Laurent Schwartz

Distributions semi-régulières et changements de coordonnées

J. Math. Pures Appl. (9), 36 (1957), p. 109-127.

Distributions semi-régulières et changements de coordonnées ;

PAR LAURENT **SCHWARTZ**.

Dans un système de coordonnées (x, y), on peut définir la notion de distribution semi-régulière ou intégralement semi-régulière par rapport à l'une des variables. Cette notion semble *a priori* essentiellement liée au système de coordonnées choisi. Cependant le théorème démontré dans cet article (p. 124) démontre qu'une distribution *intégralement semi-régulière en x* dans le système de coordonnées (x, y), reste *semi-régulière en* ξ dans presque tous les systèmes de coordonnées (ξ, η).

DISTRIBUTIONS SEMI-RÉGULIÈRES ET INTÉGRALEMENT SEMI-RÉGULIÈRES. — Soit $Z^{m+n} = X^m \times Y^n$ un espace euclidien à $m+n$ dimension, produit de deux espaces X^m, Y^n, à m et n dimensions.

Une distribution (¹) $T \in \mathcal{D}'_{x,y}$ est dite semi-régulière en x (²) si, considérée comme distribution sur X^m à valeurs dans l'espace vectoriel topologique $\mathcal{D}'_y$, elle est une fonction indéfiniment différentiable $x \to T(x; \hat{y}) \in \mathcal{D}'_y$ (³); autrement dit, elle appartient à $\mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_y) = \mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$. En inversant le rôle des variables x, y, on peut

(¹) Pour les définitions et notations, *voir* SCHWARTZ [1], [2], [3], [4].

(²) *Voir* SCHWARTZ [2], p. 228 et [3], p. 142.

(³) Nous notons $T(\hat{z})$ une fonction ou distribution sur l'espace de la variable z ; z est alors une « variable muette ». Alors ici $T(\hat{x}, \hat{y})$ est dans $\mathcal{D}'_{x,y}$, mais $T(x; \hat{y})$ est, pour x fixé, une distribution de $\mathcal{D}'_y$. On notera z au lieu de $\hat{z}$ dans une intégration : $\int T(z)\, dz$.

la considérer comme distribution en y à valeurs dans $\mathcal{E}_x$, c'est-à-dire une application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{E}_x$. L'espace des distributions semi-régulières en x est muni de la topologie canonique de $\mathcal{E}_x(\mathcal{D}_y)$ ou $\mathcal{D}'_y(\mathcal{E}_x)$, ou $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y$; c'est un espace nucléaire, comme produit tensoriel topologique complété de deux espaces nucléaires [4].

On a les inclusions $\mathcal{D}_{x,y} \subset \mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y \subset \mathcal{D}'_{x,y}$ et les injections correspondantes sont continues; d'autre part, d'après la définition même du complété, $\mathcal{E}_x \otimes \mathcal{D}_y$ est dense dans $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y$, et l'application

$$\mathcal{E}_x \times \mathcal{D}_y \to \mathcal{E}_x \otimes_\tau \mathcal{D}'_y$$

est continue, de sorte que, $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$ étant denses respectivement dans $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{D}'_y$, $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$ et *a fortiori* $\mathcal{D}_{x,y}$ est dense dans $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$.

Cela montre que le dual fort de $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ est un espace de distributions,

$$\mathcal{D}_{x,y} \subset (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)' \subset \mathcal{D}'_{x,y},$$

les injections étant continues; et $\mathcal{D}_{x,y}$ est dense [faiblement, donc fortement puisque $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ est semi-réflexif [5]] dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$. Nous allons caractériser ce dual. Tout d'abord, une distribution T, forme linéaire continue sur $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y$, est *a fortiori* continue sur

$$\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{x,y},$$

donc elle est à support compact; $T \in \mathcal{E}'_{x,y}$. D'autre part, d'après la définition du produit tensoriel topologique, $(u, v) \to \langle T, u \otimes v \rangle$ est une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{E}_x \times \mathcal{D}_y$, si $T \in (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$, et réciproquement. Une telle forme définit donc aussi une application linéaire continue $L_1 : u \to u.T$, de $\mathcal{E}_x$ dans $\mathcal{D}_y$, transformant un voisinage convenable de 0 de $\mathcal{E}_x$ en une partie de $\mathcal{D}_y$ équicontinue sur $\mathcal{D}_y$, c'est-à-dire bornée; autrement dit $T \in (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y')$ définit une

(4) *Voir* Grothendieck [1] chap. II, p. 47 et Schwartz [4], exposé 18, p. 3. D'une façon générale, une certaine connaissance de ces travaux sera nécessaire à la compréhension de cet article.

(5) Tout espace nucléaire complet est semi-réflexif, Grothendieck [1], chap. II, p. 38; Schwartz [4], exposé 17, p. 5.

application linéaire *bornée* de $\mathcal{E}_x$ dans $\mathcal{D}_y$, ou encore une application *intégrale* ou *nucléaire* de $\mathcal{E}_x$ dans $\mathcal{D}_y$, puisque $\mathcal{E}_x$ est nucléaire et $\mathcal{D}_y$ complet ([6]).

Nous séparerons les propriétés de $T \in (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ en propriétés de support et propriétés de régularité locale.

Pour cela, nous introduirons la notion de distribution *intégralement semi-régulière* en y. $T \in \mathcal{D}'_{x,y}$ est dite intégralement semi-régulière en y si, quels que soient le compact H de X^m et le compact K de Y^n, la restriction de la forme bilinéaire $(u, v) \to \langle T, u \otimes v \rangle$ à $\mathcal{D}_H \times \mathcal{D}_K$ est continue pour la topologie induite par $\mathcal{D}_H \times \mathcal{E}'_K$ [$\mathcal{D}_H$ (resp. $\mathcal{E}'_K$) est le sous-espace de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{E}'$) formé des fonctions (resp. distributions) à support dans le compact H (resp. K)]; cela entraîne que cette forme se prolonge en une forme bilinéaire sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{E}'_y$ dont la restriction à tout $\mathcal{D}_H \times \mathcal{E}'_K$ est continue. Cela revient à dire que, quelles que soient $\alpha \in \mathcal{D}_x$ et $\beta \in \mathcal{D}_y$, la forme bilinéaire définie par $\alpha(\hat{x})\beta(\hat{y})T(\hat{x}, \hat{y})$ sur $\mathcal{E}_x \times \mathcal{D}'_y$ est continue, donc que, pour toute $\alpha \in \mathcal{D}_x$ et toute $\beta \in \mathcal{D}_y$, $\alpha\beta T$ est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$. C'est une propriété de caractère local.

