LAURENT SCHWARTZ

L'énumération transfinie et l'œuvre de M. Denjoy

Bull. Sci. Math. (2) 79 (1955), p. 78–96

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

RÉDIGÉ PAR M. Paul MONTEL
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

—

PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction*

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR G. DARBOUX ET J. HOÜEL
DE 1876 A 1886 PAR G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
DE 1886 A 1905 PAR G. DARBOUX ET J. TANNERY
DE 1905 A 1910 PAR G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY
DE 1910 A 1917 PAR G. DARBOUX ET É. PICARD
ET DE 1917 A 1930 PAR É. PICARD ET P. APPELL.

DEUXIÈME SÉRIE

TOME — ANNÉE 19
Extrait du N°

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55 Quai des Grands-Augustins, 55

19

Ce Recueil paraît chaque mois.

L'ÉNUMÉRATION TRANSFINIE ET L'ŒUVRE DE M. DENJOY;

PAR M. LAURENT SCHWARTZ.

M. Denjoy vient de publier un véritable Traité du transfini de la classe II ([1]). Toutefois son but n'est pas seulement de donner un état de nos connaissances sur les nombres transfinis. Il est aussi de les « justifier », et il faut nous reporter à des controverses passionnées d'il y a quelques dizaines d'années pour comprendre cette justification ou réhabilitation. Qu'un esprit qui rejette les nombres irrationnels (sauf une infinité dénombrable ou même seulement un nombre fini d'entre eux) rejette le transfini, rien d'étonnant. Qu'on admette la totalité des nombres réels mais qu'on refuse les ordinaux de la classe II, voilà une attitude moins cohérente et que ces livres entendent condamner. Nous reviendrons plus loin sur ces problèmes d' « existence » (qui naturellement ne se poseraient plus du tout de la même manière dans une théorie axiomatique des ensembles); mais c'est cette démonstration d'existence qui nous mènera aux représentations d'ordinaux de classe II par des nombres réels, de sorte que l'existence de ces ordinaux est identique à l'existence des nombres réels.

Il sera bon d'avoir présentes à l'esprit les applications essentielles des ordinaux en analyse. Soit, par exemple, E un ensemble fermé de la droite réelle R. On posera $E^1 = E$, puis $E^2 =$ ensemble dérivé de E^1 ou ensemble de ses points d'accumulation. Si α est un ordinal fini ou transfini, on définira E^α comme suit : si α est de première espèce, E^α est le dérivé de $E^{\alpha-1}$; s'il est de seconde espèce, E^α est l'intersection des $E^{\alpha'}$ pour $\alpha' < \alpha$. Il existe alors un ordinal α de classe I ou II tel que $E^{\alpha+1} = E^\alpha$, et à partir de là

([1]) *L'énumération transfinie*, Paris, Gauthiers-Villars, 1947-1954, 5 fasc. 16 × 25 cm, de XXXVII + 972 pages.

l'opération, en fait, s'arrête; E^{α} est parfait (vide si E est dénombrable). *Mais α est effectivement un ordinal qui peut être aussi élevé qu'on veut dans la classe* II, ce qui montre par un exemple simple l'intervention des ordinaux de classe II en analyse. La totalisation des nombres dérivés non sommables due à M. Denjoy, les classes de fonctions de Baire, autant d'exemples, plus complexes que le précédent, où le tranfini est inévitable. Des questions plus récentes (quasi-complété d'un espace vectoriel topologique) viendront aussi à l'appui du transfini. Le manuscrit de cet Ouvrage [livres I, II (2 fasc.), III, IV] était prêt en 1942; le livre I n'a pu paraître qu'en 1946, le livre II en 1952, III et IV en 1954. Le livre I débute par une bibliographie due à M. Gustave Choquet.

Livre I : *La notion de rang*; fascicule I, 206 pages. — Le chapitre I traite des ensembles ordonnés en général (ordonné signifie ici *totalement ordonné*). Deux ensembles ordonnés sont *semblables* s'il existe entre eux une correspondance biunivoque respectant l'ordre; le caractère commun à tous les ensembles ordonnés semblables à l'un d'eux est leur *type d'ordination.* Les types d'ordination peuvent être classiquement ajoutés et multipliés (Cantor). On introduit les sections commençantes et finissantes (une section commençante contient, avec tout élément, ceux qui lui sont antérieurs) et les sections moyennes (ou intervalles), le segment $S(x)$ d'un élément x (ensemble des éléments $< x$), qui seront d'un usage constant. Un ensemble ordonné E est (ordinalement) *fermé* si toute partie majorée a une borne supérieure (à l'existence près d'un élément final, il est *achevé*); tout ensemble ordonné E a une *fermeture ordinale.* Les ensembles ordonnés *linéaires* (sous-ensembles de la droite réelle R) jouent comme on sait un grand rôle, et notamment les ensembles linéaires *réguliers*, c'est-à-dire contenant tous leurs points d'accummulation (géométriques) unilatéraux. L'intérêt de tels ensembles est qu'ils permettent une classification des ensembles ordonnés « pas trop grands » : tout ensemble ayant un ensemble dénombrable (ordinalement) dense est semblable à un ensemble linéaire (th. III, p. 37), tout ensemble linéaire est semblable à un ensemble linéaire régulier (th. II, p. 35); enfin si deux ensembles linéaires réguliers H, H', sont semblables, l'application $t' = f(t)$ de H sur H' qui définit leur similitude se prolonge en une application croissante et continue de la droite R sur elle-même (p. 29). On verra au fascicule IV de nouveaux développements de ces questions (problème de Souslin).

