LAURENT SCHWARTZ

Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques

Second colloque sur les équations aux dérivées partielles (Bruxelles, 1954), Liège: Georges Thone, 1955, p. 13-24.

Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques (*)

par M. Laurent SCHWARTZ (Paris)

1. PROBLÈMES AUX LIMITES

A. *Espaces* E, E′, V

On donne un ouvert quelconque Ω de R^n (pour simplifier; les résultats sont valables sur une variété indéfiniment différentiable). On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à valeurs complexes, à support compact, muni de la topologie de limite inductive naturelle (cf. Schwartz [5]), et par $\mathcal{D}'$ le dual de $\mathcal{D}$: espace des distributions sur Ω.

On donne ensuite un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E, avec $\mathcal{D} \subset E \subset \mathcal{D}'$, les injections de $\mathcal{D}$ dans E et E dans $\mathcal{D}'$ étant continues, et $\mathcal{D}$ étant dense dans E. Toute forme linéaire continue sur E, soit T, définit par restriction une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$, donc une distribution $\widetilde{T}$ sur Ω, $\widetilde{T} \in \mathcal{D}'$; on a donc une application canonique du dual E′ de E dans $\mathcal{D}'$, et cette application est biunivoque : si $\widetilde{T} = 0$, c'est que T est nul sur $\mathcal{D}$, donc, $\mathcal{D}$ étant dense dans E, T est nul partout, $T = 0$. On peut donc identifier E′ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$; on a $\mathcal{D} \subset E' \subset \mathcal{D}'$, les injections étant continues, et $\mathcal{D}$ étant faiblement dense dans E′. L'espace E′ est muni de la topologie de dual fort de E. Lorsque E est un espace de Hilbert (cas qui sera très fréquent dans les applications), il y a évidemment un isomorphisme canonique de E sur E′, mais nous n'identifierons pas néanmoins E et E′, sauf dans le cas où $E = L^2(\Omega) =$ espace des classes de

(*) Cet article, qui résume ma conférence, est l'exposé, non de travaux personnels, mais du chapitre Ier de la thèse de M. J. L. LIONS, intitulée *Problèmes aux limites en théorie des distributions.*

fonctions de carré sommable sur Ω pour la mesure de Lebesgue ordinaire dx (1).

On donne maintenant un espace de Hilbert V, contenu dans E, $\mathcal{D} \subset V \subset E \subset \mathcal{D}'$. L'espace V n'est pas en général muni de la topologie induite par E, même lorsque celui-ci est un espace de Hilbert; *$\mathcal{D}$ n'est pas nécessairement dense dans* V (2).

Lorsque $\mathcal{D}$ est *dense* dans V, on peut prendre $E = V$.

B. *Opérateur* D, *ellipticité*

On donne maintenant sur V une forme linéaire en u, semi-linéaire en v, continue sur $V \times V$:

$$u, v \longrightarrow ((u, v)) .$$

Si $v = \varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \longrightarrow ((u, \varphi))$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}$ (puisque la topologie de $\mathcal{D}$ est plus fine que celle induite par V), donc

$$((u, \varphi)) = \langle Du, \overline{\varphi} \rangle \tag{1-1}$$

ce qui définit $Du \in \mathcal{D}'$ et une application linéaire continue : $u \longrightarrow Du$ de V dans $\mathcal{D}'$:

$$D \in \mathcal{L}(V, \mathcal{D}') \text{ (3)}. \tag{1-2}$$

Exemple 1.1. — On prend pour V l'espace suivant : on désigne par $\mathcal{E}_{L^2}^1$ l'espace des fonctions u qui sont dans L^2 ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre 1 (au sens des distributions); on le munit de la norme dont le carré est :

$$\| u \|^2_{\mathcal{E}_{L^2}^1} = \| u \|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|^2_{L^2}$$

qui en fait un espace de Hilbert; on prend $V = \mathcal{E}_{L^2}^1$. L'espace $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}_{L^2}^1$, sauf si la frontière de Ω est de capacité nulle (cf. Gårding [2], Schwartz [7], Deny-Lions [1]). Ceci posé, pour $u, v \in \mathcal{E}_{L^2}^1$, posons :

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2} + a(u, v)_{L^2}, \qquad a = \text{constante} .$$

(1) Si $f \in L^2$, on pose comme d'ordinaire

$$\| f \|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} | f |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

De façon générale, si G est un espace de Banach, $g \in G$, on note $\|g\|_G$ la norme de g dans G.