On peut alors dire que T est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ si et seulement si elle est à support compact, et intégralement semi-régulière en y. En effet, nous avons vu que si T est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$, elle est à support compact; en outre, la forme bilinéaire définie par T est non seulement continue sur $\mathcal{D}_H \times \mathcal{E}'_K$ mais même sur $\mathcal{E}_x \times \mathcal{D}'_y$. Réciproquement si T est à support compact, elle est égale à $\alpha\beta T$ pour α et β convenables; si elle est en outre intégralement semi-régulière en y, $\alpha\beta T$ est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ donc aussi T.

On peut dire plus. Soit $\gamma \in \mathcal{E}_{x,y}$. En identifiant $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ à $\mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_y)$, on voit aisément que si S est dans $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, il en est de même de γS; et si S converge vers zéro dans $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, il en est de même de γS. Alors si T est intégralement semi-régulière en y, et si $\gamma \in \mathcal{E}_{x,y}$, $\alpha\beta T$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$; alors il en est de même de $\alpha\beta\gamma T$, car $\langle S, \alpha\beta\gamma T \rangle = \langle \gamma S, \alpha\beta T \rangle$; donc γT est encore intégralement

([6]) GROTHENDIECK [1], chap. II, p. 39; SCHWARTZ [4], exposé 17, p. 5.

semi-régulière en y. On peut donc dire que T est intégralement semi-régulière en y si et seulement si, pour toute $\gamma \in \mathcal{D}_{x,y}$, γT est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$. Cela permet de topologiser de façon naturelle l'espace $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'_{\text{loc}}$ des distributions intégralement semi-régulières en y : T converge vers zéro dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'_{\text{loc}}$ si et seulement si, pour toute $\gamma \in \mathcal{D}_{x,y}$, T converge vers zéro dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ fort.

Si T est intégralement semi-régulière en y, il en est de même de ses dérivées partielles; et par suite aussi de DT, quel que soit l'opérateur différentiel D à coefficients indéfiniment dérivables.

Remarquons bien que le fait pour T d'être intégralement semi-régulière en y n'entraîne pas que l'application $L_1 : u \to u.T$ soit nucléaire de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{E}_y$, ou encore que la forme bilinéaire qu'elle définit sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{E}'_y$ soit continue; cette dernière propriété ne serait pas de caractère local; nous en reparlerons plus loin.

Nous allons étudier la notion de semi-régularité intégrale en y. Tout d'abord une distribution intégralement semi-régulière en y est semi-régulière en y. En effet, pour $\gamma \in \mathcal{D}_{x,y}$, γT est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ donc définit une application nucléaire et, par suite, continue de $\mathcal{E}_x$ dans $\mathcal{D}_y$, elle est donc semi-régulière en y; comme cette notion est de caractère local, il en est de même pour T. La réciproque est naturellement fausse : si $X^m = Y^n$, la distribution $\delta(\hat{x} - \hat{y})$ est semi-régulière en y, elle définit l'opérateur identique L_δ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$; et la forme bilinéaire $(u, v) \to \int_X u(x)v(x)\,dx$ qu'elle définit n'est pas continue sur $\mathcal{D}_K \times \mathcal{E}'_K$, si K a un intérieur non vide.

Proposition 1. — *Pour que* $T \in (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$, *il faut et il suffit que* T *soit de la forme*

$$T = \sum_{|p| \leq k} D_x^p g_p(\hat{x}, \hat{y}), \tag{1}$$

où les g_p *sont des fonctions de* x, y, *à support compact, indéfiniment dérivables en* y *et dont toutes les dérivées en* y *sont des fonctions continues de* x, y $(g_p \in \mathcal{D}^0_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y)$ (7). *Si alors* $S \in \mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, *le produit*

(7) Schwartz [3], p. 115.

scalaire $\langle S, T \rangle$, *correspondant à la dualité entre* $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ *et son dual, s'écrit*

$$(2) \qquad \langle S, T \rangle = \Big\langle S(x, y), \sum_{|p| \leq k} D_x^p g_p(x, y) \Big\rangle$$

$$= \sum_{|p| \leq k} (-1)^{|p|} \int_{X_m} \langle D_x^p S(x; \hat{y}), g_p(x, \hat{y}) \rangle_y \, dx,$$

où le crochet $\langle \ \rangle_y$ *est le produit scalaire en* y *pour tout* x *fixé*, de $D_x^p S(x; \hat{y}) \in \mathcal{D}'_y$ *et de* $g_p(x, \hat{y}) \in \mathcal{D}_y$.

Soit, en effet, $T \in (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$. L'opérateur L_T de $\mathcal{E}_x$ dans $\mathcal{D}_y$ est nucléaire. Il existe donc, d'après l'expression canonique des opérateurs nucléaires : *a.* une suite bornée dans $\mathcal{E}'_x$, c'est-à-dire une suite de distributions de la forme $\sum_{|p| \leq k} D^p g_{\nu,p}(\hat{x})$ (k fixe, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$), $g_{\nu,p}$ fonctions continues à supports contenus dans un compact fixe et bornées dans leur ensemble; *b.* une suite bornée dans $\mathcal{D}_y$, c'est-à-dire une suite de fonctions $\beta_\nu(\hat{y})$, à supports contenus dans un compact fixe, et dont les dérivées de tout ordre fixé sont bornées dans leur ensemble; *c.* une suite de constantes C_ν, $\sum_\nu |C_\nu| < \infty$, telles que T puisse s'exprimer comme

$$(3) \qquad T(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{\substack{\nu = 0, 1, 2, \ldots \\ |p| \leq k}} C_\nu D_x^p g_{\nu,p}(\hat{x}) \otimes \beta_\nu(\hat{y}) \quad (^8)$$

$$= \sum_{|p| \leq k} D_x^p g_p(\hat{x}, \hat{y}),$$

où

$$(4) \qquad g_p(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_\nu C_\nu g_{\nu,p}(\hat{x}) \beta_\nu(\hat{y})$$

a toutes les propriétés voulues.