C'est encore au chapitre I que sont définis les ensembles bien *ordonnés* (dont toute partie a un élément initial), dont l'étude approfondie constitue l'essentiel de l'Ouvrage. Les segments des ensembles bien ordonnés jouissent de propriétés remarquables, qui ont été à l'origine de leur introduction en analyse : deux segments distincts sont dissemblables, et de deux ensembles bien ordonnés dissemblables l'un est toujours semblable à un segment de l'autre. Deux éléments de deux ensembles bien ordonnés ont même *rang* si leurs segments sont semblables. Les rangs d'éléments d'ensembles bien ordonnés sont eux-mêmes bien ordonnés (on ne peut pas dire qu'il forment un « ensemble bien ordonné » comme le montrent les paradoxes connus); on peut donc les représenter par des *nombres ordinaux*, repères choisis dans une « classe » bien ordonnée (O) servant d'étalon.

Le chapitre II traite des nombres ordinaux. La suite N des entiers > 0 sera celle des ordinaux *finis* (la notion d'*ensemble fini* sera réexaminée en détail au fascicule IV). Les ordinaux non finis sont les *transfinis*. Le premier d'entre eux est ω. Les ordinaux finis forment la classe I; ceux dont le segment est dénombrable la classe II et leur ensemble est non dénombrable, sa puissance étant immédiatement supérieure à celle du dénombrable. Toutes ces notions sont classiques pour tout analyste; comme nous l'avons dit au début, on ne peut en analyse se refuser à l'usage des nombres transfinis de la classe II.

La définition des nombres ordinaux par la notion de rang n'est pas conforme à celle de Cantor. Celui-ci associait les ordinaux aux types de bonne ordination, qui forment eux-mêmes une classe bien ordonnée. Pour les nombres finis, la distinction est peu importante; si $n \in N$, c'est n qui a le $n^{\text{ième}}$ rang dans N et c'est l'ensemble $(1, 2, \ldots, n)$, de dernier élément n, qui a le $n^{\text{ième}}$ type d'ordination (d'ensemble non vide). Mais si α est transfini, la différence entre les deux conceptions est plus importante : c'est le nombre transfini α qui a le $\alpha^{\text{ième}}$ rang, tandis que c'est son segment, ne contenant pas α, qui a le $\alpha^{\text{ième}}$ type d'ordination, τ_α [1]. Bien que ce soit par les types d'ordination qu'il soit correct de définir la multiplication des ordinaux ($\tau_{\alpha\times\beta} = \tau_\alpha \times \tau_\beta$, suivant Cantor), c'est le nombre ordinal lié à la notion de rang qui intervient en analyse, et c'est lui que l'auteur adopte délibérément. La notion plus générale d'ensembles rangés (ensembles ordonnés où deux sections commençantes distinctes sont dissemblables) généralise celle d'ensembles bien ordonnés. Mais là la différence entre type de bonne ordination des sections et rang devient essentielle (à cause des sections qui ne sont pas des segments; l'ensemble des types d'ordination des sections est toujours ordinalement fermé).

C'est à la fin du chapitre II que sont donnés l'axiome de choix et le théorème de Zermelo affirmant que tout ensemble peut être bien ordonné. L'auteur ne s'étend pas longuement sur ces questions qui ont fait l'objet de tant de controverses dans toute une génération de mathématiciens. Il admet délibérément la possibilité de se servir de l'axiome de choix, comme tous les analystes modernes. De toute façon il ne s'agit pas dans ces livres de problèmes liés aux ensembles de très grande puissance; c'est autour des ordinaux transfinis de la classe II, utilisés dans des problèmes d'analyse variés, que tournent les idées qui seront développées ensuite. On reviendra sur ces questions au début du fascicule V.

A partir du chapitre III, nous pénétrons complètement dans les travaux personnels parfois les plus récents de M. Denjoy. Si un ensemble dénombrable est énuméré, ses ordinations sont canoniquement semblables à celles de l'ensemble N des entiers, appelées *permutations* de N [2]. Le but du chapitre est de chercher des représentations numériques de ces permutations, c'est-à-dire des correspondances biunivoques entre permutations et nombres réels. Une telle représentation a été donnée par Lebesgue. Celle de

---

[1] En fait cette distinction disparait si l'on convient d'admettre l'ensemble ordonné vide qui donne le premier type d'ordination. Alors, pour tout α fini ou transfini, le $\alpha^{\text{ième}}$ type d'ordination τ_α est celui du segment de α dans O.

[2] Le mot permutation n'est pas employé ici dans le sens habituel d'une permutation de N sur lui-même, mais dans le sens d'une ordination de N, changement de l'ordre naturel.

M. Denjoy est basée sur le développement népérien. Tout nombre réel x du segment fermé (o, 1) admet un *développement népérien*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \qquad (a_n \text{ entiers, } 0 \leqq a_n \leqq n-1);$$

