J. L. Lions
Laurent Schwartz

Problèmes aux limites sur des espaces fibrés

Acta Math., 94 (1955), p. 155-159.

PROBLÈMES AUX LIMITES SUR DES ESPACES FIBRÉS

PAR

J. L. LIONS et L. SCHWARTZ

1. Systèmes différentiels sur une variété différentiable

On désigne par X une variété indéfiniment différentiable réelle, de dimension réelle n, dénombrable à l'infini, orientée (1); C^χ désigne l'espace à χ dimensions complexes, C = corps des complexes. On désigne alors par E un espace fibré indéfiniment différentiable, de base X, à fibre vectorielle complexe de dimension complexe χ; donc E est réunion de fibres E_x, E_x isomorphe à C^χ, $x \in X$.

On a alors la notion de section indéfiniment différentiable de E (au-dessus de X) : c'est une application $x \to s(x)$, indéfiniment différentiable de X dans E, telle que $s(x) \in E_x$ pour tout $x \in X$. L'ensemble de ces sections est muni d'une structure d'espace vectoriel sur C. On désigne par $\mathcal{D}(E)$ (resp. $\mathcal{E}(E)$) l'espace des sections indéfiniment différentiables de E à support compact (resp. quelconque), muni de la topologie classique (2). Cet espace généralise l'espace $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{E}$) habituel.

On introduit ensuite *l'espace fibré dual* E^* de E; c'est l'espace fibré de base X, dont la fibre E'_x est $(E_x)^*$ (dual de E_x), muni de la structure fibrée indéfiniment différentiable habituelle.

Soit maintenant T_x l'espace vectoriel, de dimension complexe n, des vecteurs tangents complexes à X en x (un vecteur tangent complexe est une somme $u + iv$, u et v vecteurs tangents réels); la somme des T_x est munie d'une structure fibrée classique, et est appelée l'espace fibré T des vecteurs tangents. Soit T^* l'espace fibré dual.

On sait aussi qu'à deux espaces fibrés, à fibres vectorielles complexes, E et F, de même base X, on peut associer un produit tensoriel fibré, $E \otimes F$, de même base, de fibré $E_x \otimes F_x$ au dessus de $x \in X$; on peut aussi considérer les puissances extérieures

(1) Cf. DE RHAM-KODAIRA [1], STEENROD [1], CARTAN [1].

(2) Cf. SCHWARTZ [1].

fibrées $\Lambda^p E$, de fibres $\Lambda^p E_x$ au dessus de x, et ΛE, de fibre ΛE_x, somme directe des $\Lambda^p E_x$, $0 \leq p \leq n$.

Posons alors :

$$\tilde{E} = E^* \otimes \Lambda^n T^*.$$

On a :

$$\tilde{\tilde{E}} = (E^* \otimes \Lambda^n T^*)^* \otimes \Lambda^n T^* \simeq E \otimes \Lambda^n T \otimes \Lambda^n T^* \simeq E$$

car $\Lambda^n T_x \otimes \Lambda^n T_x^*$ est canoniquement isomorphe à C.

Il y a un accouplement naturel entre les éléments de $\mathcal{D}(E)$ et $\mathcal{E}(\tilde{E})$ (et entre les éléments de $\mathcal{E}(E)$ et de $\mathcal{D}(\tilde{E})$). En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ et $\tilde{\psi} \in \mathcal{E}(\tilde{E})$ (par exemple), pour tout $x \in X$ on définit un produit contracté : $\langle \varphi(x), \tilde{\psi}(x) \rangle$, élément de $\Lambda^n T^*$; la section : $x \to \langle \varphi(x), \tilde{\psi}(x) \rangle$ de $\Lambda^n T^*$ est indéfiniment différentiable à support compact, et comme une section de $\Lambda^n T^*$ n'est pas autre chose qu'une forme différentielle de degré n sur X, on peut l'intégrer sur X et poser :

$$\langle \varphi, \tilde{\psi} \rangle = \int_X \langle \varphi(x), \tilde{\psi}(x) \rangle,$$

ce qui définit l'accouplement.

On considère alors l'espace $\mathcal{D}'(E)$ des sections distributions de E, défini comme espace dual de $\mathcal{D}(\tilde{E})$, muni de la topologie forte de dual de $\mathcal{D}(\tilde{E})$; $\mathcal{D}(E)$ et $\mathcal{E}(E)$ sont contenus dans $\mathcal{D}'(E)$ et sont denses dans cet espace. De même, $\mathcal{D}'(\tilde{E})$ = espace des sections distributions de $\tilde{E}$, est défini comme espace dual de $\mathcal{D}(E)$.

