $\xi \in \mathcal{H}^p$, $\eta \in \mathcal{H}^p$. On peut toujours trouver dans ces classes de $\mathfrak{h}^p$ deux éléments de la forme (f,λ), (g,λ), c'est-à-dire faisant intervenir la même mesure $\lambda \geqslant 0$; car, si (f_1,μ) et (g_1,ν) sont des éléments de ces deux classes, et si λ est une majorante de μ et ν, $\mu = \alpha\lambda$, $\nu = \beta\lambda$, on peut prendre comme nouveaux éléments de ces classes $(f_1\sqrt[p]{\alpha},\lambda)$ et $(g_1\sqrt[p]{\beta},\lambda)$.

Alors nous définirons $\xi+\eta$ comme la classe de $(f+g,\lambda)$. Cette classe est bien indépendante des couples (f,λ), (g,λ) choisis dans ξ et η respectivement ; en effet, si (f',λ'), (g',λ') sont deux autres couples des classes ξ et η, et si λ'' est une mesure $\geqslant 0$ majorant λ et λ', on a $\lambda = \gamma\lambda''$, $\lambda' = \gamma'\lambda''$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, $0 \leqslant \gamma' \leqslant 1$, γ et γ' étant λ''-mesurables ; alors l'équivalence de (f,λ) et (f',λ') se traduit par l'égalité $f\sqrt[p]{\gamma} = f'\sqrt[p]{\gamma'}$, λ''-presque partout; de même $g\sqrt[p]{\gamma} = g'\sqrt[p]{\gamma'}$, λ''presque partout ; alors $(f+g)\sqrt[p]{\gamma} = (f'+g')\sqrt[p]{\gamma'}$, λ''-presque partout, ce qui traduit l'équivalence des couples $(f+g)\lambda$ et $(f'+g',\lambda')$. Si maintenant k est une constante complexe, on définira de même $k\,\xi$ comme la classe de $(k.f,\mu)$, où (f,μ) est un élément arbitraire de la classe ξ. Les lois d'addition et de multiplication par les scalaires complexes ainsi définies satisfont clairement à tous les axiomes des lois correspondantes des espaces vectoriels.

On sait d'ailleurs que si M et N sont des mesures et si F est une fonction de 2 variables complexes, continue et homogène de degré 1, on peut définir la mesure $F(M,N)$. Ici précisément si nous posons $F(u,v) = (u^{[\frac{1}{p}]} + v^{[\frac{1}{p}]})^{[p]}$, on voit que $(\xi+\eta)^{[p]}$ est égal à $F(\xi^{[p]},\eta^{[p]})$.

NORME SUR $\mathcal{H}^p$

On peut normer $\mathcal{H}^p$ en posant $\|\xi\|_p = (\|\xi^{[p]}\|_{\mathfrak{M}})^{\frac{1}{p}}$. Cette définition est légitime, toutes les propriétés exigées pour une norme étant vérifiées. Si $(f,\mu) \in \xi$, on a
$$\|\xi\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(x,\mu)}.$$

$\mathcal{H}^p$ ainsi normé est un espace de Banach, autrement dit il est complet. Soit en effet $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^p$. Choisissons des représentants $(f_n,\mu_n) \in \xi_n$; on peut toujours supposer chaque mesure μ_n bornée ; en remplaçant au besoin (f_n,μ_n) par $(kf_n,\frac{\mu_n}{k^p})$, $k > 0$, on peut même supposer que $\|\mu_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$; alors, en posant $\lambda = \sum \mu_n$, on voit que λ est une mesure $\geqslant 0$ majorant toutes les μ_n, ce qui permet de remplacer les couples (f_n,μ_n) par des couples équivalents (g_n,λ).

Autrement dit, pour toute infinité dénombrable d'éléments de $\mathcal{H}^p$, on peut toujours supposer que les couples qui les définissent font intervenir une même mesure $\lambda \geqslant 0$ de $\mathfrak{M}(X)$.

Alors le fait que les ξ_n forment une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^p$ revient à dire que les g_n forment une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(\lambda)$. Comme cet espace est complet d'après Fischer-Riesz, il existe $g \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ telle que, pour $n \to \infty$, g_n converge vers g dans $\mathcal{L}^p(\lambda)$, alors $(g,\lambda) \in \mathcal{H}^p$, et ξ_n tend vers $\xi = (g,\lambda)^{\cdot}$ pour $n \to \infty$ dans $\mathcal{H}^p$.