(2) Lorsque $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans V, on n'utilise pas le dual de V, dual qui n'est pas un espace de distributions.

(3) De façon générale, si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques localement convexes, $\mathcal{L}(E ; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Si $v = \varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$((u, \varphi)) = \langle (-\Delta + a) u, \overline{\varphi} \rangle, \quad \Delta = \text{Laplacien},$$

donc $D = -\Delta + a$.

EXEMPLE 1.2. — On prend encore $V = \mathcal{E}_{L^2}^1$. On suppose qu'il existe un morceau Γ de la frontière Ω^* de Ω qui soit borné, et variété à $(n-1)$ dimensions, une fois continûment différentiable par morceaux. On sait que dans ces conditions (cf. Soboleff [9], Deny-Lions [1]) il existe une application linéaire continue et une seule, $u \rightarrow \gamma u$, de $\mathcal{E}_{L^2}^1$ dans l'espace $L^2(\Gamma)$ des classes de fonctions sur Γ de carré sommable pour la mesure superficielle ds sur Γ, telle que γu coïncide presque partout avec le prolongement par continuité sur Γ si u est continue dans $\Omega \cup \Gamma$. On prend alors sur $V \times V$:

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u , \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2} + a(u, v)_{L^2} + \int_\Gamma \gamma u \overline{\gamma v} ds .$$

Si $v = \varphi \in \mathcal{D}$, on a, puisque $\gamma\varphi = 0$,

$$((u, \varphi)) = \langle (-\Delta + a) u, \overline{\varphi} \rangle .$$

Les deux exemples précédents montrent que *deux formes* $((u, v))$ *distinctes peuvent définir le même opérateur* D.

DÉFINITION 1.1. — La forme $((u, v))$ étant donnée, l'opérateur D [4] donné par (1-1) sera dit *l'opérateur défini par* $((u, v))$, et si l'on donne un opérateur D et une forme $((u, v))$, avec (1-1), la forme $((u, v))$ est dite *attachée* à D.

On notera que la donnée de $((u, v))$ est *plus* que la donnée de D.

Il est utile de décomposer $((u, v))$ en « partie hermitienne » et « partie antihermitienne » ; on pose :

$$((u, v))_1 = \frac{1}{2} \left(((u, v)) + \overline{((v, u))} \right)$$

et

$$((u, v))_2 = \frac{1}{2i} \left(((u, v)) - \overline{((v, u))} \right) .$$

Alors :

$$((u, v)) = ((u, v))_1 + i ((u, v))_2 .$$

La forme $((u, v))_k$ $(k = 1, 2)$ définit D_k, élément de $\mathcal{L}(V ; \mathcal{D}')$; on a :

$$D = D_1 + iD_2 .$$

(4) D sera dans la pratique un opérateur différentiel.

On peut alors poser l'importante définition :

DÉFINITION 1.2. — La forme $((u, v))$ est *elliptique* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout u dans V, on ait :

$$((u, u))_1 \geqq \alpha \| u \|_V^2 . \tag{1-3}$$

On dira également, si (1-3) a lieu, que D, défini par $((u, v))$ *est* $((u,v))$ *elliptique.*

C. *Espaces* $\mathcal{H}$ *et* N

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions $u \in V$ telles que Du soit dans E′, muni de la topologie la moins fine qui rende continues les applications $u \longrightarrow u$ et $u \longrightarrow Du$ de $\mathcal{H}$ dans V et E′ respectivement; c'est un espace de Banach si E (donc E′) est un espace de Banach. On notera que, *a priori*, l'espace $\mathcal{H}$ peut être réduit à $\{0\}$; on verra qu'il n'en est rien.