Inversement, supposons que T s'exprime suivant (1). Comme

$$g_p(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{E}_x^0 \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}_y,$$

---

(8) GROTHENDIECK [1], chap. I, p. 83; SCHWARTZ [4], exposé 12, p. 5.

produit tensoriel topologique complété de deux espaces de Fréchet, on peut l'écrire

$$g_p(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_\nu C_{p,\nu}\, g_{p,\nu}(\hat{x}) \otimes \beta_{p,\nu}(\hat{y}),$$

où $\sum_\nu |C_{p,\nu}| < \infty$, les $g_{p,\nu}$ étant bornées dans $\mathcal{E}^0_x$, les $\beta_{p,\nu}$ dans $\mathcal{E}_y$. Mais comme g_p est à support compact, on peut trouver $u \in \mathcal{D}_x$ et $v \in \mathcal{D}_y$ telles que $uv = 1$ sur le support des g_p, alors on a aussi

$$g_p(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_\nu C_{p,\nu}\, g_{p,\nu}(\hat{x})\, u(\hat{x}) \otimes \beta_{p,\nu}(\hat{y})\, v(\hat{y})$$

et alors T a une expression analogue à (3), prouvant que L'_T est nucléaire de $\mathcal{E}_x$ dans $\mathcal{D}_y$.

Reste à exprimer le produit scalaire $\langle S, T \rangle$ lorsque $S_x \in \mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ et que T a la forme (1). Précisons d'abord ce que signifie (2). Comme S est semi-régulière en x, $D^p_x S(\hat{x}, \hat{y})$ définit, pour x fixé, une distribution $D^p_x S(x; \hat{y})$, et $x \to D^p_x S(x; \hat{y})$ est une fonction indéfiniment dérivable de X^m dans $\mathcal{D}'_y$; d'autre part, $g_p(\hat{x}, \hat{y})$, pour x fixé, définit une fonction $g_p(x, \hat{y}) \in \mathcal{D}_y$, et $x \to g_p(x, \hat{y})$ est continue de X^m dans $\mathcal{D}_y$. Alors, pour x fixé, $\langle D^p_x S(x, \hat{y}), g(x, \hat{y}) \rangle_y$ a un sens comme produit scalaire d'un élément de $\mathcal{D}'_y$ et d'un élément de $\mathcal{D}_y$; ce produit scalaire est une fonction continue de x à support compact, donc son intégrale dans X^m a un sens. Reste à montrer l'égalité des membres de (2). Elle est triviale si $S = \varphi \in \mathcal{D}_{x,y}$, car alors

$$(5) \qquad \begin{aligned} \langle \varphi, T \rangle &= \sum (-1)^{|p|} \langle D^p_x \varphi, g_p \rangle \\ &= \sum (-1)^{|p|} \int_{X_m} \langle g_p(x, \hat{y}), D^p_x \varphi(x, \hat{y}) \rangle_y \, dx, \end{aligned}$$

d'après Fubini. Comme alors on sait que $\mathcal{D}_{x,y}$ est dense dans $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, et que $S \to \langle S, T \rangle$ est continue sur $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, l'égalité des membres de (2) sera certaine si l'expression définie par le dernier est une forme linéaire continue de $S \in \mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$. Or si S converge vers zéro dans $\mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_y)$, $D^p_x S(x, \hat{y})$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}'_y$ uniformément lorsque x parcourt un compact de X^m; comme $g_p(x, \hat{y})$ reste borné dans $\mathcal{D}_y$ pour $x \in X^m$, le produit scalaire $\langle\ \rangle_y$ converge vers zéro uniformément et garde son support dans un compact fixe de X^m, donc son intégrale converge vers zéro. C. Q. F. D.

Remarque. — Pour que T soit intégralement semi-régulière en y, il faut et il suffit que dans tout produit $A \times B$ d'ouverts bornés A, B, de X^m, Y^n, elle ait une expression (1′), analogue à (1), où les $g_p(\hat{x}, \hat{y})$ sont des fonctions indéfiniment dérivables en y, à dérivées partielles en y continues en $x, y : g_p(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{E}^0_A \hat{\otimes} \mathcal{E}_B$. En effet, si $\alpha \in \mathcal{D}_x$ et $\beta \in \mathcal{D}_y$ sont telles que $\alpha\beta = 1$ sur $A \times B$, alors $T = \alpha\beta T$ sur $A \times B$, donc si T est intégralement semi-régulière en y, $\alpha\beta T$ est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$, d'où l'expression (1′) de T dans $A \times B$. Réciproquement si T a localement une expression (1′), alors si $\alpha \in \mathcal{D}_x$, $\beta \in \mathcal{D}_y$, on choisira pour A et B des voisinages ouverts bornés des supports de α, β, et de l'expression (1′) de T dans $A \times B$ on déduira une expression (1) de $\alpha\beta T$ dans $X^m \times Y^n$, grâce à la formule de Leibnitz

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \alpha\beta T &= \sum_{|p| \leq k} \alpha(\hat{x})\,\beta(\hat{y})\,D^p_x g_p(\hat{x}, \hat{y}) \\ &= \sum_{|p| \leq k} \sum_{q \leq p} (-1)^{|q|} \binom{p}{q} D^{p-q}_x \left(D^q \alpha(\hat{x})\,\beta(\hat{y})\, g_p(\hat{x}, \hat{y})\right). \end{aligned}$$

avec $D^q \alpha\beta g_p \in \mathcal{D}^0_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y$. Donc $\alpha\beta T \in (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ et, par suite, T est bien intégralement semi-régulière en y.

Ceci nous montre bien qu'une distribution intégralement semi-régulière en y définit une application de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{E}_y$ qui n'est pas nécessairement nucléaire. En effet, une application nucléaire L_T de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{E}_y$ est définie à partir d'une suite bornée (M_ν) dans $\mathcal{D}'_x$, d'une suite bornée β_ν dans $\mathcal{E}_y$, et d'une suite sommable de constantes C_ν, par

$$\text{(7)} \qquad T = \sum_\nu C_\nu M_\nu(\hat{x}) \otimes \beta_\nu(\hat{y}).$$