DÉFINITION DE $\mathcal{H}^p$ COMME LIMITE INDUCTIVE

On peut retrouver l'espace $\mathcal{H}^p$ à partir du concept de limite inductive. Soit μ une mesure $\geqslant 0$ sur X. Elle définit un espace $L^p(\mu)$. Cet espace peut être identifié en tant qu'espace normé à un sous espace $\mathcal{H}^p(\mu)$ de $\mathcal{H}^p$; si en effet $f^{\cdot} \in L^p(\mu)$, $f^{\cdot}$ est une classe de fonctions, si f est une fonction de cette classe, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, et la classe de (f,μ) est un élément ξ de $\mathcal{H}^p$, qui est indépendant du choix de f dans la classe $f^{\cdot}$, en outre

$$\|\xi\|_p = \|f^{\cdot}\|_{L^p(\mu)}$$

Si maintenant $\lambda \geqslant \mu$, on voit qu'il existe une injection naturelle, isométrique, de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\lambda)$, il existe en effet une fonction α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, λ-mesurable, telle que $\mu = \alpha\lambda$, alors $f^{\cdot} \to \sqrt[p]{\alpha}\, f^{\cdot}$ est bien une telle injection isométrique, de plus on a la relation de transitivité entre les injections $L^p(\mu) \to L^p(\lambda) \to \mathcal{H}^p$. Alors, comme $\mathcal{H}^p$ est la réunion des $\mathcal{H}^p(\mu)$, sa définition montre qu'il n'est autre que la limite inductive (au sens algébrique) des $L^p(\mu)$, relativement à la relation d'ordre filtrante des mesures. Montrons que $\mathcal{H}^p$ est aussi la limite inductive <u>topologique</u> (1) des $\mathcal{H}^p(\mu)$. A priori la topologie limite inductive est plus fine que celle de $\mathcal{H}^p$ puisque toutes les deux sont localement convexes, induisent sur $\mathcal{H}^p(\mu)$ une topologie moins fine que celle de $\mathcal{H}^p(\mu)$ (en fait, la topologie de $\mathcal{H}^p(\mu)$ elle-même), et que la limite inductive est la plus fine à posséder cette propriété. Nous devons donc montrer que la topologie de $\mathcal{H}^p$ est plus fine que la limite inductive. Comme $\mathcal{H}^p$ est normé, il suffit de montrer que, si $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n \dots$ est une suite convergeant vers O dans $\mathcal{H}^p$, elle converge vers 0 dans la limite inductive. Or, comme plus haut, on peut prendre des couples (g_n, λ) des classes ξ_n, avec une même mesure λ. Alors les ξ_n convergent vers 0 dans $\mathcal{H}^p(\lambda)$, donc a fortiori dans la limite inductive, d'où la conclusion. Nous sommes là dans une des rares circonstances où une limite inductive d'espaces normés est normée. On voit donc qu'on aurait pu définir a priori $\mathcal{H}^p$ comme la limite inductive des $L^p(\mu)$, relativement à la relation d'ordre filtrante $\lambda \geqslant \mu$ et aux injections correspondantes $L^p(\mu) \to L^p(\lambda)$.

ÉTUDE DES SOUS-ESPACES $\mathcal{H}^p(\mu)$ - DÉCOMPOSITION DES SOMMES DIRECTES

1°) Soient λ et μ deux mesures $\geqslant 0$, et supposons que λ domine μ; autrement dit $\mu = \alpha\lambda$, α localement λ-intégrable.

(1) BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Paris, Hermann, 1953 (Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 1189), chapitre II, parag. 2, n° 4 et 5.

Alors $(f,\mu)^\cdot \longrightarrow (f\sqrt[p]{\alpha},\lambda)^\cdot$ **est une injection isométrique de** $\mathcal{H}^p(\mu)$ **dans** $\mathcal{H}^p(\lambda)$: $\mathcal{H}^p(\mu)\subset\mathcal{H}^p(\lambda)$. En particulier si λ et μ sont <u>équivalentes</u>, c'est-à-si chacune domine l'autre, $\mathcal{H}^p(\lambda) = \mathcal{H}^p(\mu)$.

2°) Soient μ et ν deux mesures $\geqslant 0$ <u>étrangères</u>, alors $\mathcal{H}^p(\mu+\nu)$ est somme directe topologique de $\mathcal{H}^p(\mu)$ et $\mathcal{H}^p(\nu)$. De plus, si $\xi\in\mathcal{H}^p(\mu+\nu)$ à la décomposition $\xi = \xi_\mu+\xi_\nu$, on a $\|\xi\|^p = \|\xi_\mu\|^p+\|\xi_\nu\|^p$, et $\xi^{[\frac{p}{q}]} = \xi_\mu^{[\frac{p}{q}]}+\xi_\nu^{[\frac{p}{q}]}$ **pour** $1\leqslant q<\infty$.