On désigne par N le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des u telles que l'on ait :

$$\langle Du, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \tag{1-4}$$

pour tout $v \in V$, le premier crochet désignant la dualité entre E′ et E. L'espace N est muni de la topologie induite par $\mathcal{H}$; c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$. L'espace N n'est pas réduit à $\{0\}$, comme on verra.

Si $\mathcal{D}$ est dense dans V, on prend $E = V$; on a (1-4) pour tout $v = \varphi \in \mathcal{D}$ (par définition de D), et par passage à la limite, on voit que (1-4) est toujours vrai, donc : si $\mathcal{D}$ est dense dans V, alors $\mathcal{H} = N$.

Si $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans V, on n'a pas en général (1-4) pour $u \in \mathcal{H}$ et $v \in V$ (c'est visible dans le cas des exemples 1.1 et 1.2). On pose alors :

$$\langle Du, \bar{v} \rangle - ((u, v)) = R(u, v),\ u \in \mathcal{H},\ v \in V . \tag{1-5}$$

On peut dire que cette formule est une *formule de Green*. Dire que u est dans N, c'est dire que $R(u, v) = 0$ pout tout $v \in V$, donc que certaines conditions au contour sont vérifiées par u.

D. *Problèmes aux limites*

On désigne par $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ un espace vectoriel topologique tel que pour tout $u \in \mathcal{K}$, Du soit défini et soit dans E′, de sorte que D soit élément de $\mathcal{L}(\mathcal{K}\,;\,E')$. On peut prendre $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ mais il est souvent possible de prendre pour $\mathcal{K}$ un espace plus grand que $\mathcal{H}$; on supposera alors que l'injection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ est continue, et que D, défini sur $\mathcal{K}$, soit un prolongement de D, défini sur $\mathcal{H}$. Exemple : si $D = -\Delta + a$, $V = \mathcal{E}_{L^2}^1$,

$E = L^2 (= E')$, on prend pour $\mathcal{K}$ l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'$ telles que $(-\Delta + a)T$ soit dans L^2, muni de la topologie la moins fine, telle que les applications $T \longrightarrow T$ et $T \longrightarrow (-\Delta + a)T$ soient continues de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{D}'$ et E' ; cet espace contient strictement l'espace $\mathcal{H}$ qui est l'espace des $u \in \mathcal{E}_{L^2}^1$, tels que $\Delta u \in L^2$.

On peut maintenant poser le

Problème 1.1. — Trouver U dans $\mathcal{K}$ solution de

$$DU = F, \tag{1-6}$$

où F est donné dans E', avec les *conditions aux limites* :

$$h - U \in N, \tag{1-7}$$

où h est donné par $\mathcal{K}$.

La condition (1-7) signifie que U a le même comportement au contour que h, au sens défini par N. Il s'agit bien de conditions aux limites.

On voit donc que, une fois $((u, v))$ donné, le problème 1.1 est déterminé ([5]). Pratiquement, les problèmes aux limites se posent en sens inverse : il faudra trouver la forme $((u, v))$ (ou la formule de Green) adaptée au problème proposé.

Le problème 1.1 se ramène aussitôt à la forme réduite suivante (en posant $u = h - U$) :

Problème 1.2. — Trouver u dans N, solution de

$$Du = f, \tag{1-8}$$

où f est donné dans E' (par $f = Dh - F$).

2. Théorème fondamental

On va maintenant montrer le

Théorème 2.1. — *Si l'opérateur* D *est* $((u, v))$*-elliptique, l'opérateur* D *est un isomorphisme de* N *sur* E' ([6]).