ce développement est unique pour x irrationnel, ainsi que $x=0$ et $x=1$, double pour les autres nombres. Soit alors P une permutation de N. On va lui associer une suite a_n comme suit (il y a plusieurs autres méthodes que celle que nous donnons ici, l'auteur les passe en revue et indique leurs avantages respectifs) : si dans P l'entier n est antérieur à $1, 2, \ldots, n-1$, on prendra $a_n=0$; sinon, a_n sera celui des entiers $1, 2, \ldots, n-1$, après lequel immédiatement vient n quand on ordonne $(1, 2, \ldots, n-1, n)$ suivant P. Alors $0 \leqq a_n \leqq n-1$. On peut donc associer à P le nombre x dont le développement népérien est défini par la suite des a_n. Réciproquement à tout nombre x irrationnel est associée une permutation P unique. Cette représentation remarquablement simple est étudiée dans tous les détails. Avant tout on caractérise les développements népériens correspondant aux permutations P bien ordonnées : aucun entier a (o compris) ne se rencontre une infinité de fois parmi les a_n (ceci exprime que P a un élément initial et que tout élément non final a un conséquent); et pour toute suite n_1, n_2 avec $a_{n_2} = n_1$, n_3 avec $a_{n_3} = n_2$, ..., on cesse de rencontrer un $a_i = n_k$ avec $n_k < i < n_{k+1}$ pour k assez grand (ceci exprime que P est ordinalement fermée). Il est remarquable que si le nombre x a un développement népérien ayant cette propriété, il représente une permutation bien ordonnée donc un nombre ordinal qu'on aura ainsi désigné *sans passer par les nombres ordinaux qui le précèdent*. C'est là une idée dont il sera encore fait usage. A côté de la représentation analytique népérienne est donnée une représentation géométrique par un « *système funiculaire* », qu'il nous est impossible de détailler ici. La représentation funiculaire est plus intuitive que la représentation népérienne pour beaucoup de déductions ultérieures, et jouera un rôle heuristique; mais c'est à la représentation népérienne qu'est attaché le rôle principal.

LIVRE II : *arithmétisation du transfini*; fascicule II, 230 pages et fascicule III, 176 pages. — Soit α un ordinal de la classe II. Il y a une infinité de permutations de N ayant pour type d'ordination τ_α; à chacune d'elles correspond un nombre réel entre o et 1. Le but du livre II sera de choisir *canoniquement* (donc explicitement, sans l'axiome de choix) l'une de ces permutations P_α dont le développement népérien donnera un nombre x_α canoniquement associé à α. C'est cette correspondance entre l'ensemble des nombres ordinaux de la classe II et un ensemble de nombres réels qui constituera l'arithmétisation du transfini. On peut songer à résoudre ce problème par voie récurrente. Étant donné α indécomposable, c'est-à-dire non décomposable en somme $\alpha = \beta + \gamma$, β et $\gamma < \alpha$ (parce que le problème général se ramène sans peine à celui-là), supposons résolu le problème pour tous les $\alpha' < \alpha$; comment le résoudre pour α lui-même? On construit d'abord un procédé d'*addition des permutations* qui permet, pour toute suite P_1, P_2, ..., P_k, ... finie ou simplement infinie de permutations, d'en construire canoniquement une nouvelle P, appelée somme; elle a pour type ordinal la somme des types ordinaux des P_k. Si alors α_1, α_2, ..., α_k, ... est une suite simplement infinie d'ordinaux $< \alpha$ tendant vers α, donc aussi de somme α, pour chacun d'eux on considérera la permutation P_k canoniquement associée, puis on formera la permutation P somme des P_k, de type α; P sera associée à α. Le problème sera donc résolu pourvu qu'à chaque ordinal α indécomposable on puisse associer *canoniquement* une suite simplement infinie α_1, α_2, ..., α_k, ... d'ordinaux $< \alpha$ tendant vers α. Ce problème des *suites canoniques*, intéressant en lui-même, fera l'objet du fascicule III, tandis que le fascicule II est consacré à l'addition des permutations.

Ce fascicule II (chap. IV, Les permutations spéciales) est divisé en quatre sections. La première section traite de l'addition des permutations et de ses propriétés élémentaires. Chaque permutation définissant un type d'ordination, il n'y a aucune difficulté à définir la somme de ces types d'ordination; mais pour que l'on définisse par là une nouvelle permutation de N, il faut trouver une loi d'énumération de cette somme. Cette loi, en gros d'un type diagonal, s'obtient par la représentation funiculaire. Représentons chaque permutation P_k par son système funiculaire normal. On dispose l'ensemble de ces systèmes funiculaires suivant une certaine règle de contraction et juxtaposition, et l'on forme leur réunion; ce qu'on obtient n'est plus un système funiculaire normal mais un système funiculaire général; un tel système a une règle naturelle d'ordination et une règle naturelle d'énumération, donc définit une permutation, qui sera par définition P. Cette addition est ensuite étudiée du point de vue des développements népériens.

On étudie alors les permutations spéciales et clivées. Soit P une permutation de N. Supposons qu'elle soit ou unitaire (permutation-unité, définissant l'ordination naturelle de N). ou somme $P_1 + P_2 + \ldots + P_k + \ldots$ de permutations. Dans ce dernier cas considérons l'une quelconque d'entre elles P_k. Supposons qu'elle aussi soit ou unitaire ou somme de permutations $P_{k,1} + P_{k,2} + \ldots + P_{k,l} + \ldots$. Dans ce dernier cas, considérons encore l'une quelconque d'entre elles $P_{k,l}$. Supposons qu'elle soit ou unitaire ou somme $P_{k,l,1} + P_{k,l,2} + \ldots + P_{k,l,m} + \ldots$. Et ainsi de suite. Supposons que ce processus ne soit jamais mis en défaut. Cela veut dire que si k, l, m, ... est une suite quelconque d'entiers, ou bien on peut former sans interruption P_k, $P_{k,l}$, $P_{k,l,m}$, ... ou bien à un certain moment l'une des permutations obtenues, $P_{k,l}$ par exemple, est unitaire. On dit alors que P est une *permutation clivée*. Nous avons là une définition *antirécurrente* de la classe des permutations clivées. Dans le cas particulier où pour toute suite k, l, m, ... d'entiers, on tombe à un certain moment, par exemple avec $P_{k,l}$, sur une permutation unitaire, la permutation, si elle n'est pas unitaire, est dite *spéciale*. Les permutations spéciales sont les permutations clivées (non unitaires) bien ordonnées. Elles admettent, en même temps que leur définition antirécurrente, une définition récurrente, et même une définition globale non constructive : la classe des permutations spéciales, augmentée de la permutation unitaire, est la plus petite classe contenant la permutation unitaire et qui, avec toute suite de permutations (distinctes ou non) P_1, P_2, ..., P_k, ... contienne leur somme. Pour tout ordinal α de la forme $\alpha = \omega^2 \times \beta$, il existe une permutation spéciale de type τ_α. Toutes les permutations canoniques, qui seront associées aux ordinaux de classe II une fois connues les suites canoniques (fasc. III) seront des permutations spéciales, d'où l'intérêt de leur étude approfondie.