Tout d'abord, $\mathcal{H}^p(\mu)\cap\mathcal{H}^p(\nu) = 0$. Car si $\xi_\mu\in\mathcal{H}^p(\mu)$, $\xi_\nu\in\mathcal{H}^p(\nu)$, on ne peut avoir $\xi_\mu=\xi_\nu$ que si les mesures $\xi_\mu^{[p]}$ et $\xi_\nu^{[p]}$ sont égales, or elles sont étrangères, cela ne peut donc se produire que si elles sont nulles. Soit ensuite $\lambda = \mu+\nu$ et soit $\xi\in\mathcal{H}^p(\lambda)$. On a $\mu=\alpha\lambda$, $\nu=\beta\lambda$, α et β ne prennent que les valeurs 0 et 1, et si l'une vaut 0 l'autre vaut 1 et vice versa. Si alors $(f,\lambda)\in\xi$, on a $(f,\mu)^\cdot = \xi_\mu\in\mathcal{H}^p(\mu)$, $(f,\nu)^\cdot = \xi_\nu\in\mathcal{H}^p(\nu)$; mais $(f,\mu)\sim(f\sqrt[p]{\alpha},\lambda)$ et $(f,\nu)\sim(f\sqrt[p]{\beta},\lambda)$, et $f = f\sqrt[p]{\alpha}+f\sqrt[p]{\beta}$, donc $\xi = \xi_\mu+\xi_\nu$, ce qui montre **bien** que $\mathcal{H}^p(\lambda)$ est une somme directe de $\mathcal{H}^p(\mu)$ et $\mathcal{H}^p(\nu)$; le fait que c'est une somme directe topologique résulte de la relation entre les normes, qui se déduit de la formule

$$\int_X |f|^p\, d\lambda = \int_X |f|^p\,\alpha\, d\lambda + \int_X |f|^p\,\beta\, d\lambda .$$

3°) On dira qu'un élément ξ de $\mathcal{H}^p$ est atomique (resp. diffus) si la mesure bornée $\xi^{[p]}$ est atomique (resp. diffuse) (1).

Le sous-espace $\mathcal{H}^p_a$ des éléments atomiques et le sous-espace $\mathcal{H}^p_d$ des éléments diffus sont topologiquement supplémentaires dans $\mathcal{H}^p$; de plus si $\xi\in\mathcal{H}^p$ à la décomposition $\xi = \xi_a+\xi_d$, ξ_a atomique et ξ_d diffuse, on a $\|\xi\|^p = \|\xi_a\|^p+\|\xi_d\|^p$

Montrons d'abord que $\mathcal{H}^p_a\cap\mathcal{H}^p_d = 0$. Soient $\xi_a\in\mathcal{H}^p_a$, $\xi_d\in\mathcal{H}^p_d$; comme $\xi_a^{[p]}$ et $\xi_d^{[p]}$ sont l'une atomique et l'autre diffuse, elles ne peuvent être égales que si elles sont nulles.

Soit ensuite $\xi\in\mathcal{H}^p$. La mesure $\lambda = |\xi^{[p]}|$ est somme d'une mesure μ atomique et d'une mesure ν diffuse ; μ et ν sont donc étrangères, et 2°) montre alors que $\xi\in\mathcal{H}^p(\lambda)$ est une somme $\xi = \xi_\mu+\xi_\nu$, où $\xi_\mu\in\mathcal{H}^p(\mu)\subset\mathcal{H}^p_a$ et $\xi_\nu\in\mathcal{H}^p(\nu)\subset\mathcal{H}^p_d$, d'où le résultat.

MULTIPLICATIONS ENTRE LES $\mathcal{H}^p$

Si $\xi\in\mathcal{H}^p$, $\eta\in\mathcal{H}^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, $r\geqslant 1$, alors on peut définir un produit multiplicatif $\xi\eta\in\mathcal{H}^r$. Soient en effet (f,λ), (g,λ) des éléments des classes ξ,η. Comme f est dans $\mathcal{L}^p(\lambda)$ et g dans $\mathcal{L}^q(\lambda)$, on sait que $fg\in\mathcal{L}^r(\lambda)$, et que

(1) Une mesure est atomique si elle est somme dénombrable de masses ponctuelles, diffuse si aucun point ne porte de masse.