Démonstration :

1° Soit f donné dans E' ; on cherche u dans N solution de

$$Du = f. \tag{2-1}$$

Si u est solution de (2-1) alors pour tout v dans V on a :

$$((u, v)) = \langle f, \bar{v} \rangle. \tag{2-2}$$

([5]) Sauf peut-être $\mathcal{K}$, non complètement déterminé, mais ceci est secondaire.

([6]) Ce théorème montre que N (donc *a fortiori* $\mathcal{H}$) n'est pas réduit à $\{0\}$.

Réciproquement *soit* u *dans* V vérifiant (2-2) pour tout $v \in$ V. Alors ceci a en particulier lieu pour $v = \varphi \in \mathcal{D}$; or

$$((u, \varphi)) = \langle \mathrm{D}u, \bar{\varphi} \rangle$$

donc (2-2) entraîne : $\mathrm{D}u = f$, donc u est dans $\mathcal{H}$. Mais alors

$$\langle \mathrm{D}u, \bar{v} \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in \mathrm{V} ,$$

donc u est dans N. Donc tout revient à résoudre (2-2).

2° Pour f fixé dans E′, $v \longrightarrow \langle f, \bar{v} \rangle$ est une forme semi-linéaire continue sur V, donc $((u, v))_1$ définissant sur V un produit scalaire de norme correspondante équivalente à $\|u\|_{\mathrm{V}}$ (hypothèse d'ellipticité), on a :

$$\langle f, \bar{v} \rangle = ((\mathrm{J}f, v))_1 \tag{2-3}$$

ce qui définit J élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E}' ; \mathrm{V})$.

De même pour u fixé dans V, $v \longrightarrow ((u, v))_2$ est une forme semi-linéaire continue sur V, donc :

$$((u, v))_2 = ((\mathrm{H}u, v))_1 , \tag{2-4}$$

ce qui définit H élément de $\mathcal{L}(\mathrm{V} ; \mathrm{V})$, opérateur hermitien pour la structure $((u, v))_1$.

Avec ces définitions, l'équation (2-2), c'est-à-dire :

$$((u, v))_1 + i((u, v))_2 = \langle f, \bar{v} \rangle ,$$

s'écrit :

$$((u, v))_1 + i((\mathrm{H}u, v))_1 = ((\mathrm{J}f, v))_1 , \quad \text{pour tout } v \in \mathrm{V} ,$$

ce qui est équivalent à :

$$(1 + i\mathrm{H})u = \mathrm{J}f , \tag{2-5}$$

équation dans V.

Comme H est hermitien, $(1 + i\mathrm{H})$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{V} ; \mathrm{V})$, et (2-1) qui équivaut à (2-5) admet donc une solution unique :

$$u = \mathrm{G}f , \tag{2-6}$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{G} = (1 + i\mathrm{H})^{-1} \mathrm{J} . \tag{2-7}$$

La formule (2-7) définit *a priori* un élément de l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E}' ; \mathrm{V})$ et par le 1°, G opère linéairement de E′ dans N. Il est continu car si f tend vers 0 dans E′, $u = \mathrm{G}f$ tend vers 0 dans V et $Du = f$ tend vers 0 dans E′, donc u tend vers 0 dans N ; on a donc :

$$G \in \mathcal{L}(E' ; N)\,, \tag{2-8}$$

et le théorème est complètement démontré.

On a les relations :

$$G \cdot D = 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}(N ; N) \tag{2-9}$$

et

$$D \cdot G = 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}(E' ; E')\,. \tag{2-10}$$

Notons également que $G \cdot D = P$ est un *projecteur* de $\mathcal{K}$ sur N. Le noyau de P (7) est l'espace $D^{-1}(0) \cap \mathcal{K}$: $G \cdot Du = 0$ équivaut en effet à $Du = 0$. Donc $\mathcal{K}$ est somme directe topologique de $D^{-1}(0) \cap \mathcal{K}$ et de N. Lorsque D est fixe et les conditions aux limites variables (c'est-à-dire $((u, v))$ variable) alors $D^{-1}(0) \cap \mathcal{K}$ est fixe, et N est un supplémentaire variable. L'opérateur $G \in \mathcal{L}(E' ; N)$ dépend de N.