Pour cette étude, on est amené à définir des *formes spéciales* d'un entier $n \geqq 1$. La première forme spéciale de n est

$$f_1(k_1 \mid j_1) = \frac{(k_1 + j_1)(k_1 + j_1 - 1)}{2} + j_1 \qquad (k_1 \geqq 1, j_1 \geqq 0, k_1 + j_1 \geqq 2).$$

En remplaçant j_1 par sa première forme spéciale, on obtient la deuxième forme spéciale de n,

$$n = f_2(k_1, k_2 \mid j_2); \qquad \ldots$$

On définit ainsi des formes spéciales de n,

$$n = f_p(k_1, k_2, \ldots, k_p \mid j_p) = f_p(\mathrm{S} \mid j),$$

où S est une suite finie d'entiers $\geqq 1$. Tout entier n a ainsi $r(n)$ formes spéciales, de la forme *fictive* $f_0(\mid n)$ à la forme *majeure*, d'ordre $r(n) - 1$. Ces formes étant définies, elles vont être utilisées dans la section II pour définir une permutation clivée à partir d'une famille G de suites finies d'entiers $\geqq 1$. A chaque suite finie S d'entiers $\geqq 1$ on fera correspondre suivant certaines règles la forme spéciale $f(\mathrm{S} \mid 0)$, ou les formes spéciales $f(\mathrm{S} \mid j)$ pour $j \geqq 0$ ou $j > 0$ (p. 267). On constitue ainsi à partir de G un ensemble $\Phi(\mathrm{G})$ de formes spéciales. Si G vérifie des conditions convenables (p. 282), elle est dite déterminante, et alors l'ensemble des valeurs des formes spéciales constituant $\Phi(\mathrm{G})$ est une fois et une seule l'ensemble N. Cela fournit donc une énumération de $\Phi(\mathrm{G})$. Comme par ailleurs il existe une ordination naturelle de $\Phi(\mathrm{G})$ (lexicographique), $\Phi(\mathrm{G})$ et par suite G définit une permutation P de N. Les permutations définies par les familles déterminantes G de suites finies d'entiers $\geqq 1$ sont exactement les permutations clivées (non unitaires) (théorèmes, p. 298 et 300). Moyennant une condition B relative à G (p. 293), la *permutation* est spéciale. La section III utilise ces résultats pour former un nombre transfini de la classe II *non préconçu*, extrêmement élevé (on ne peut même pas en donner une majoration raisonnable) *sans passer par les ordinaux qui le précèdent*. Bien qu'il y ait là une grande diversité de méthodes, et qu'on aboutisse à des résultats imprévisibles (et qui contredisent des idées de Lusin sur la désignation de nombres transfinis), nous n'avons pas la place de nous y arrêter.

La section IV utilise la définition directe des permutations clivées à partir de familles G pour obtenir des propriétés de leurs développements népériens. Celui-ci en effet peut s'obtenir explicitement. Tout entier n s'écrit d'une manière unique $f_p(k_1, k_2, \ldots, k_p | j) \in \Phi(G)$. Si $j \geqq 1$, on a

$$a_n = f_p(k_1, k_2, \ldots, k_p | j-1),$$

et si $j = 0$,

$$a_n = f_p(k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}, k_{p-1} | 0).$$

De ce résultat simple on déduit une foule de propriétés, montrant la rareté des permutations clivées (et *a fortiori* des permutations spéciales) parmi toutes les permutations. Tandis que pour une permutation quelconque P, a_n peut prendre n valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, seules $r(n) \leqq \frac{\log\log n}{\log 2}$ valeurs sont possibles pour le coefficient a_n d'une permutation clivée. En outre, il y a de nombreuses relations entre les a_n pour les diverses valeurs de n. Pour n non caractéristique relativement à G (p. 385), a_n est entièrement déterminé par les a_m pour m caractéristique $< n$. A titre d'exemple, pour $n \leqq 100$, et en exceptant la permutation unité, on dispose d'une seule valeur de a_n pour 26 valeurs de n, de deux valeurs de a_n pour 53 valeurs de n, de trois valeurs de a_n pour 21 valeurs de n. L'auteur résout de nombreux problèmes asymptotiques, soucieux de montrer que non seulement les nombres de la classe II sont utilisés en analyse classique, mais qu'ils posent, par le biais des développements népériens des permutations associées, des problèmes asymptotiques qui rejoignent ceux de l'analyse classique. Enfin l'ensemble des nombres réels x figuratifs des permutations clivées non unitaires est un ensemble parfait discontinu de mesure nulle à un haut degré.