$\|fg\|_{\mathcal{L}^r(\lambda)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\lambda)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(\lambda)}$. Alors (fg, λ) est un couple appartenant à une classe ζ de $\mathcal{H}^r$. Montrons que ζ est indépendante des éléments choisis dans ξ et η. Soient donc (f', λ'), (g', λ') d'autres éléments, soit λ'' une mesure $\geqslant 0$ majorant λ et λ', et soit $\lambda = \Upsilon\lambda''$, $\lambda' = \Upsilon'\lambda''$. On a λ''-presque partout : $f\Upsilon^{\frac{1}{p}} = f'\Upsilon'^{\frac{1}{p}}$, $g\Upsilon^{\frac{1}{q}} = g'\Upsilon'^{\frac{1}{q}}$, dont $fg\Upsilon^{\frac{1}{r}} = f'g'\Upsilon'^{\frac{1}{r}}$, dont (fg, λ) et $(f'g', \lambda')$ sont bien équivalents.

On posera $\zeta = \xi\eta$. Le produit ainsi défini est une application bilinéaire de norme $\leqslant 1$, de $\mathcal{H}^p \times \mathcal{H}^q$ dans $\mathcal{H}^r$.

DUALITÉ ENTRE $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{H}^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (ce qui exclut les valeurs $p = 1$, $p' = 1$), et si $\xi \in \mathcal{H}^p$, $\eta \in \mathcal{H}^{p'}$, $\xi\eta$ est une mesure bornée, donc ayant une masse totale $\int_X d(\xi\eta) = \langle \xi\eta, 1 \rangle$. Alors $(\xi, \eta) \longrightarrow \int_X d(\xi\eta)$ est une forme bilinéaire continue de norme $\leqslant 1$ sur $\mathcal{H}^p \times \mathcal{H}^{p'}$. Montrons que cette forme définit chacun des espaces $\mathcal{H}^p$, $\mathcal{H}^{p'}$, comme le dual de l'autre. Tout d'abord tout élément η de $\mathcal{H}^p$ définit la forme linéaire continue $\xi \to \langle \xi\eta, 1 \rangle$ sur $\mathcal{H}^p$, de norme $\leqslant \|\eta\|_{p'}$; mais sa norme est exactement $\|\eta\|_{p'}$, car si $\xi = \bar{\eta}^{\left[\frac{p'}{p}\right]}$, on a $\xi \in \mathcal{H}^p$, $\|\xi\|_p = \|\eta\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}$, $\xi\eta = |\eta^{[p']}|$, et $\langle \xi\eta, 1 \rangle = \|\eta\|_{p'}^{p'} = \|\xi\|_p \|\eta\|_{p'}$.

Il en résulte que $\mathcal{H}^{p'}$ est un sous espace vectoriel normé de $(\mathcal{H}^p)'$. Il reste à montrer que toute forme linéaire continue ℓ sur $\mathcal{H}^p$ est de la forme $\xi \to \langle \xi\eta, 1 \rangle$ pour un $\eta \in \mathcal{H}^{p'}$ convenable. Si μ est une mesure $\geqslant 0$, la restriction de ℓ à $\mathcal{H}^p(\mu)$ est une forme linéaire continue, donc, le dual de $L^p(\mu)$ étant $L^{p'}(\mu)$, il existe un élément $\eta(\mu)$ de $\mathcal{H}^{p'}(\mu)$ tel que, sur $\mathcal{H}^p(\mu)$, ℓ coincide avec la forme $\xi \longrightarrow \langle \xi\eta(\mu), 1 \rangle$. De plus $\|\eta(\mu)\|_{p'} \leqslant \ell$ puisque $\|\eta(\mu)\|_{p'}$ est la norme de la restriction de ℓ à $\mathcal{H}^p(\mu)$. Mais d'après la définition même de la norme de la forme linéaire continue ℓ, $\|\ell\|$ est la borne supérieure des $\|\eta(\mu)\|_{p'}$ lorsque μ varie. Soit donc $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, une suite de mesures telles que $\|\eta(\mu_n)\|_{p'}$ tende vers $\|\ell\|$ pour $n \longrightarrow \infty$. Comme $\mathcal{H}^p(\mu)$ coincide avec $\mathcal{H}^p(\alpha\mu)$ si α est une fonction continue > 0, on peut toujours supposer les μ_n bornées et choisies de telle sorte que $\|\mu_n\|_m \leqslant \frac{1}{2^n}$; alors il existe une mesure $\lambda = \sum \mu_n$ qui majore toutes les μ_n, de sorte que l'on a nécessairement $\|\eta(\lambda)\|_{p'} = \|\ell\|$. Montrons qu'alors ℓ coincide avec la forme $\xi \longrightarrow \langle \xi\eta(\lambda), 1 \rangle$. Il en est bien ainsi sur $\mathcal{H}^p(\lambda)$. Comme $\mathcal{H}^p$ est la réunion des $\mathcal{H}^p(\theta)$, il suffit de démontrer qu'il en est ainsi sur tout $\mathcal{H}^p(\theta)$ pour $\theta \geqslant \lambda$, autrement dit que $\eta(\theta) = \eta(\lambda)$ pour $\theta \geqslant \lambda$. Or, si $\theta \geqslant \lambda$, on a $\theta = \lambda_1 + \pi$, où λ_1 est équivalente à λ et π étrangère à λ. Alors $\mathcal{H}^p(\theta)$ est somme directe topologique de $\mathcal{H}^p(\lambda)$ et de $\mathcal{H}^p(\pi)$. De même $\mathcal{H}^{p'}(\theta)$ est somme directe topologique de $\mathcal{H}^{p'}(\lambda)$ et de $\mathcal{H}^{p'}(\pi)$. Ces deux décompositions sont duales, car, dans la dualité entre $\mathcal{H}^p(\theta)$ et $\mathcal{H}^{p'}(\theta)$, $\mathcal{H}^p(\lambda)$ et $\mathcal{H}^{p'}(\pi)$ sont trivialement orthogonaux, de même que $\mathcal{H}^p(\pi)$ et $\mathcal{H}^{p'}(\lambda)$ (Soient, par exemple, $\xi_\lambda \in \mathcal{H}^p(\lambda) = \mathcal{H}^p(\lambda_1)$,