On dira que G *est l'opérateur de Green de* D *relativement aux conditions aux limites* N. L'opérateur D définit un homomorphisme (topologique) de $\mathcal{K}$ sur E′ ; restreint à un supplémentaire du noyau, c'est un isomorphisme topologique, d'inverse G.

L'opérateur G résout évidemment le problème 1.1 :

Corollaire 2.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *le problème* 1.1 *admet une solution unique :*

$$U = h - GDh + GF\,,$$

solution qui dépend continûment des données.

Remarque 2.1. — La fonction $h - GDh$ ne dépend que de la classe correpondant à h, soit $h^\bullet$, dans d'espace quotient $\mathcal{K}/N$. En effet si h est dans N, $h - GDh$ est nul.

Remarque 2.2. — A l'opérateur de Green G correspond *un noyau distribution et un seul* sur l'espace $\Omega_x \times \Omega_y$ (cf. Schwartz [6]), soit $G_{x,y} \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$. C'est *le noyau de Green de* D (toujours relativement à N). Si f est dans E′, on peut écrire, si $\mathcal{D}$ est dense dans E′ :

$$Gf_x = \int_\Omega G_{x,y} f(y)\,dy \text{ (8)}\,.$$

Pour l'étude de la *régularité* du noyau $G_{x,y}$, voir Schwartz [7] et Lions [4].

On n'étudie pas non plus ici la *stabilité* de G (pour D

(7) C'est-à-dire l'ensemble des $u \in \mathcal{K}$ tels que $P \cdot u = 0$.

(8) On met les indices en bas pour rappeler qu'il s'agit de distributions et non de fonctions.

variable), ni les cas de *complète continuité* permettant d'appliquer la théorie de F. Riesz (cf. Lions [4]).

3. Exemples divers

Pour simplifier on se borne à l'étude des problèmes aux limites relatifs à l'opérateur $D = -\Delta + a$, $a > 0$. (Cf. exemples 1.1 et 1.2.) On rappelle que l'on a désigné par $\mathcal{E}_{L^2}^1$ l'espace des $u \in L^2$ tels que $\frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^2$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, avec la norme donnée dans l'exemple 1.1. Pour u et v dans $\mathcal{E}_{L^2}^1$, on pose pour simplifier l'écriture :

$$(u, v)_{-\Delta+a} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2} + a(u, v)_{L^2}.$$

On désigne par $\mathcal{D}_{L^2}^1$ l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}_{L^2}^1$.

Exemple 3.1. — On prend

$$V = \mathcal{D}_{L^2}^1, \quad ((u, v)) = (u, v)_{-\Delta+a}$$

qui est un produit scalaire attaché à D, et pour lequel D est elliptique (9). On désigne par $\mathcal{D}_{L^2}^{\prime 1}$ l'espace dual de $\mathcal{D}_{L^2}^1$; c'est l'espace des distributions sur Ω qui sont sommes de dérivées d'ordre $\leqslant 1$ de fonctions $\in L^2$; D est dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{L^2}^1 ; \mathcal{D}_{L^2}^{\prime 1})$. On prend $E = \mathcal{D}_{L^2}^1$, alors $\mathcal{H} = V$, et $N = \mathcal{H} = V$. Donc : $-\Delta + a$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}_{L^2}^1$ *sur* $\mathcal{D}_{L^2}^{\prime 1}$.