Avec le chapitre V (fasc. III) nous passons à la construction des suites canoniques, nécessaires à l'arithmétisation du transfini. Comme nous l'avons dit, il s'agit de faire correspondre canoniquement à tout nombre ordinal α de la classe II une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de nombres ordinaux $< \alpha$; si α est de première espèce c'est-à-dire admet un précédent $\alpha - 1$, la suite canonique sera par définition réduite à un seul élément $\alpha - 1$; sinon la suite canonique sera astreinte à converger vers α. Nous appellerons Φ ce problème. On le résout progressivement. La solution est poussée jusqu'à des ordinaux α de grandeur inconcevable, dépassant de beaucoup les nécessités de l'analyse courante, mais le problème n'est pas résolu complètement. Pour un ordinal α on dit que le problème (ou la suite, ou la solution du problème) est réduit, si l'on a exprimé explicitement le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite canonique de α en fonction du $n^{\text{ième}}$ terme de la suite canonique (non nécessairement connue) d'un ordinal $\alpha' < \alpha$. Alors, dans un état donné de la solution du problème Φ, situation dans laquelle nous nous placerons désormais toujours, la classe II se partage en trois sous-classes : la sous-classe des α dont la suite canonique est connue; la sous-classe R_0 des α dont la suite canonique est inconnue et non réduite; enfin la sous-classe des α dont la suite canonique est réduite à celle d'un élément de R_0. Le problème progressera toujours par une double voie : en diminuant R_0, on augmente le nombre des solutions connues et le nombre des solutions réduites. Il va être essentiel d'introduire des « *suites* » *régulières* de type τ_Ω (Ω, premier élément de la classe III) de nombres ordinaux des classes I et II. Une telle suite $S : \gamma \to \varphi(\gamma)$, est une application non décroissante de la réunion des classes I et II dans elle-même, continue pour le passage à la limite croissante : si γ est de deuxième espèce, $\varphi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma' < \gamma} \varphi(\gamma')$. On envisagera ensuite une *succession régulière* de suites régulières : pour tout $\delta < \Omega$, $S(\delta)$ sera une suite régulière $\gamma \to \varphi_\delta(\gamma)$; si δ est de première espèce, $S(\delta - 1)$ contient $S(\delta)$, mais elle n'a pas le même élément initial, $\varphi_\delta(1) > \varphi_{\delta-1}(1)$; si δ est de seconde espèce, $S(\delta)$ est la suite commune aux suites $S(\delta')$, $\delta' < \delta$. Alors les éléments initiaux des $S(\delta)$ forment une nouvelle suite régulière, $\delta \to \varphi_\delta(1)$. Les deux exemples suivants seront très importants : La *succession des itérées* d'une suite régulière S (ne commençant pas par l'élément 1) est définie par la condition d'être régulière et par les formules : $S^{(1)} = S$; et $S^{(\delta+1)} : \gamma \to \varphi^{(\delta+1)}(\gamma)$, avec $\varphi^{(\delta+1)}(\gamma) = \varphi(\varphi^{(\delta)}(\gamma))$. Par ailleurs, la suite des éléments initiaux de cette succession est par définition l'itérée d'ordre Ω de S, $S^{(\Omega)}$. Un *nœud* d'une suite régulière S est un ordinal γ tel que $\varphi(\gamma) = \gamma$. S a toujours une infinité non dénombrable de nœuds. La suite (de type τ_Ω) des nœuds de S est sa première nodale. La *succession des nodales* de S se définit par la condition d'être régulière, et par les formules : $S_1 = S$, $S_{\delta+1} =$ première nodale de S_δ. La nodale d'ordre δ n'est autre que l'itérée d'ordre ω^δ. Enfin la suite des éléments initiaux de cette succession est par définition la nodale d'ordre Ω de S, S_Ω.