Dans tout ouvert borné A de X^m, on a une expression

$$M_\nu(\hat{x}) = \sum_{|p| \leq k} D^p_x g_{p,\nu}(\hat{x}),\ g_{p,\nu} \in \mathcal{E}^0_A,$$

de sorte que T s'exprime dans $A \times Y^n$ par

$$(8) \qquad T = \sum_{p,\nu} C_\nu D_x^p g_{p,\nu}(\hat{x})\, \beta_\nu(\hat{y}) = \sum_{|p| \leq k} D_x^p g_p(\hat{x}, \hat{y}),$$

avec $g_p \in \mathcal{E}_A^0 \hat{\otimes} \mathcal{E}_y$. C'est bien une expression locale du type (1′), mais valable dans $A \times Y^n$; alors que si T est seulement intégralement semi-régulière en y, une telle décomposition n'existe que dans tout produit $A \times B$, l'ordre k pouvant croître indéfiniment lorsque A reste fixe et que B croît dans Y^n. La nucléarité de L_Γ, opérateur de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{E}_y$, n'est pas une propriété de caractère local; elle est locale par rapport à x, non par rapport à y. Remarquons encore que l'espace des opérateurs nucléaires (ou bornés) de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{E}_y$ est aussi l'espace des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{E}'_y$, donc le dual de $\mathcal{D}_x \hat{\otimes} \mathcal{E}'_y$. Au contraire, l'espace des distributions intégralement semi-régulières en y est l'espace des formes bilinéaires sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{E}'_y$ dont les restrictions aux $\mathcal{D}_H \times \mathcal{E}'_K$ (H, K compacts de X^m, Y^n respectivement) sont continues (ou encore le dual de la limite inductive des $\mathcal{D}_H \hat{\otimes} \mathcal{E}'_K$; on peut montrer que c'est aussi l'espace des formes bilinéaires sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{E}'_y$ dont les restrictions aux $\mathcal{D}_x \times \mathcal{E}'_K$ sont continues ou le dual de la limite inductive des $\mathcal{D}_x \hat{\otimes} \mathcal{E}'_K$).

Corollaire 1. — *Pour que* $T \in (\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$, *il faut et il suffit qu'il existe un entier* l *tel que* T *soit définie par une distribution à support compact d'ordre* $\leq l$ *en* x *à valeurs dans* $\mathcal{D}_y$ *ou une fonction indéfiniment dérivable de* y *à support compact à valeurs dans* $(\mathcal{E}'^l_c)_x$

$$T \in (\mathcal{E}'^l_c)_x \mathcal{D}_y = \overline{(\mathcal{E}'^l_c)}_x(\mathcal{D}_y) = (\mathcal{E}'^l_c)_x \hat{\otimes} \mathcal{D}_y = \mathcal{L}_c(\mathcal{E}^l_x; \mathcal{D}_y)$$
$$\approx \mathcal{D}_y(\mathcal{E}'^l_c)_x = \overline{\mathcal{D}}_y(\mathcal{E}'^l_c)_x = \mathcal{L}(\mathcal{D}'_y; (\mathcal{E}'^l_c)_x) \quad [9].$$

[9] Ces différents espaces sont définis dans un Mémoire à paraître prochainement aux *Annales de l'Institut Fourier : Distributions à valeurs vectorielles*. Cependant, les quatre derniers interviennent déjà dans Schwartz [3], et leur identité est démontrée p. 108 (car sur $\mathcal{E}'^l_c$ il existe une norme continue de sorte qu'il vérifie la condition énoncée à cette page) et p. 127 (th. 3). Toutefois nous appelons ici $\mathcal{D}_y(E)$ et $\overline{\mathcal{D}}_y(E)$ ce que nous appelions, dans Schwartz [3], $\tilde{\mathcal{D}}_y(E)$ et $\mathcal{D}_y(E)$.

Si T est dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$, son expression (1) donne le résultat avec $l \leq k$. Réciproquement, soit $L_T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^l_x ; \mathcal{D}_y)$. Alors L_T est continue de $\mathcal{D}^l_x$ dans $\mathcal{D}_y$, et comme l'injection de $\mathcal{D}_H$ dans $\mathcal{D}^l_x$ est nucléaire [10], L_T est nucléaire de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{D}_y$. Mais T est à support compact; en effet, T est dans $(\mathcal{E}'^l_c)_x(\mathcal{D}_y)$ (donc son support a une projection compacte sur X^m) et dans $\mathcal{D}_y((\mathcal{E}'^l_c)_x)$ (donc son support a une projection compacte sur Y^n); elle est donc dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$.

Proposition 2. — *Pour qu'un produit tensoriel* $R(\hat{x}) \otimes S(\hat{y})$ *soit intégralement semi-régulier en* y, *il faut et il suffit que* S *soit une fonction indéfiniment dérivable de* y.

La condition est trivialement suffisante, car alors $T \in \mathcal{D}'_x \otimes \mathcal{E}_y$, donc L_T est nucléaire de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{E}_y$.

La condition est aussi nécessaire, car si elle n'est pas réalisée, T n'est même pas semi-régulière en y : pour $u \in \mathcal{D}_x$ telle que

$$\langle R, u \rangle \neq 0, \quad u.T = \langle R, u \rangle S \notin \mathcal{E}_y.$$

Distributions semi-régulières et changements de coordonnées. — Ce que nous avons vu sur des espaces euclidiens pour des distributions s'étend sans difficulté aux courants (de première ou de deuxième espèce) sur des variétés indéfiniment différentiables [11].

$\mathcal{D}'$, espace des courants, est le dual de $\mathcal{D}$, espace des formes indéfiniment dérivables à support compact.

Soit V^{m+n} une variété à $m+n$ dimensions et supposons qu'on prenne sur cette variété un système de coordonnées (globales) $z_1, z_2, \ldots, z_{m+n}$; nous entendons par là que les fonctions z_h, $h \leq m+n$, définies globalement sur V, appliquent V, par un homéomorphisme indéfiniment différentiable ainsi que son inverse, sur un ouvert U de Z^{m+n}. Si alors nous posons

$$x_i = z_i \quad (i=1, 2, \ldots, m) \qquad \text{et} \qquad y_j = z_{j+m} \quad (j=1, 2, \ldots, n),$$

---

(10) Plus généralement, si H est un compact de R^n, K un voisinage compact de H, l'injection de $\mathcal{D}^{m+n+1}_H$ dans $\mathcal{D}^K_m$ est un opérateur nucléaire. Alors *a fortiori* l'injection composée $\mathcal{D}_H \to \mathcal{D}^{m+n+1}_H \to \mathcal{D}^m_K \to \mathcal{D}^m$ est nucléaire. *Voir* Schwartz [4], exposé 23, p. 2.