La condition $u \in N$, c'est-à-dire $u \in \mathcal{D}_{L^2}^1$, signifie que u est « nulle » sur Ω^*, frontière de Ω (pour le sens précis à donner au mot « nulle » voir Deny-Lions [1]). Le problème aux limites 1.1 est alors le *problème de Dirichlet* ; la méthode présente n'est autre alors que la méthode de Gårding (cf. Gårding [2] et Schwartz [7]).

Exemple 3.2. — On prend

$$V = \mathcal{E}_{L^2}^1, \quad \text{et} \quad ((u, v)) = (u, v)_{-\Delta+a},$$

(9) Si Ω est borné, on a :

$$c \| u \|_{L^2}^2 \leqq \| u \|_1^2, \qquad c = \text{constante},$$

$c =$ constante,

$$\| u \|_1 = \left(\sum \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(cf. Gårding [2]), on peut donc prendre $a > -c$.

produit scalaire attaché à D et pour lequel D est elliptique. On prend $E = L^2 (= E')$. Dire que u est dans $\mathcal{H}$ signifie :

$$u \in \mathcal{E}_{L^2}^1 \quad \text{et} \quad \Delta u \in L^2 ; u \in N$$

signifie que u est dans $\mathcal{H}$ et qu'en outre :

$$(-\Delta u, v)_{L^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2} \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{E}_{L^2}^1 ,$$

donc (tout au moins formellement) que $\frac{\partial}{\partial n} u = 0$ sur Ω^*, $\frac{\partial}{\partial n} u$ désignant la dérivée normale. D'après le théorème 2.1, $-\Delta + a$ *est un isomorphisme de* N *sur* L^2 *et le problème* 1.1 *est le problème de Neumann.*

EXEMPLE 3.3. — Soit Γ un ensemble fermé contenu dans Ω^*, de capacité strictement positive. On désigne par $(\mathcal{D}_{L^2}^1)_\Gamma$ l'adhérence dans $\mathcal{E}_{L^2}^1$ de l'espace des fonctions u, de $\mathcal{E}_{L^2}^1$, identiquement nulles dans un voisinage (variable) de Γ. On prend $V = (\mathcal{D}_{L^2}^1)_\Gamma$ et $E = L^2$. La condition pour u élément de V, avec $\Delta u \in L^2$ d'être dans N signifie donc :

a) u est « nul » sur Γ ;

b) $\frac{\partial}{\partial n} u = 0$ sur le reste de la frontière.

L'opérateur $-\Delta + a$ *est toujours un isomorphisme de* N *sur* L^2, et le problème 1.1 revient à trouver U, élément de $\mathcal{H}$, avec : U donné sur Γ, $\frac{\partial}{\partial n}$ U donné sur le reste de la frontière.

C'est *un problème aux limites de type mêlé* (terminologie de M. Hadamard).

EXEMPLE 3.4 — On prend $V = \mathcal{E}_{L^2}^1$, mais on va cette fois prendre un produit scalaire sur V différent de celui de l'exemple 3.2 et néanmoins attaché à D (généralisation de l'exemple 1.1).

On suppose que Ω a une frontière Ω^* qui est une variété à $n-1$ dimensions, une fois continûment différentiable, bornée. On montre alors (cf. Soboleff [9] et Deny-Lions [1]) que u peut être prolongée sur Ω^* en une fonction u^*, élément de $L^2(\Omega^*)$ (pour la mesure superficielle sur Ω^*), l'application $u \to u^*$ étant continue de $\mathcal{E}_{L^2}^1$ dans $L^2(\Omega^*)$ et u^* coïncidant avec le prolongement naturel de u si u est continue dans $\overline{\Omega}$.