Nous pouvons maintenant introduire les *suites principales* (de type τ_Ω) qui seront l'outil essentiel de la détermination des suites canoniques. Une suite principale est régulière, et possède trois caractères, (*a*) [complété par (*a''*)], (*b*), (*c*) (p. 465-478). Les caractères (*a*) et (*c*) sont statiques, relatifs à la suite elle-même ; (*b*) est de caractère récurrent, il exprime que toutes les nodales d'une suite principale sont principales, c'est-à-dire vérifient (*a*), (*a''*) et (*c*). Ces suites se définissent toujours relativement à un état donné de la solution du problème Φ. La condition (*a*), par exemple, exprime que, pour tout γ de deuxième espèce tel que $\varphi(\gamma) > \gamma$, la suite canonique de $\varphi(\gamma)$ a pour $n^{\text{ième}}$ terme $(\varphi(\gamma))_n$ l'élément $\varphi(\gamma_n)$ de rang γ_n dans la suite principale, γ_n étant le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite canonique de γ ; ainsi la suite canonique de $\varphi(\gamma)$ est réduite à celle de γ. La connaissance d'une suite principale donne donc une réduction de la suite canonique pour une large catégorie d'ordinaux, plus large que ne l'indique (*a*) car (*b*) permet d'appliquer (*a*) et (*c*) à toutes les nodales de la suite. Nous allons maintenant nous attacher à déterminer la *succession canonique des suites principales*. La première suite principale S(1) sera la suite de tous les ordinaux de classe II. Les suivantes se formeront par récurrence transfinie. Mais ce n'est pas, comme les successions précédentes, une sucession numérotée par les ordinaux de classe $\leqq$ II (c'est-à-dire de type τ_Ω), mais par des ordinaux de classe $\leqq$ III. Donnons la nature de la récurrence qui permet, pour U de classe $\leqq$ III, de définir la suite principale S(U) lorsqu'on connaît les suites principales S(U′) pour U′ < U. Si U est de première espèce, S(U) est la première nodale de S(U — 1). Si U est de deuxième espèce, il est de première catégorie s'il est limite d'une suite de type τ_ω d'éléments < U ; on forme alors la succession des suites principales $S(Z_\nu)$, $Z_\nu < U$, ayant la propriété de contenir toute suite S(U′) pour $Z_\nu < U' < U$. Cette succession est dénombrable, autrement dit les indices ν des Z_ν sont tous les ordinaux du segment d'un ordinal θ de classe II; de plus, $\lim_{\nu<\theta} Z_\nu = U$. Alors, par définition, S(U) est l'intersection des suites $S(Z_\nu)$. Il reste à donner la loi de formation de S(U) lorsque U est de deuxième catégorie, c'est-à-dire limite d'une suite de type τ_Ω d'éléments $U' < U$. On forme une succession analogue à celle des $S(Z_\nu)$, plus compliquée, de type τ_Ω, dont l'existence et l'unicité repose sur le postulat V (p. 496). S(U) est alors la suite des éléments initiaux des suites $S(Z_\nu)$. Moyennant ces choix, les seconds éléments des suites principales S(U) sont deux à deux distincts; il y a donc au plus Ω valeurs de U, les U considérés forment le segment d'un ordinal déterminé Y de la classe III. D'autre part, on en déduit que les suites canoniques de deux éléments distincts n'auront pas leurs deux premiers termes communs [3]. Cette construction de la succession canonique des suites principales repose sur 10 postulats, que nous ne pouvons énoncer ici. Cette construction étant supposée résolue, le problème Φ est-il résolu? Il l'est dans des cas d'une extrême généralité, mais il y a des cas éventuels irréductibles; si α est le second élément d'une « base de première catégorie exceptionnelle » S(U), la suite canonique n'est connue que moyennant une hypothèse D (p. 548). Ainsi la solution du problème Φ repose-t-elle sur la solution du problème de la construction de la succession canonique, d'autre part sur la véracité de l'hypothèse D. Laissons d'abord cette dernière de côté. Le pas décisif pour la construction de la succession canonique est celui de la construction de la suite (de type τ_Ω) des Z_ν pour U de deuxième catégorie. Donc, en définitive le problème Φ est subordonné à un autre problème Φ^*, qui est le même à un degré plus élevé : U étant un ordinal de classe III, construire une suite (de type τ_Ω) cononique d'ordinaux $Z_\nu < U$ tendant vers U (et satisfaisant en outre à certaines conditions). Φ^* est l' « ultraproblème » des suites « ultracanoniques ». Cette situation semble paradoxale; nous avons ramené le problème Φ à un problème en apparence plus compliqué, puisque le type τ_ω est partout remplacé par le type τ_Ω. Mais tandis que le problème Φ est relatif à *tous* les nombres de la classe II, le problème Φ^* n'est

---

(3) Un théorème que nous signalons ici, page 16, contredit ce résultat.

relatif qu'à ceux qui sont $< Y$, élément de la classe III. En fait, les deux problèmes se conditionnent mutuellement, tout progrès de l'un fait avancer l'autre. Le problème Φ^* nous a mené jusqu'à un certain élément ε^* de la classe III; ε^* est-il Y? Cette intervention de la classe III pourrait étonner pour la solution de problèmes de la clssse II. L'auteur fait *une comparaison très suggestive* avec le crible d'Eratosthène pour la recherche des nombres premiers et la décomposition d'un entier en facteurs premiers; bien que tout le problème soit posé en termes d'entiers finis, les ordinaux $< \omega^\omega$ y interviennent en fait (de façon camouflée mais certaine) puisqu'avant de poursuivre on barre successivement tous les multiples d'un même nombre premier déjà trouvé, puis tous les nombres ayant 2, puis 3, ... facteurs premiers, etc.

Finalement les méthodes exposées ici déterminent la suite canonique pour une classe si large d'ordinaux α qu'on ne voit même pas comment définir un ordinal qui échapperait à ces investigations. Mais, comme le dit l'auteur en guise de conclusion, à la fin de ce travail poussé aussi loin que l'intuition semble le permettre : « Mais n'est-il pas dans la nature du transfini que toujours la difficulté vaincue renaisse, grandement atténuée en première expérience, se révélant ensuite à l'examen plus attentif immuablement identique à elle-même. La solution que l'on croit avoir enserrée dans une trame sans fissure, ne s'évade-t-elle pas sans cesse et sans fin pour offrir au regard qui la scrute une énigme toujours renouvelée d'elle-même, toujours pareille, toujours pareillement indéchiffrée. Et dans nos patientes et minutieuses analyses faut-il uniquement voir autant de coups de sonde jetés court au-dessus d'un abîme sans fond? » (p. 585).

En fait avec le temps, c'est définitivement à une conclusion négative qu'arrivera l'auteur (*voir* fasc. IV, ici p. 17) : le procédé utilisé pour déterminer les suites canoniques ne peut pas aboutir et l'hypothèse D n'est certainement pas réalisée.

Livre III : *Études complémentaires sur l'ordination*, fascicule IV, 156 pages. — Ce fascicule contient, ainsi que le suivant, des compléments divers aux fascicules antérieurs; les plus importants sont relatifs aux ensembles finis et au problème de Souslin.