(11) *Voir* de Rham [1].

nous considérons Z^{m+n} comme produit $X^m \times Y^n$. Nous poserons

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \in X^m,$$
$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n.$$

Soit alors T un courant sur V. Nous dirons que, pour le système de coordonnées considéré, T est semi-régulier en x (resp. intégralement semi-régulier en y) si, pour tout système de deux ouverts $A \subset X^m$, $B \subset Y^n$, tels que $A \times B \subset U$, la restriction de T à $A \times B$ est un courant dont les coefficients sont des distributions semi-régulières en x (resp. intégralement semi-régulières en y). Pour un système de coordonnées donné (x, y), l'espace des courants semi-réguliers en x est donc un sous-espace de $\mathcal{D}'_{V^{m+n}}$, attaché au système de coordonnées; nous l'appellerons $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ par abus de langage (ce n'est, en effet, nullement un produit tensoriel, sauf si l'ouvert U de Z^{m+n}, image de V^{m+n} par l'application coordonnée, est un produit $A \times B$, auquel cas il est identifiable à $\mathcal{E}_A \hat{\otimes} \mathcal{D}'_B$). Sa topologie se définit comme dans Z^{m+n} de façon locale : T converge vers zéro dans $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ si, quels que soient les ouverts $A \subset X^m$, $B \subset Y^n$, tels que $A \times B \subset U$, les coefficients de T sont des distributions qui convergent vers zéro dans $\mathcal{E}_A \hat{\otimes} \mathcal{D}'_B$. De même, l'espace des courants intégralement semi-réguliers en y sur V^{m+n} est un sous-espace de $\mathcal{D}'_{V^{m+n}}$, attaché au système de coordonnées. Nous le noterons $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'_{\text{loc}}$; pour que T appartienne à cet espace, il faut et il suffit que, pour toute $\alpha \in \mathcal{D}_{x,y}$, αT soit dans le dual de $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$; et T converge vers zéro dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'_{\text{loc}}$ si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}_{V^{m+n}}$, αT converge vers zéro dans $(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y)'$ fort.

Il est bien évident qu'une telle notion est uniquement relative au système de coordonnées considéré. Cependant nous nous proposons précisément le problème suivant : que deviennent les propriétés de régularité précédentes lorsqu'on change de système de coordonnées? Le problème paraît absurde, car ces propriétés n'ont aucune raison de se conserver: nous verrons cependant qu'elles se conservent partiellement.

Proposition 3. — *Si les deux systèmes de coordonnées* (x, y) *et* (ξ, η) *sur* V^{m+n} *sont tels qu'au voisinage de tout point de* V^{m+n}, *x soit fonction* *de ξ seulement (et ξ de x seulement), alors l'espace $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ des courants (sur V^{m+n}) semi-réguliers en x, et l'espace $\mathcal{E}_\xi \hat{\otimes} \mathcal{D}'_\eta$ des courants (sur V^{m+n}) semi-réguliers en ξ, sont identiques, algébriquement et topologiquement.*

La formule de changement de coordonnées est de la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi = \Xi(x), & x = X(\xi), \\ \eta = H(x, y), & y = Y(\xi, \eta). \end{cases}$$

Les fonctions Ξ, H, sont définies dans un voisinage $A \times B$ du point considéré, A et B ouverts, $A \subset X^m$, $B \subset Y^n$; les fonctions X, Y, sont définies dans un voisinage $A_1 \times B_1$, du point considéré, A_1 et B_1 ouverts, $A_1 \subset \Xi^m$, $B_1 \subset H^n$. Il suffit naturellement de démontrer la propriété pour des courants de degré o, car l'injection de V^{m+n} dans Z^{m+n} permet de décomposer canoniquement T en somme finie de produits de courants T_λ de degré o, semi-réguliers en x, par des formes différentielles ω_λ indéfiniment différentiables (produits de formes $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m, dy_1, \ldots, dy_n$); si alors on sait que T_λ de degré o est semi-régulier en ξ, il en est de même de $\omega_\lambda T_\lambda$, puisque $\omega_\lambda \in \mathcal{E}_V$, donc aussi de T; et les propriétés topologiques se traitent de la même manière.

On peut aussi se borner à démontrer la propriété pour les courants de degré maximum $m+n$. Soit, en effet, T de degré o semi-régulier en x. Posons

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n;$$

ωT est de degré $m+n$, et semi-régulier en x. Suppons qu'on puisse en déduire qu'il est semi-régulier en ξ. Si

$$\varpi = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_m \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n,$$

on a

$$\varpi T = J \omega T,$$

J étant le jacobien de (ξ, η), par rapport à (x, y), fonction indéfiniment différentiable; donc ϖT est semi-régulier en ξ, et par suite aussi T.

Nous raisonnerons précisément sur des courants de degré $m+n$, d'espèce impaire, en dualité avec les fonctions φ ordinaires, indéfiniment dérivables à support compact. Dans tout système de coordonnées, un tel courant s'identifie à une distribution d'un espace euclidien.

Soit alors T semi-régulier en x. Exprimons-le dans le voisinage $A \times B$ du point considéré, comme une distribution $R(\hat{x}, \hat{y})$. Dans le voisinage $A_1 \times B_1$ du même point, elle s'exprime comme une distribution $S(\hat{\xi}, \hat{\eta})$. Cherchons la relation entre les deux.

Soit $\varphi(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ une fonction (forme de degré 0) de $\mathcal{D}_{A_1 \times B_1}$. Elle définit une fonction de $\mathcal{D}_{V^{m+n}}$ qui, dans $A \times B$, s'exprime par

$$\psi(x, y) = \varphi(\Xi(x), H(x, y)) \qquad (x \in A, y \in B). \tag{10}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \langle S(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta) \rangle &= \langle R(x, y), \psi(x, y) \rangle \\ &= \langle R(x, y), \varphi(\Xi(x), H(x, y)) \rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Nous supposerons A_1 et B_1 assez petits pour que $A_1 \times B_1$ corresponde à un ouvert de V^{m+n} contenu dans celui qui correspond à $A \times B$.

Si R est semi-régulière en x, on peut définir $R(x; \hat{y}) \in \mathcal{D}'_B$, et $x \to R(x; \hat{y})$ est une fonction indéfiniment dérivable de $x \in A$ à valeurs dans $\mathcal{D}'_B$. Le dernier membre de (11) s'écrit alors

$$\int_A \langle R(x; y), \varphi(\Xi(x), H(x, y)) \rangle_y \, dx \tag{12}$$

le crochet $\langle \ \rangle_y$ étant un produit scalaire entre un élément de $\mathcal{D}'_B$ et un élément de $\mathcal{D}_B$, pour $x \in A$ fixé. Effectuons dans cette intégrale le changement de variables $x = X(\xi)$: elle vaut

$$\int_{A_1} \langle R(X(\xi); y), \varphi(\xi, H(X(\xi), y)) \rangle_y \, |X'(\xi)| \, d\xi, \tag{13}$$

où $X'(\xi)$ est le déterminant jacobien $\dfrac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m}{d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_m}$.