$\eta_\pi \in \mathcal{H}^{p'}(\pi)$. On a $\lambda_1 = \alpha\,\theta$, $\pi = \beta\,\theta$, α et β ne prenant que les valeurs 0 et 1, l'une prenant la valeur 0 quand l'autre prend la valeur 1 et vice versa. Alors, si

$$(f, \lambda_1) \sim (f \sqrt[p]{\alpha}, \theta) \in \xi_\lambda \quad \text{et si} \quad (g, \pi) \sim (g \sqrt[p]{\beta}, \theta) \in \eta_\pi ,$$

on a $\quad f\, g \sqrt[p]{\alpha} \sqrt[p]{\beta} = 0, \quad$ donc $\quad \xi_\lambda\, \eta_\pi = 0$,

et par suite $\langle \xi_\lambda \eta_\pi , 1 \rangle = 0$).

Mais alors $\eta(\lambda)$ qui coïncide sur $\mathcal{H}^p(\lambda)$ avec la restriction de ℓ ou de $\eta(\theta)$, n'est autre que la composante de $\eta(\theta) \in \mathcal{H}^{p'}(\theta)$ sur $\mathcal{H}^{p'}(\lambda)$ dans la décomposition directe, et de même $\eta(\pi)$ n'est autre que sa composante sur $\mathcal{H}^{p'}(\pi)$. Mais alors $\|\eta(\theta)\|_{p'}^{p'} = \|\eta(\lambda)\|_{p'}^{p'} + \|\eta(\pi)\|_{p'}^{p'}$, et comme les deux premières quantités valent $\|\ell\|$, on a $\eta(\pi) = 0$, donc $\eta(\theta) = \eta(\lambda)$, c.q.f.d.

L'ESPACE DE HILBERT $\mathcal{H}^2$

La forme hermitienne $(\xi,\eta) \longrightarrow \langle \xi\bar{\eta}, 1 \rangle$ définit sur $\mathcal{H}^2$ une structure préhilbertienne, compatible avec sa structure d'espace normé: $\|\xi\|_2^2 = \langle \xi\,\bar{\xi}, 1 \rangle$. Comme $\mathcal{H}^2$ est complet, c'est un espace de Hilbert. Remarquons que les sous-espaces $\mathcal{H}^2_a$ et $\mathcal{H}^2_d$ (page 7) sont orthogonaux, et que, si μ et ν sont deux mesures étrangères, $\mathcal{H}^2(\mu)$ et $\mathcal{H}^2(\nu)$ sont orthogonaux. En particulier, si $\varepsilon(a)$ est la mesure formée de la masse unité au point a de X, les vecteurs $\xi(a) = (1, \varepsilon(a)) = (\varepsilon(a))^{[\frac{1}{2}]}$ sont deux à deux orthogonaux.

STRUCTURE D'ORDRE SUR $\mathcal{H}^p$

On dira que $\xi \in \mathcal{H}^p$ est $\geqslant 0$ si $\xi^{[p]}$ est une mesure $\geqslant 0$; alors si $(f,\mu) \in \xi$, f est μ-presque partout $\geqslant 0$ et inversement. Cette structure d'ordre est compatible avec la structure vectorielle : si $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, et si k est un scalaire $\geqslant 0$, on a $\xi + \eta \geqslant 0$, $k\,\xi \geqslant 0$.