On donne maintenant un espace de Hilbert V, avec :

$$\mathcal{D}(E) \subset V \subset \mathcal{D}'(E), \tag{1.1}$$

l'espace $\mathcal{D}(E)$ n'étant pas forcément dense dans V, les injections de $\mathcal{D}(E)$ dans V et de V dans $\mathcal{D}'(E)$ étant continues.

On suppose en outre donné un semi-isomorphisme (topologique) $\varphi \to \tilde{\varphi}$ de $\mathcal{D}(E)$ sur $\mathcal{D}(\tilde{E})$; on suppose donc que pour tout $\lambda \in C$ on a : $\widetilde{(\lambda \varphi)} = \bar{\lambda} \tilde{\varphi}$; on suppose également que cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme $T \to \tilde{T}$ de $\mathcal{D}'(E)$ sur $\mathcal{D}'(\tilde{E})$. On désigne alors par $\tilde{V}$ l'espace de Hilbert formé des images $\tilde{v}$ de $v \in V$, lorsque v parcourt V, par l'application $T \to \tilde{T}$, muni de la topologie transportée par cette application. On a donc : $\mathcal{D}(\tilde{E}) \subset \tilde{V} \subset \mathcal{D}'(\tilde{E})$. On suppose donné également *un espace vectoriel topologique* Q, avec :

$$\mathcal{D}(\tilde{E}) \subset \tilde{V} \subset Q \subset \mathcal{D}'(\tilde{E}), \tag{1.2}$$

chacune des injections étant continue, et $\mathcal{D}(\tilde{E})$ étant dense dans Q. On peut alors identifier l'espace dual Q' de Q à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(E)$:

(1.3) $$\mathcal{D}(E) \subset Q' \subset \mathcal{D}'(E),$$

où $\mathcal{D}(E)$ est faiblement dense dans Q'.

On donne maintenant sur V une forme sesqui-linéaire :

(1.4) $$u, v \to ((u, v)),$$

continue sur $V \times V$; soit encore :

(1.5) $$((u, v)) = ((u, v))_1 + i\,((u, v))_2$$

sa décomposition en partie hermitienne et anti-hermitienne.

Considérons alors, pour $u \in V$ et $\varphi \in (E)$ $(\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\tilde{E}))$, la forme :

$$\tilde{\varphi} \to ((u, \varphi));$$

c'est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}(\tilde{E})$, donc :

(1.6) $$((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \tilde{\varphi} \rangle,$$

où $\Lambda u \in \mathcal{D}'(E)$, ce qui définit Λ, élément de l'espace $\mathcal{L}(V; \mathcal{D}'(E))$.

On désigne alors par $\mathcal{H}$ l'espace (peut être réduit à $\{0\}$) des $u \in V$ tels que $\Lambda u \in Q'$, muni de la topologie la moins fine telle que les applications $u \to u$ et $u \to \Lambda u$ soient continues de $\mathcal{H}$ dans V et Q' respectivement. On désigne maintenant par N le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ formé des u tels que

(1.7) $$\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \text{ pour tout } v \in V\ ^{(1)}.$$

On dira, comme dans la définition de Lions [1], p. 25, que $((u, v))$ est *elliptique* s'il existe $a > 0$ tel que :

(1.8) $$((u. v))_1 \geq a \| u \|_V^2 \text{ pour tout } u \in V.$$

On démontre alors exactement comme au théorème 2.1, p. 26, le

THÉORÈME 1.1. *Si la forme* $((u, v))$ *est elliptique, l'opérateur* Λ *défini par* (1.6), *est un isomorphisme de* N *sur* Q'.

EXEMPLE.

On prend : $X = \Omega$, ouvert de R^n, et l'on prend ensuite un espace fibré trivial : $E = X \times C^\chi$. Alors E^* est identifié à E, et $\mathcal{D}(E)$ n'est autre que $(\mathcal{D}_\Omega)^\chi$, produit topologique de χ espaces égaux à $\mathcal{D}_\Omega$. De même : $\mathcal{D}'(E) = (\mathcal{D}'_\Omega)^\chi$. On retrouve alors le N° 13, Chap. I, § 1, de Lions [1].

---

(1) Le crochet désigne la dualité entre Q' et Q.