Fixons alors ξ. Appelons $S_0(\xi; \hat{\eta})$ la distribution suivante définie sur B_1. Toute fonction $\theta \in \mathcal{D}_{B_1}$ définit une fonction $1 \otimes \theta$ sur $A_1 \times B_1$, donc en particulier une fonction sur $\{\xi\} \times B_1$; il lui correspond une fonction sur l'image de $\{\xi\} \times B_1$ dans V^{m+n} supposée contenue dans celle de $\{X(\xi)\} \times B$; cette fonction a un support compact dans $\{X(\xi)\} \times B$, et peut être prolongée par 0 là où elle n'est pas définie, de sorte qu'on peut l'identifier à une fonction sur $\{X(\xi)\} \times B$ tout entier, et par suite à une fonction sur B. Cette fonction ζ appartient à $\mathcal{D}_B$, car elle s'exprime, pour les valeurs de y pour lesquelles elle n'est pas nulle, par

$$(14) \qquad \zeta(y) = \theta(\mathrm{H}(\mathrm{X}(\xi); y)).$$

Cette expression est même valable partout dans B si nous convenons de considérer θ comme une fonction sur tout H^n en la prolongeant par o en dehors de B_1. Nous poserons

$$(15) \qquad \langle \mathrm{S}_0(\xi; \eta), \theta(\eta) \rangle_\eta = \langle \mathrm{R}(\mathrm{X}(\xi), y), \zeta(y) \rangle_y |\mathrm{X}'(\xi)|.$$

Nous avons bien défini là une distribution $\mathrm{S}_0(\xi; \hat{\eta})$, car si θ tend vers zéro dans $\mathcal{D}_{\mathrm{B}_1}$, ζ tend vers zéro dans $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$.

Par ailleurs, $\xi \to \mathrm{S}_0(\xi; \hat{\eta})$ est une fonction indéfiniment dérivable de $\xi \in \mathrm{A}_1$ à valeurs dans $\mathcal{D}'_{\mathrm{B}_1}$. En effet, pour θ fixée dans $\mathcal{D}_{\mathrm{B}_1}$, la fonction du dernier membre de (15) est une fonction numérique indéfiniment dérivable de ξ, pour les raisons suivantes :

$\xi \to \zeta(\hat{y}) = \theta(\mathrm{H}(\mathrm{X}(\xi), \hat{y}))$ est une fonction indéfiniment dérivable de ξ à valeurs dans $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$;

$\xi \to \mathrm{R}(\mathrm{X}(\xi); \hat{y})$ est fonction indéfiniment dérivable de ξ à valeurs dans $\mathcal{D}'_{\mathrm{B}}$; et $\xi \to |\mathrm{X}'(\xi)|$ est indéfiniment dérivable. Nous reverrons d'ailleurs plus loin les dérivées en ξ de (15).

Nous avons donc défini une distribution $\mathrm{S}_0(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ semi-régulière en ξ dans $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{B}_1$, donc un courant semi-régulier en ξ de degré $m+n$; or celui-ci n'est autre que $\mathrm{S}(\hat{\xi}, \hat{\eta})$, car, d'après la transformation (13) et la définition (14),

$$(16) \quad \langle \mathrm{S}(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta) \rangle_{\xi,\eta} = \int_{\mathrm{A}_1} \langle \mathrm{S}_0(\xi; \eta), \varphi(\xi, \eta) \rangle_\eta d\xi = \langle \mathrm{S}_0(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta) \rangle_{\xi,\eta}.$$

Nous avons donc bien montré que $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$ et $\mathcal{E}_\xi \hat{\otimes} \mathcal{D}'_\eta$ sont identiques en tant qu'espaces vectoriels non topologiques.

Supposons alors que T, donc $\mathrm{R}(\hat{x}, \hat{y})$, converge vers zéro dans $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$, et montrons que $\mathrm{S}(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ converge vers zéro dans

$$\mathcal{E}_\xi \hat{\otimes} \mathcal{D}'_\eta = \mathcal{E}_\xi(\mathcal{D}'_\eta).$$

Soit Δ^p_ξ une dérivation partielle en ξ dans Ξ^m. Nous devons montrer que $\Delta^p_\xi \mathrm{S}(\xi; \hat{\eta})$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}'_{\mathrm{B}_1}$, uniformément lorsque ξ parcourt un compact K_1 de A_1. Pour cela, soit $\theta(\hat{\eta}) \in \mathcal{D}_{\mathrm{B}_1}$; nous devons montrer que $\Delta_\xi^p(\langle S(\hat{\xi};\eta),\theta(\eta)\rangle_\eta)$ converge vers zéro uniformément sur K_1, et lorsque θ parcourt une partie bornée de $\mathcal{D}_{B_1}$. Mais cette expression est une combinaison linéaire finie de termes

$$(17)\qquad \langle \Delta_\xi^q R(X(\xi);y),\ \Delta_\xi^r \theta(H(X(\xi),y))\rangle_y \Delta_\xi^s |X'(\xi)|,$$

avec $q+r+s=p$, d'après la formule de Leibnitz. Or $\Delta_\xi^s|X'(\xi)|$ est borné pour $\xi\in K_1$; $\Delta_\xi^r\theta(H(X(\xi),y))$ est bornée dans $\mathcal{D}_B$ pour $\xi\in K_1$ lorsque θ reste bornée dans $\mathcal{D}_{B_1}$; et $\Delta_\xi^q R(X(\xi);\hat{y})$ est une combinaison linéaire à coefficients fonctions indéfiniment différentiables de ξ [des produits de dérivées partielles de $X(\xi)$] des valeurs pour $x=X(\xi)$ de dérivées partielles $D_x^{q'}R(x;\hat{y})$, $q'\leq q$, et alors cette expression converge vers zéro dans $\mathcal{D}'_B$ uniformément pour $\xi\in K_1$, et $x\in X(K_1)$, puisque R converge vers zéro dans $\mathcal{E}_x\hat{\otimes}\mathcal{D}'_y$; et le théorème est démontré.

Remarque. — La proposition 3 deviendrait inexacte si l'on remplaçait « semi-régulier » par « intégralement semi-régulier ».