Comme la structure d'ordre est transportée de celle de $\mathfrak{M}(X)$ par la bijection $\theta \longrightarrow \theta^{[\frac{1}{p}]}$, $\mathcal{H}^p$ est un espace de Riesz complètement réticulé (1). ξ et η sont étrangers si et seulement si les mesures sont étrangères; alors $(\xi + \eta)^{[p]} = \xi^{[p]} + \eta^{[p]}$. Si $(f,\mu)^{\cdot} = \xi \in \mathcal{H}^p$, on a $(f^+,\mu)^{\cdot} = \xi^+$, $(f^-,\mu)^{\cdot} = \xi^-$, $(|f|,\mu)^{\cdot} = |\xi|$.

Si $\xi \in \mathcal{H}^p$ est $\geqslant 0$, alors $\xi^{[\frac{p}{q}]} \in \mathcal{H}^q$ est aussi $\geqslant 0$; nous l'écrirons dans ce cas $\xi^{\frac{p}{q}}$. Alors $|\xi^{[\frac{p}{q}]}| = |\xi|^{\frac{p}{q}}$.

Si $\mu \geqslant 0$ est une mesure bornée, l'élément $(1,\mu)^{\cdot}$ de $\mathcal{H}^p$ peut s'écrire $\mu^{\frac{1}{p}}$ ou $\sqrt[p]{\mu}$. Par exemple, si $\varepsilon(a)$ est la masse unité au point a de X, $(1,a)^{\cdot} \in \mathcal{H}^p$ s'écrit $\sqrt[p]{\varepsilon}(a)$.(2)

---

(1) BOURBAKI, Int., Chapitre II, parag. 1, n° 3, et chapitre III, parag. 2, n° 4, théorème 3, page 54.

(2) Quand on considère la classe $(f,\mu)^{\cdot}$ d'un couple (f,μ), il importe de dire pour quelle relation d'équivalence, c'est-à-dire pour quelle valeur de p. Ainsi la classe de $(1, \varepsilon(a))$ s'écrit $\sqrt[p]{\varepsilon(a)}$ dans $\mathcal{H}^p$.

LES $(\frac{1}{p})$ - MESURES QUELCONQUES - LES ESPACES $\mathcal{H}^p_{loc}$

On généralise toutes les définitions précédentes, en introduisant l'espace $\mathcal{F}^p_{loc}$ des couples (f,μ), où f est <u>localement</u> de puissance p-ième μ-intégrable, ce que nous écrirons $f \in \mathcal{L}^p_{loc}(\mu)$. On dira que (f,μ) et (g,ν) sont équivalents si les mesures (non nécessairement bornées) $f^{[p]}\mu$, $g^{[p]}\nu$, coincident. Une classe d'équivalence sera une $(\frac{1}{p})$-mesure (non nécessairement bornée). L'espace des $(\frac{1}{p})$-mesures sera noté $\mathcal{H}^p_{loc}$. $\mathcal{H}^1_{loc}$ est l'espace de toutes les mesures. Nous laissons au lecteur le soin d'étendre les propriétés précédentes. $\mathcal{H}^p_{loc}$ n'est pas normé, mais c'est un espace de Fréchet, si on lui donne la famille des semi-normes N_A :

$$\xi \longrightarrow \left(\int_A |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (f,\mu) \in \xi, \quad A \text{ compact de } X.$$

$\mathcal{H}^p_{loc}$ est limite inductive des $\mathcal{H}^p_{loc}(\mu) \approx L^p_{loc}(\mu)$. Naturellement il n'y a pas dualité entre $\mathcal{H}^p_{loc}$ et $\mathcal{H}^{p'}_{loc}$ mais entre $\mathcal{H}^p_{loc}$ et $\mathcal{H}^{p'}_{comp}$ (sous-espace de $\mathcal{H}^{p'}$ formé des éléments à support compact, avec une topologie limite inductive ; le support de $\xi \in \mathcal{H}^p$ est par définition, celui de $\xi^{[p]}$).