Ceci posé, soit K un élément de l'espace

$$\mathcal{L}(L^2(\Omega^*) ; L^2(\Omega^*))$$

que l'on suppose opérateur *hermitien positif*. On pose alors :

$$((u, v)) = (u, v)_{-\Delta+a} + (Ku^*, v^*)_{L^2(\Omega^*)} .$$

On a là un produit scalaire sur $\mathcal{E}_{L^2}^1$, qui est *attaché* à $D = -\Delta + a$ (car $(Ku^*, v^*)_{L^2(\Omega^*)} = 0$ si $v = \varphi \in \mathcal{D}$) et comme K est positif, on a bien la condition d'ellipticité (1-3). Donc $-\Delta + a$ *est un isomorphisme de* N *sur* L^2. Soit u élément de $\mathcal{E}_{L^2}^1$ avec $\Delta u \in L^2$; la condition $n \in N$ signifie :

$$\int_{\Omega^*} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{v} dx^* = (Ku^*, v^*)_{L^2(\Omega^*)} \text{ pour tout } v \in \mathcal{E}_{L^2}^1 ,$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial n} u = K \cdot u^* . \tag{3-1}$$

Exemples :

a) Soient *s*, *t* des points sur Ω^*, et

$$Ku^* = \int_{\Omega^*} K(s, t) u(t) dt ,$$

$K(s, t)$ étant un noyau continu défini positif sur $\Omega_s \times \Omega_t$, dt = mesure superficielle sur Ω. Alors (3-1) signifie :

$$\frac{\partial}{\partial n} u(s) = \int_{\Omega^*} K(s, t) u(t)\, dt \text{ (10)} .$$

b) Supposons maintenant que K soit opérateur de multiplication par une fonction (encore notée K), élément de $L^\infty(\Omega^*)$ (c'est-à-dire fonction mesurable, essentiellement bornée), supposée positive presque partout sur Ω^*. Alors (3-1) signifie :

$$\frac{\partial}{\partial n} u(s) = K(s) u(s), \quad s \in \Omega^* \text{ (11)}.$$

Exemple 3.5. — On désigne cette fois par Ω un ouvert contenu dans un espace de Riemann indéfiniment différentiable, par $\mathcal{D}$ l'espace des formes indéfiniment différentiables sur Ω à support compact, par $\mathcal{D}'$ l'espace dual des courants sur Ω (cf. par ex. la conférence de M. de Rham). Si α et $\beta \in \mathcal{D}$ on pose :

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int \alpha \wedge *\beta ,$$

ce qui munit $\mathcal{D}$ d'une structure préhilbertienne; on désigne

(10) Cette condition n'est pas locale.
(11) Condition locale cette fois.

par L^2 l'espace de Hilbert complété : c'est l'espace des formes de carré sommable sur Ω.

On considère l'opérateur

$$D = \Delta + a\,, \qquad \Delta = d\partial + \partial d\,, \qquad a > 0$$

(si Ω est un ouvert de R^n, le Δ actuel est égal à l'opposé du laplacien ordinaire). On prend pour V l'espace des $u \in L^2$ tels que $du \in L^2$ et $\partial u \in L^2$, muni du produit scalaire :

$$(u, v)_V = (u, v)_{L^2} + (du, dv)_{L^2} + (\partial u, \partial v)_{L^2}\,.$$

On prend :

$$((u, v)) = a(u, v)_{L^2} + (du, dv)_{L^2} + (\partial u, \partial v)_{L^2}\,.$$

On obtient ainsi un produit scalaire attaché à $\Delta + a$, et $u \in N$ signifie :

$$u \in V\,, \quad \Delta u \in L^2$$

et

$$(\Delta u, v)_{L^2} = (du, dv)_{L^2} + (\partial u, \partial v)_{L^2} \quad \text{pour tout } v \in V\,.$$

On a alors le résultat : $\Delta + a$ *est un isomorphisme de* N *sur* L^2. Le problème aux limites correspondant sera le problème de Neumann.

EXEMPLE 3.6. — On suppose que Ω est un ouvert de R^n de frontière $\Omega^* =$ une variété à $n-1$ dimensions indéfiniment différentiable. Toute fonction $u \in \mathcal{E}_{L^2}^1$ admet un prolongement u^* sur Ω^*, localement de carré sommable sur Ω^* pour la mesure superficielle ([12]). Sur la variété Ω^* on désigne par $\mathcal{D}^*$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, par $\mathcal{D}'^*$ l'espace dual, etc.