Considérons, par exemple, le plan R^2, $m=n=1$. Dans le système d'axes (x, y), considérons le courant T de degré 2 défini par la distribution

$$(18)\qquad R(\hat{x},\hat{y})=1(\hat{x})\otimes\delta(\hat{y})\qquad\text{ou}\qquad R(x;\hat{y})=\delta(\hat{y}).$$

Il est intégralement semi-régulier en x.

Considérons maintenant n'importe quel changement de coordonnées linéaires

$$\xi=x,\qquad \eta=y-\lambda x,\qquad \lambda\neq 0.$$

Le courant reste naturellement semi-régulier en ξ d'après la proposition, mais il n'est plus intégralement semi-régulier en ξ. Il devient en effet $S(\hat{\xi},\hat{\eta})$ associé à une fonction $\xi\to S(\xi;\hat{\eta})$ à valeurs dans $\mathcal{D}'_\eta$, et définie par

$$(19)\qquad \langle S(\xi;\eta),\theta(\eta)\rangle_\eta=\langle R(x;y),\theta(y-\lambda\xi)\rangle_y=\theta(-\lambda\xi)$$

ou

$$(20)\qquad S(\xi;\hat{\eta})=\delta(\hat{\eta}+\lambda\xi).$$

Alors S, pour être intégralement semi-régulier en ξ, devrait être localement une fonction indéfiniment dérivable de ξ à valeurs dans un espace de distributions *d'ordre fini* en η (corollaire de la proposition 1).

Or ses dérivées partielles en ξ sont données par

$$\mathrm{D}_\xi^p \langle \mathrm{S}(\xi;\, \eta),\, \theta(\eta) \rangle_\eta = (-1)^p \lambda^p \mathrm{D}^p \theta(-\lambda\xi), \tag{21}$$

d'où

$$\mathrm{D}_\xi^p \mathrm{S}(\xi;\, \hat{\eta}) = \lambda^p \mathrm{D}_\eta^p \delta(\hat{\eta} + \lambda\xi) \tag{22}$$

qui, lorsque p varie, ne reste pas d'ordre borné en η.

Proposition 4. — *Si les deux systèmes de coordonnées (x, y) et (ξ, η) sur V^{m+n} sont tels qu'au voisinage de tout point de V^{m+n}, x soit fonction de ξ seulement (et ξ de x seulement), alors l'espace $\left(\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y\right)'_{\mathrm{loc}}$ des courants intégralement semi-réguliers en y, et l'espace $\left(\mathcal{E}_\xi \hat{\otimes} \mathcal{D}'_\eta\right)'_{\mathrm{loc}}$ des courants intégralement semi-réguliers en η, sont identiques, algébriquement et topologiquement.*

En effet, de l'identité $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y = \mathcal{E}_\xi \hat{\otimes} \mathcal{D}'_\eta$, on déduit l'identité de leurs duals; et comme T est intégralement semi-régulière en y ou η si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathrm{V}^{m+n}}$, $\alpha\mathrm{T}$ est dans un tel dual, la proposition est évidente. Il n'est cependant pas inutile de donner une démonstration indépendante de la proposition 4, au moins en ce qui concerne la partie non topologique. Nous le ferons pour des courants de degré o. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 3. Si T est intégralement semi-régulière en y, et si $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est choisi assez petit, on peut exprimer $\mathrm{R}(\hat{x}, \hat{y})$ par

$$\mathrm{R}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{|p| \leq k} \mathrm{D}_x^p g^p(\hat{x}, \hat{y}), \qquad \text{ou} \qquad g^p \in \mathcal{E}_x^0 \hat{\otimes} \mathcal{E}_y. \tag{23}$$

Lorsqu'on passe aux coordonnées (ξ, η), D_x^p devient un certain opérateur différentiel $\Delta_{\xi,\eta;p}$ à coefficients indéfiniment dérivables

$$\Delta_{\xi,\eta;p} = \Sigma\, \alpha_{q,r}(\hat{\xi}, \hat{\eta})\, \mathrm{D}_\xi^q \mathrm{D}_\eta^r;$$

et alors (les transformations étant les mêmes pour les courants de degré o et pour les fonctions)

$$\mathrm{S}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \sum_{|p| \leq k} \Delta_{\xi,\eta;p}[g_p(\mathrm{X}(\hat{\xi}),\, \mathrm{Y}(\hat{\xi}, \hat{\eta}))]. \tag{24}$$

Or $g_p(X(\hat{\xi}), Y(\hat{\xi}, \hat{\eta}))$ est trivialement dans $\mathcal{E}^0_\xi \hat{\otimes} \mathcal{E}_\eta$, donc intégralement semi-régulière en η; il en est de même de sa transformée par $\Delta_{\xi,\eta;p}$, donc aussi de T.

C. Q. F. D.

Remarque. — La proposition 4 serait fausse si l'on remplaçait intégralement semi-régulier par semi-régulier.

Reprenons l'exemple donné après la proposition 3. Dans le système de coordonnées ξ, η, le courant T était semi-régulier en η (et non seulement en ξ); en effet on a

$$(25) \quad \langle S(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, -\lambda\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(-\frac{\eta}{\lambda}, \eta\right) \frac{d\eta}{|\lambda|}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \delta\left(\xi + \frac{\eta}{\lambda}\right), \varphi(\xi, \eta) \right\rangle_\xi \frac{d\eta}{|\lambda|}.$$

Donc $S(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ est semi-régulier en η (mais non intégralement semi-régulier), et la distribution $S(\hat{\xi}; \eta) \in \mathcal{D}'_\xi$ est $\frac{1}{|\lambda|}\delta\left(\hat{\xi} + \frac{\eta}{\lambda}\right)$.

Or on a $x = \xi$, et cependant $R(\hat{x}, \hat{y}) = 1(x) \otimes \delta(\hat{y})$ n'est pas semi-régulier en y.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer trivialement le théorème essentiel de cet article :

Théorème. — *Si sur* V^{m+n} *deux systèmes de coordonnées* (x, y) *et* (ξ, η) *sont tels que toute surface* $\xi = \text{const.}$ *et toute surface* $y = \text{const.}$ (*de dimensions n et m respectivement*) *se coupent seulement en des points isolés, où leurs variétés tangentes sont supplémentaires, alors tout courant intégralement semi-régulier en* x *dans le système* (x, y) *est semi-régulier en* ξ *dans le système* (ξ, η).