MULTIPLICATION DES $(\frac{1}{p})$ - MESURES PAR DES FONCTIONS

Soit $\xi \in \mathcal{H}^p_{loc}$, et soit g une fonction appartenant à $\mathcal{H}^p_{loc}(|\xi|^p)$. Alors on peut définir $g\xi \in \mathcal{H}^p_{loc}$ par $g\xi = (g^{[p]}\xi^{[p]})^{[\frac{1}{p}]}$ (l'expression entre parenthèses est le produit de la mesure $\xi^{[p]}$ par la fonction $g^{[p]}$ localement $|\xi^{[p]}|$-intégrable). Si $(f,\mu) \in \xi$, on voit que $fg \in \mathcal{L}^p_{loc}(\mu)$, et $(fg,\mu)^{\cdot} = g\xi$. On a $(g\xi)^{[\frac{p}{q}]} = g^{[\frac{p}{q}]}\xi^{[\frac{p}{q}]} \in \mathcal{H}^q_{loc}$.

Si $\xi \in \mathcal{H}^p_{loc}(\mu)$, on a aussi $g\xi \in \mathcal{H}^p_{loc}(\mu)$. Si $\xi \in \mathcal{H}^p$, et $g \in \mathcal{L}^p(|\xi|^p)$, on a aussi $g\xi \in \mathcal{H}^p$, et $\|g\xi\|_p = \|g\|_{\mathcal{L}^p(|\xi|^p)}$

On a enfin la règle suivante d'associativité : si $g \in \mathcal{L}^p_{loc}(|\xi|^p)$, et si $h \in \mathcal{L}^p_{loc}(|(g\xi)|^p)$, alors $gh \in \mathcal{L}^p_{loc}(|\xi|^p)$ et $h(g\xi) = (hg)\xi$.

EXPRESSION DE (f,μ) PAR $f\sqrt[p]{\mu}$

Soit $\xi \in \mathcal{H}^p_{loc}$, et soit $(f,\mu) \in \xi$. Alors $f \in \mathcal{L}^p_{loc}(\mu) = \mathcal{L}^p_{loc}(|\sqrt[p]{\mu}|^p)$ (avec $(1,\mu)^{\cdot} = \sqrt[p]{\mu} \in \mathcal{H}^p_{loc}$), et on a $f\sqrt[p]{\mu} = \xi$. La loi d'associativité donne en outre sous une forme bien plus suggestive la relation d'équivalence $(f,\mu) \sim (f\sqrt[p]{\alpha},\lambda)$ pour $\mu = \alpha\lambda$. Cette relation d'équivalence s'exprime simplement par l'égalité

$$f\sqrt[p]{\mu} = f\sqrt[p]{\alpha\lambda} = (f\sqrt[p]{\alpha})\sqrt[p]{\lambda}$$

Remarquons que $\mathcal{H}^p_{loc}(\mu)$ n'est autre que la <u>bande engendrée</u> (1) par $\sqrt[p]{\mu}$ dans l'espace complètement réticulé $\mathcal{H}^p_{loc}$.

---

(1) BOURBAKI, Int., chapitre II, parag. 1, n° 5. Rappelons que si a appartient à la bande de $b \geqslant 0$, on dit que a est dominé par b.

DÉCOMPOSITION DE LEBESGUE

Soient ξ et η deux éléments de $\mathcal{H}^p_{loc}$. Comme $\mathcal{H}^p_{loc}$ est un espace de Riesz, on peut écrire $\eta = \xi_1 + \zeta$, où ξ_1 est dominé par $|\xi|$ et ζ étranger à ξ; une telle décomposition est unique. Mais puisque ξ_1 est dominé par $|\xi|$, on a $\xi_1^{[p]} = f^{[p]} |\xi|^p$, où $f^{[p]}$ est une fonction localement $|\xi|^p$-intégrable; d'où la décomposition unique de Lebesgue :

$$\eta = f \xi + \zeta ,$$

où $f \in \mathcal{L}^p_{loc}(|\xi|^p)$, et où ζ est étrangère à ξ. Si ξ est une $(\frac{1}{p})$-mesure diffuse (par exemple si ξ est la racine p-ième de la mesure de Haar sur un groupe localement compact non discret), $f\xi$ est diffuse, et ζ peut se décomposer en une composante atomique ζ_a et une composante diffuse ζ_d. Si $p = 2$, les 3 termes $f\xi$, ζ_a, ζ_d sont orthogonaux dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2$.

APPLICATIONS A LA TRANSFORMATION DE FOURIER SUR LES GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS

Soit X un groupe abélien localement compact, dénombrable à l'infini (1). Il y a une infinité de mesures de Haar $\geqslant 0$, et si le groupe n'est pas compact, aucune d'elles n'est plus naturelle que les autres. Mais comme toutes sont proportionnelles à l'une d'elles, que nous noterons dx, elles définissent toutes la même bande, que nous noterons $\mathcal{H}^p(dx)$. Soit $d\hat{x}$ la mesure de Haar associée à dx sur le groupe dual $\hat{X}$ de manière qu'on ait la formule de Parseval-Plancherel : alors la mesure de Haar associée à k dx est $\frac{d\hat{x}}{k}$. Soit alors une classe de fonctions appartenant à $L^p(dx)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$; elle a, par rapport à dx, une image de Fourier $\hat{f} \in L^{p'}(d\hat{x})$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit k dx une autre mesure de Haar ; on a, dans $\mathcal{H}^p$, $f \sqrt[p]{dx} = \frac{f}{k^{\frac{1}{p}}} \sqrt[p]{k\,dx}$.