2. Application: Problèmes aux limites sur un espace de Riemann [1]

On désigne par X un espace de Riemann dénombrable à l'infini, de dimension n, orienté. On considère l'espace fibré $E = \Lambda T^*$; alors $\mathcal{D}(E)$ est l'espace des formes différentielles sur X à coefficients indéfiniment différentiables à support compact; le produit intérieur permet d'identifier $\Lambda^p T \otimes \Lambda^n T^*$ à $\Lambda^{n-p} T^*$, donc $\tilde{E}$ à E $((E^p)^\sim$ à $E^{n-p})$; $\mathcal{D}'(E)$ est l'espace des courants sur X (cf. de Rham-Kodaira [1]). Si φ est dans $\mathcal{D}(X)$, on prend :

$$\tilde{\varphi} = {}^*\varphi,$$

forme adjointe de φ. Alors :

$$\langle \varphi, \tilde{\varphi} \rangle = \int_X \varphi_\Lambda {}_* \varphi$$

définit sur $\mathcal{D}(X)$ une structure d'espace préhilbertien; on désigne par $L^2(X)$ l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{D}(X)$ pour cette structure (espace des courants de carré sommable). On considère alors l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(X)$, espace des $u \in L^2(X)$ tels que $du \in L^2(X)$ et $\partial u \in L^2(X)$; si $u, v \in \mathcal{E}^1_{L^2}(X)$, on pose :

$$(u, v)_{\mathcal{E}^1_{L^2}} = (u, v)_{L^2} + (du, dv)_{L^2} + (\partial u, \partial v)_{L^2}. \tag{2.1}$$

L'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(X)$ est alors un espace de Hilbert. On désigne par $\mathcal{D}^1_{L^2}(X)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(X)$, et on considère V, sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{L^2}(X)$, contenant $\mathcal{D}^1_{L^2}(X)$. Sur V on considère la forme sesqui-linéare :

$$((u, v)) = (du, dv)_{L^2} + (\partial u, \partial v)_{L^2} + c\,(u, v)_{L^2}, \quad c > 0, \tag{2.2}$$

forme qui est évidemment elliptique. Cette forme définit l'opérateur :

$$\Lambda = \partial d + d \partial + c. \tag{2.3}$$

L'espace N est alors l'espace des $u \in V$ tels que $\Lambda u \in L^2(X)$ et qui vérifient :

$$(\Lambda u, v)_{L^2} = ((u, v)) \text{ pour tout } v \in V, \tag{2.4}$$

et Λ est un isomorphisme de N sur $L^2(X)$.

Si par exemple $V = \mathcal{E}^1_{L^2}(X)$, *ce théorème résout le problème de Neumann relativement à Λ.*

3. Problèmes mixtes

On fait les mêmes hypothèses qu'au N° 1, en supposant en outre que Q est un espace de Banach.

---

[1] Cf. aussi la conférence de M. DE RHAM au $2^{\text{ème}}$ Colloque sur les Equations aux dérivées partielles, Bruxelles, Mai 1954, et D. C. SPENCER [1].

On donne $K \in \mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q'))$ (cf. Lions [1], p. 95) et on suppose que K admet une transformée de Laplace en t : $\hat{K}(p)$; $p \to \hat{K}(p)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\xi > \xi_K$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')$.

L'opérateur $\Lambda + \hat{K}(p)$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')$. On fait les hypothèses suivantes :

$$\text{(H 1)} \qquad \begin{cases} \Lambda + K(p) \text{ est un isomorphisme de } N \text{ sur } Q', \\ \text{d'inverse } G(p) \text{ pour tout } p \text{ avec } \xi \geq \xi_0 \geq \xi_K. \end{cases}$$

$$\text{(H 2)} \qquad \begin{cases} \text{Il existe un nombre } b \text{ tel que : } \|G(p)\|_{\mathcal{L}(Q';\, N)} \leq \exp(b\,\xi) \cdot \text{pol}(|p|), \\ \xi > \xi_0, \ \text{pol}(|p|) = \text{polynome en } |p| \text{ à coefficients positifs.} \end{cases}$$

Les démonstrations des Théorèmes du N° 2, p. 99, 100 et 101 de Lions [1] sont valables sans changement; donc :

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2) *l'opérateur* $1 \otimes \Lambda + K^*$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t, Q')$. La distribution de Green est encore calculable par transformation de Laplace en t.

Ce théorème admet les mêmes applications que celles développées dans Lions [1].

On peut appliquer ces résultats au cas du N° 2. Sont ainsi résolus de nombreux problèmes mixtes sur des espaces de Riemann.

Bibliographie

CARTAN [1]. *Séminaire E. N. S.* 1949, 1950.
LIONS [1]. Problèmes aux limites en théorie des distributions, *ces Acta*, 94 (1955).
DE RHAM-KODAIRA [1]. *Harmonic integrals.* Institute for Advanced Study, 1950.
SCHWARTZ [1]. *Théorie des distributions*, T. I et II. Paris, Hermann, 1950 et 1951.
SPENCER [1]. Heat conduction on arbitrary Riemannian Manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 39. N° 4 (1953).
STEENROD [1]. *Topology of fibre bundles.* Princeton, 1951.