Jusqu'à présent nous avions toujours considéré des courants semi-réguliers en x ou intégralement semi-réguliers en y pour jouer sur la dualité (aux questions de support près) entre ces espaces de courants. Nous allons maintenant au contraire conserver la même variable x, et jouer sur le fait qu'un courant intégralement semi-régulier en x est *a fortiori* semi-régulier en x.

On comprend aisément l'intervention des diverses variables grâce à l'exemple suivant : si un courant est intégralement semi-régulier en x dans le système (x, y), on ne pourra certainement pas en déduire qu'il est semi-régulier en y dans le même système [comme le montre l'exemple $1(\hat{x}) \otimes \delta(\hat{y})$ dans R^{m+n}]. Donc, si $m = n$, le système $\xi = y$, $\eta = x$, est un de ceux pour lesquels on ne doit pas pouvoir conclure; or précisément les surfaces $\xi =$ const. et $y =$ const. sont les mêmes!

La démonstration est immédiate. Les conditions de l'énoncé signifient précisément que dans un voisinage convenable de tout point de V^{m+n}, on peut prendre (ξ, y) comme système de coordonnées; en se restreignant alors à un tel voisinage, on passe du système (x, y) au système (ξ, η) par l'intermédiaire du système (ξ, y). Le courant T étant intégralement semi-régulier en x pour (x, y), est intégralement semi-régulier en ξ pour (ξ, y) (prop. 4), donc semi-régulier en ξ; alors il est semi-régulier en ξ dans (ξ, η) (prop. 3).

C. Q. F. D.

Les contre-exemples donnés après les propositions 3 et 4 montrent que, si T est seulement semi-régulier en x, on ne peut pas en déduire qu'il est semi-régulier en ξ; et que, si T est intégralement semi-régulier en x, on ne peut pas en déduire qu'il est intégralement semi-régulier en ξ.

A titre de conséquence, on en déduira par exemple que si dans un système de coordonnées un courant est intégralement semi-régulier par rapport à l'une des variables, il est semi-régulier par rapport à chacune des variables dans « presque » tous les autres systèmes de coordonnées.

Corollaire. — *Soit* V_N *une variété à* N *dimensions* $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_N)$ *un système de coordonnées,* T *un courant intégralement semi-régulier en* Z_1 *dans ce système. Alors dans tout système de coordonnées* $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N)$ *ou aucune des hypersurfaces de coordonnées* $\zeta_j =$ const. *n'est tangente à aucune « courbe des* Z_1 *»,* T *est semi-régulier par rapport à chaque variable* ζ_j *séparément.*

Prenons, en effet, $x = Z_1$ et $y = (Z_2, \ldots, Z_N)$; puis $\xi = \zeta_j$, et $\eta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_N)$. La surface $\xi =$ const. est une hypersurface de coordonnées $\zeta_j =$ const., et la surface $y =$ const. est une « courbe des Z_1 ». Elles ne sont jamais tangentes par hypothèse, donc T est bien semi-régulière en ζ_j dans le système de coordonnées (ζ).

Exemple. — Considérons un courant T de degré o invariant par le groupe de Lorentz dans R^N — o (complémentaire de l'origine dans R^N). Au voisinage de chaque point, il est de la forme

$$R(\hat{u}), \quad u = x_N^2 - \sum_{j=1}^{N-1} x_j^2 \quad ({}^{12}).$$

Au voisinage de chaque point (distinct de l'origine), on peut donc prendre un système de coordonnées locales $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N-1}, u$ et T est alors intégralement semi-régulier en $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N-1})$, puisqu'il est de la forme $1(\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \ldots, \hat{\zeta}_{N-1}) \otimes R(\hat{u})$.

Alors, si T a son support dans le cône d'ondes direct $u \geqq 0$, dans le système de coordonnées $x_1, \ldots, x_N$, il est semi-régulier par rapport à l'ensemble des N — 1 premières variables, au voisinage de chaque point (distinct de l'origine), donc dans R_N — o puisque la semi-régularité est une propriété locale; en effet, la direction d'axe des x_N n'est nulle part tangente aux hyperboloïdes $u = \text{const.} \geqq 0$. On voit comment ici on est passé d'une semi-régularité intégrale au voisinage de chaque point dans un système de coordonnées locales variable avec le point choisi, à une semi-régularité globale dans un système de coordonnées globales [12].

Remarque. — Le courant déjà vu dans R^2, $\delta(\hat{\eta} + \lambda\,\hat{\xi})$, de degré 2, défini par

$$\langle \delta(\eta + \lambda\xi), \varphi(\xi, \eta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, -\lambda\xi)\, d\xi \tag{26}$$

est semi-régulier en x pour tout système (x, y) de coordonnées linéaires dans R^2, sauf exactement quand x est proportionnel à $\eta + \lambda\xi$. Alors une combinaison linéaire finie

$$\Sigma \omega_i\, \delta(\hat{\eta} + \lambda_i \hat{\xi}) \tag{27}$$

---

[12] *Voir* MÉTHÉE [1].

est un courant semi-régulier en x pour tout système (x, y) de coordonnées linéaires, sauf exactement quand x est proportionnel à l'une des formes linéaires $\eta + \lambda_i \xi$. En remplaçant la somme finie par une série ou par une intégrale par rapport à λ (à valeurs dans $\mathcal{D}'_{R^2}$)

$$\int_\Lambda \omega(\lambda)\, \delta(\hat{\eta} + \lambda \hat{\xi})\, d\lambda, \tag{28}$$

on obtient un courant semi-régulier en x dans tout système de coordonnées linéaires (x, y), sauf exactement quand x est proportionnel à une forme linéaire $\eta + \lambda \xi$, $\lambda \in \Lambda$, où Λ est un ensemble exceptionnel pouvant présenter un très grand arbitraire.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

GROTHENDIECK :

[1] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Memoirs of the Math.. Amer. Soc.*, nº 16, 1955).

MÉTHÉE :

[1] *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz* (*Comm. Math. Helv.*, t. 28, 1954, p. 225-269).

DE RHAM :

[1] *Variétés différentiables; formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1955.

SCHWARTZ :

[1] *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1950-1951.

[2] *Théorie des noyaux* (*Proc. Intern. Congress Math.*, t. 1, 1950, p. 220-230).

[3] *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles* (*Journal d'Analyse Mathématique*, Jérusalem, 1955, p. 88-148).

[4] *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications* (Séminaire 1953-1954, Institut Henri Poincaré, Paris).