Les ensembles finis jouent, dans la nature et dans le mécanisme de la pensée, un rôle dont il est superflu de souligner l'importance. Comment « compte »-t-on un ensemble fini ? Bien que l'esprit évolué et *a fortiori* le mathématicien soit accoutumé au « cardinal » entier attaché à cet ensemble, c'est essentiellement par une ordination que se fait le dénombrement. On compte : 1, 2, 3, ... Ces nombres ne représentent pas des cardinaux ; l'objet qui est numéroté 3 dans ce dénombrement n'est pas différent en quantité de celui qui est numéroté 1, il est seulement le troisième dans l'ordination choisie. Donc 1, 2, 3, ... sont ici des ordinaux. Le nombre final trouvé, qui donne la quantité d'objets considérés, et représente par conséquent un cardinal, est donc à l'origine un ordinal. Pour vérifier, il sera commode de compter à nouveau les éléments de l'ensemble, dans un ordre différent (ce qui sera d'ailleurs automatique si l'ensemble n'a pas une configuration géométrique régulière). On doit retrouver le même cardinal. Cette identité s'interprète mathématiquement en disant que deux ordinations quelconques d'un ensemble fini sont semblables ; et il se trouve que cela caractérise les ensembles finis. On tombe ainsi sur une *définition* tout à fait naturelle des ensembles finis, d'autant plus naturelle que l'ordre est lui aussi une assise fondamentale de la pensée. *On dit qu'un ensemble est fini s'il admet au moins une ordination (ce qui est toujours vrai en admettant l'axiome de Zermelo) et si deux ordinations quelconques de l'ensemble sont semblables (i.e., il existe une application biunivoque de l'ensemble sur lui-même, amenant l'une des structures d'ordre sur l'autre).* A partir de là il faut retrouver les propriétés usuelles des ensembles finis et l'ensemble N des entiers naturels, ce qui pourra se faire de façon à la fois courte et élégante : dans toute ordination d'un ensemble fini il y a un premier et un dernier éléments et tout sous-ensemble a la même propriété ; un ensemble fini n'est semblable à aucun de ses sous-ensembles propres ; de deux ensembles finis dissemblables, l'un est semblable à un segment de l'autre ; un ensemble qui dans toute ordination a un premier élément est fini ; d'où l'on déduit que tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini (ce qui n'était nullement évident !) et toute réunion finie d'ensembles finis est finie. On introduit alors les types ordinaux des ensembles finis, qui forment un ensemble ordonné N, l'ensemble des entiers naturels, qui lui n'est pas fini.

Ces entiers peuvent être ajoutés et multipliés comme tous les ordinaux. Le principe de récurrence trouve maintenant sa place, et c'est enfin, en dernier lieu, que les cardinaux finis interviennent, et non au début comme dans d'autres définitions.

On sait qu'il y a bien d'autres définitions des ensembles finis, un Mémoire de Tarski en donne une liste dont le fascicule reproduit l'essentiel. Une définition très courante est la suivante : un ensemble est fini s'il n'est équipotent à aucun de ses sous-ensembles propres. C'est alors le cardinal qui est mis à la première place.

Passons au problème de Souslin. Un ensemble ordonné vérifie la condition de Souslin (S) si toute famille de sections (ou intervalles) disjointes est dénombrable. La conjecture de Souslin est la suivante : tout continu ordinal (ensemble ordonné, ordinalement fermé, ne contenant pas de couple de deux éléments consécutifs) vérifiant la condition (S) est semblable au continu linéaire. Conjecture élargie par Kurepa : tout ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin est semblable à un ensemble linéaire (sous-ensemble ordonné de la droite réelle R). L'auteur étudie en détail ce problème, non encore résolu.

Soit E un ensemble ordonné, dont toutes les sections seront supposées indénombrables. On introduit une certaine opération $O(s)$ relative à une section (s) de E, qui consiste à construire (de proche en proche, donc avec l'axiome de choix) une famille maximale de sections disjointes de (s) (p. 692). On applique ensuite à chacune des sections s' ainsi obtenues de nouveau l'opération $O(s')$, et ainsi de suite transfiniment, en commençant par $s = E$. Naturellement seuls les nombres transfinis de la classe II interviendront en vertu de l'hypothèse de Souslin. A chaque opération $O(s)$ on convient de ranger les intervalles de s obtenus par cette opération en une suite de type τ_ω. Soit alors $\sum$ une suite de type $< \tau_\Omega$ d'entiers naturels $n_1, n_2, \ldots$. On associe à n_1 le $n_1^{\text{ième}}$ intervalle s_1 de la première opération, $O(E)$, à n_2 le $n_2^{\text{ième}}$ intervalle s_2 de la deuxième opération, $O(s_1)$, etc. On forme ainsi une suite d'intervalles emboîtés de E $\Big($un peu comme une suite $\sum$ de type τ_ω d'entiers $\leqq 9$ détermine, par un développement décimal, une suite d'intervalles emboîtés ayant pour limite un nombre réel). En fait l'opération ne pourra pas nécessairement être poursuivie pour toute la suite $\sum$, mais seulement pour les éléments de $\sum$ majorés par un ordinal $\nu(\Sigma)$ convenable. Moyennant un postulat (p. 321) jusqu'à nouvel ordre non démontré, à savoir que tous les $\nu(\Sigma)$ de toutes les suites $\sum$ sont majorés par un nombre fixe de la classe II, la méthode précédente donne une application biunivoque ordonnée de E sur un sous-ensemble de R (grâce au théorème III de la page 37, que nous avons signalé ici p. 2), donc résout le problème de Souslin. Devant l'impossibilité de démontrer ce postulat, l'auteur indique une autre voie possible. Tout d'abord si la conjecture de Souslin est fausse, il existe un continu ordinal C dont aucune section n'est semblable à un ensemble linéaire. On construit alors une espèce U de continus ordinaux (p. 704-710), on peut donner un exemple explicite U′ de continu de l'espèce U ne vérifiant pas la condition de Souslin, et par ailleurs tout continu C dont aucune section n'est ordinalement linéaire appartient à l'espèce U; si alors on pouvait démontrer que tous les continus de l'espèce U sont semblables (donc semblables à U′) la conjecture de Souslin serait démontrée. Une tentative (utilisant une fois de plus les nombres transfinis) est essayée mais vouée elle encore à l'échec, à cause d'un théorème généralisant une proposition d'Alexandroff (p. 717) : si tout nombre X d'une suite régulière S de type τ_Ω d'éléments de classe I ou II (*voir* fasc. III, ici p. 10) on fait correspondre un satellite $x(\mathrm{X}) < \mathrm{X}$, il existe au moins un α qui est le satellite d'une infinite *non dénombrable* de nombres X. Non seulement ce théorème montre que la tentative de démontrer l'hypothèse de Souslin par une démonstration de la similitude des continus de l'espèce U est incapable d'aboutir, mais il jette des lueurs nouvelles sur la construction des suites canoniques telle qu'elle a été décrite au fascicule III et cela amène l'auteur à des conclusions délibérément négatives sur la possibilité de cette construction, comme nous l'avons indiqué page 14; en effet, si, par un procédé quelconque, fût-ce l'axiome de choix, on attribue à chaque α de classe II une suite canonique, il existe une infinité non dénombrable de α pour lesquels les deux premiers éléments de la suite canonique sont les mêmes, ce qui contredit le résultat que nous donnons ici page 12.