On désigne par $((u^*, v^*))_1^*$ une forme sur $V^* \times V^*$ et par $D^* \in \mathcal{L}(V^*\,; \mathcal{D}'^*)$ l'opérateur attaché à cette forme.

Ceci posé (on considère toujours des problèmes aux limites relatifs à $-\Delta + a$) on prend pour V l'espace des fonctions $u \in \mathcal{E}_{L^2}^1$ telles que $u^* \in V^*$ (cet espace contient $\mathcal{D}$), que l'on munit du produit scalaire :

$$(u, v)_V = (u, v)_{\mathcal{E}_{L^2}^1} + (u^*, v^*)_{V^*}.$$

On pose ensuite :

$$((u, v))_1 = (u, v)_{-\Delta + a} + ((u^*, v^*))_1^*$$

([12]) Si Ω^* est non borné, on a seulement un résultat local, à moins d'introduire des hypothèses supplémentaires sur Ω^*.

et

$$((u, v))_2 = ((u^*, v^*))_2^*\,;\ ((u, v)) = ((u, v))_1 + i((u, v))_2$$

est attaché à $-\Delta + a$.

On fait l'hypothèse que D* est $((u^*, v^*))^*$-elliptique, c'est-à-dire :

$$((u^*, u^*))_1^* \geqq c \| u^* \|_{V^*}^2,\ u^* \in V^*,\ c > 0\,. \qquad (3\text{-}2)$$

Il en résulte qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$((u, u))_1 \geqq c \| u \|_V^2 \quad \text{pour tout } u \in V\,.$$

L'espace N est l'espace des $u \in V$ tels que $\Delta u \in L^2$ et qui vérifient :

$$(-\Delta u, v)_{L^2} = (u, v)_{-\Delta} + ((u^*, v^*))_1^* \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{E}_{L^2}^1\,,$$

c'est-à-dire formellement telles que :

$$\frac{\partial}{\partial n} u = D^* u^* \quad \text{sur } \Omega^*\,.$$

Du théorème 2.1 résulte que $-\Delta + a$, $a > 0$, *est un isomorphisme de* N *sur* L^2. Le problème aux limites correspondant revient *à se donner* $\frac{\partial}{\partial n} U - D^*U^*$ *sur* Ω^*.

Des problèmes aux limites analogues peuvent être résolus pour des opérateurs plus généraux que $-\Delta + a$ (13) du type de ceux introduits par Lions [4]. On obtient ainsi une généralisation et une simplification des résultats de Shapiro [8].

Bibliographie

[1] Deny-Lions, *Les espaces du type de Beppo-Levi* (*Annales Institut Fourier*, 5, années 1953-1954, pp. 304, 370).
[2] Gårding, *Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations* (*Math. Scand.*, 1, 1953, pp. 55, 72).
[3] Lions, *Problèmes aux limites* (I : *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 236, p. 2373 et II : t. 236, p. 2470).
[4] Lions, Thèse, à paraître aux *Acta Math.*
[5] Schwartz, *Théorie des distributions*, t. I et II, Paris, Hermann, 1950, 1951.
[6] Schwartz, *Théorie des noyaux* (*Proceedings of the International Congress of Math.*, vol. I, 1950, pp. 220, 230).
[7] Schwartz, *Les travaux de Gårding sur le problème de Dirichlet* (*Sém. Bourbaki*, mai 1952).
[8] Shapiro, *Sur des problèmes aux limites généraux pour des équations de type elliptique* (*Isvest. Akad. CCCP.*, 17, 1953, pp. 539, 562).
[9] Sobolfff, *Applications de l'analyse fonctionnelle à la Physique mathématique*, Léningrad, 1950.

(13) Cette remarque vaut pour tous les exemples.