L'image de Fourier de $\frac{f}{k^{\frac{1}{p}}}$ relativement à la mesure de Haar kdx n'est autre que $\frac{\hat{f}}{k^{\frac{1}{p}}} k = \hat{f} k^{\frac{1}{p'}}$, et on a, dans $\mathcal{H}^{p'}$, $\hat{f} k^{\frac{1}{p'}} \sqrt[p']{\frac{d\hat{x}}{k}} = \hat{f} \sqrt[p']{d\hat{x}}$.

On voit donc que la transformation de Fourier définit <u>intrinsèquement</u> (c'est-à-dire indépendamment de tout choix d'une mesure de Haar) une application linéaire continue de norme $\leqslant 1$ de $\mathcal{H}^p(dx)$ dans $\mathcal{H}^{p'}(d\hat{x})$ (et, si $p = 2$, c'est une isométrie de l'un sur l'autre). Cette transformation se définit comme suit : soit dx' (= k dx) une mesure de Haar $\geqslant 0$ arbitraire, $d\hat{x}'$ $(= \frac{d\hat{x}}{k})$ la mesure associée sur $\hat{X}$; pour $\xi \in \mathcal{H}^p(dx)$, posons $\xi = f' \sqrt[p]{dx'}$; calculons l'image de Fourier $\hat{f'}$ de f' relativement à la mesure de Haar dx'; alors $\xi = \hat{f'} \sqrt[p']{dx'}$ est indépendant du choix de la mesure de Haar dx'.

---

(1) Voir A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, Hermann 1940 (Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 869).

APPLICATION AUX FONCTIONS D'ONDES DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Supposons un système physique dépendant d'un nombre fini de paramètres. Une position du système sera en général un point q d'une variété indéfiniment différentiable V^n. Dans une région assez petite de la variété, on pourra prendre des coordonnées locales $q_1, q_2, \dots q_n$, mais non en général dans la variété tout entière. On dit habituellement en mécanique quantique, qu'un état du système est défini par une fonction d'onde Ψ et qu'alors la "densité" de probabilité de présence est $|\Psi|^2$; "densité" s'entend par rapport à la mesure $dq_1, dq_2 \dots dq_n$. Mais ceci est valable seulement dans une région assez petite de la variété relativement à un système de coordonnées locales.

En réalité Ψ n'est pas une fonction, c'est une $(\frac{1}{2})$-mesure bornée, c'est un élément de l'espace $\mathcal{H}^2(V^n)$; alors $\overline{\Psi}\Psi = |\Psi|^2$ est une mesure bornée $\geqslant 0$, qui se trouve avoir la masse totale 1 si $\|\Psi\|_2 = 1$, et qui est la probabilité de présence. Ceci permet d'obtenir des "fonctions d'ondes" ou toute la probabilité est concentrée en un point a de V^n ; il suffit de prendre $\Psi = \sqrt{\varepsilon\ (a)}$. Néanmoins, en général, l'hamiltonien H n'opère pas sur $\mathcal{H}^2(V^n)$ tout entier.

Soit dQ une mesure $\geqslant 0$ ayant la propriété d'avoir une densité indéfiniment dérivable $\geqslant 0$ par rapport à $dq_1\, dq_2 \dots dq_n$ sur toute carte locale. Toute autre mesure ayant la même propriété est de la forme α dQ où α est une fonction > 0 indéfiniment dérivable sur V^n. Alors la bande $\mathcal{H}^2(dQ)$ est intrinsèquement attachée à V^n. Dans les cas usuels, l'hamiltonien n'opère que sur $\mathcal{H}^2(dQ)$, de sorte qu'on devra en général supposer $\Psi \in \mathcal{H}^2(dQ)$, dont $|\Psi|^2$ aura bien, sur toute carte locale, une densité par rapport à $dq_1 \dots dq_n$; la densité de Ψ par rapport à $\sqrt{dq_1 \dots dq_n}$ sera la fonction d'onde, dans le système de coordonnées locales considérées. Cette obligation de considérer des éléments de $\mathcal{H}^2(dQ)$, dans les cas usuels, nous parait très regrettable.