LIVRE IV : *Notes sur certains sujets controversés*; fascicule V, 198 pages. — Ce fascicule contient avant tout des réflexions d'ordre philosophique sur le contenu des fascicules précédents, et la théorie des ensembles en général.

La Note I porte sur l'axiome de choix et le théorème de Zermelo. L'axiome de choix (l'auteur ne pense pas qu'on puisse le démontrer valablement, mais n'admet pas qu'on puisse prouver qu'il soit contradictoire; c'est en gros l'opinion de la plupart des mathématiciens aujourd'hui) est exprimé sous une forme analogue à celle qui a été donnée par Hilbert (fonction ε de Hilbert); on introduit une fonction $a(M)$ qui à chaque ensemble M non vide fait correspondre un élément distingué de M. Cela suffit alors à donner un procédé de bonne ordination de tout ensemble E : le premier élément est $a(E)$, le deuxième $a(E-a(E))$, etc. Mais ce procédé doit être poursuivi transfiniment. On arrive par là aux nombres ordinaux et au paradoxe de Burali-Forti, qui conduit à empêcher de considérer l'« ensemble » des nombres ordinaux et à repenser les fondements des mathématiques. Les conclusions de ces réflexions sont résumées page 846, nous y renvoyons le lecteur. Disons seulement que M. Denjoy renonce à démontrer le théorème de Zermelo par les ressources normales de la logique et préfère ériger en postulat la non-contradiction de ce théorème, n'accordant pas grand crédit aux démonstrations habituelles.

Notons qu'un passage important est consacré à la formation d'une classe de nombres ordinaux *sans bien ordonner cette classe*. Ils'agit de généraliser formellement les méthodes du fascicule II (ici p. 8), qui consistaient à construire un ordinal de la classe II sans construire ceux qui le précèdent. On opère de même pour un ordinal de classe quelconque, en construisant des permutations bien ordonnées d'un ensemble type réprésentées par des développements quasi-népériens. Nous n'insisterons pas là-dessus.

La Note II est intitulée : le concevable, le définissable, l'existant parmi les nombres et les ensembles. L'auteur décrit les mécanismes par lesquels la pensée conçoit des notions de plus en plus abstraites. Du nombre entier l'esprit passe à l'ensemble N des entiers, que nous croyons nous représenter de façon plus ou moins géométrique, et qui, par la notion de passage à la limite, est à la base de toute l'analyse. Les suites, l'ensemble des nombres rationnels, les coupures et les nombres réels, l'ensemble des nombres réels et ses sous-ensembles, les fonctions, les ensembles de fonctions, autant d'étapes dans l'abstraction. L'abstraction en mathématiques modernes croît si vite que chaque génération de mathématiciens étourdit la précédente; cependant à chaque pas la difficulté est du même ordre, et finalement ce sont des représentations assez grossières qui permettent au cerveau de s'adapter. L'étude du définissable et du bien défini mène droit au paradoxe de Richard, que l'auteur étudie en détail, et dont il donne d'abord une réfutation générale, puis des réfutations particulières à chaque énoncé (variables avec la notion de « défini »). Finalement quels sont les objets en mathématiques qui peuvent être regardés comme existants? La théorie moderne des ensembles donne du « il existe » une signification purement symbolique qui ôte au mathématicien tout scrupule sur la « réalité » de cette existence. M. Denjoy ne se place pas à ce point de vue. Restant près du concret et des mécanismes de la pensée humaine, il accorde l'existence à tout nombre de la classe II, puisque celui-ci peut se réaliser (grâce aux développements népériens) par un nombre réel; mais cet ordinal est alors réalisé indépendamment de ceux qui le précèdent, de sorte que la classe II « existe » en tant qu'ensemble de nombres existants, mais qu'elle est inconcevable en tant qu'ensemble bien ordonné, et ne possède aucune sorte d'existence « réalisable ». Telle est, je crois, la conclusion de l'auteur à la fin de cet Ouvrage.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LXXIX, mai-juin 1955).