Laurent Schwartz

Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions

C. R. Acad. Sci. Paris, 239 (1954), p. 847-848.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*. Note (*) de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Jacques Hadamard.

On sait que la multiplication de deux distributions arbitraires est impossible. Or les physiciens désireraient utiliser des produits tels que $\delta\delta$, $\delta\delta'$.... Nous allons montrer qu'on ne peut, dans aucune théorie, avoir à la fois une multiplication, une dérivation, et un élément δ.

LEMME 1. — *Soit* E *un espace vectoriel sur le corps des nombres réels, dont un sous-espace vectoriel soit l'espace* F_0 *des fonctions réelles continues d'une variable réelle. Il n'existe pas de multiplication partout définie sur* E, *opération bilinéaire associative (non nécessairement commutative), coïncidant sur* F_0 *avec la multiplication usuelle, admettant la fonction* 1 *comme élément unité, et telle qu'en outre existent deux éléments* x^{-1} *et* δ *vérifiant :*

$$x^{-1}x = 1; \qquad x\delta = 0; \qquad \delta \neq 0. \tag{1}$$

En effet on en déduirait $0 = x^{-1}(x\delta) = (x^{-1}x)\delta = \delta$, en contradiction avec les hypothèses.

LEMME 2. — *Soit* E *est un espace vectoriel contenant* F_0, *muni d'une multiplication, opération bilinéaire associative induisant sur* F *la multiplication usuelle et admettant la fonction* 1 *pour unité, et d'une dérivation* D, *opération linéaire coïncidant avec la dérivation usuelle sur le sous-espace* F_1 *de* F_0 *constitué par les fonctions continuement différentiables, et satisfaisant à la règle de dérivation du produit*

$$D(XY) = (DX)Y + X(DY). \tag{2}$$

Alors l'élément $D^2 f$, *où* f *est la fonction* $x(\log|x| - 1)$, *est un inverse de* x :

$$(D^2 f)\, x = x(D^2 f) = 1. \tag{3}$$

(*) Séance du 27 septembre 1954.

[Remarquons qu'en théorie des distributions [1], $Df = \log|x|$, et $D^2 f = vp(1/x)$].
En effet D satisfait non seulement à la formule (2) mais à la formule plus générale de Leibnitz :

$$D^m(XY) = \sum_{n \leq m} \binom{m}{n} D^n X\, D^{m-n} Y. \tag{4}$$

On a en particulier

$$(D^2 f)\, x = D^2(fx) - 2DfDx - fD^2x = D^2(fx) - 2Df. \tag{5}$$

Mais fx est une fonction continûment différentiable, donc $D(fx)$ est la dérivée usuelle $2f + x$, donc $D^2(fx) = 2Df + 1$, donc (5) entraîne (3).

THÉORÈME. — *Dans un espace vectoriel* $E \supset F$, *muni d'une multiplication et d'une dérivation vérifiant les conditions indiquées dans le lemme* 2, *il n'existe pas d'élément* $\delta \neq 0$ *vérifiant* $x\delta = 0$.

En effet, en posant $x^{-1} = D^2 f$, avec $f = x(\log|x| - 1)$, il suffit d'appliquer le lemme 1 en tenant compte de (3).

Remarque. — Dans E, on a

$$x(D^2|x|) = 0. \tag{6}$$

(Dans la théorie des distributions, $D^2|x| = 2\delta$). En effet, en appliquant la formule de Leibnitz

$$x(D^2|x|) = D^2(x|x|) - 2D|x|. \tag{7}$$

Mais $x|x|$ est continûment différentiable, donc $D(x|x|) = 2|x|$, et $D^2(x|x|) = 2D|x|$, donc (7) donne (6). Le théorème montre donc que dans E on a nécessairement $D^2|x| = 0$. Ainsi $|x|$ est un élément de dérivée seconde nulle, et qui n'est cependant pas un polynome de degré ≤ 1 ; d'où

COROLLAIRE. — *Dans* E *il existe un élément de dérivée nulle qui n'est pas une fonction constante.*

Sans quoi en effet tout élément de dérivée seconde nulle serait une fonction linéaire.

Conclusion. — Dans l'espace vectoriel F_0 lui-même, la multiplication est toujours possible, mais non la dérivation (et il n'y a pas d'élément δ). Dans l'espace des distributions, la dérivation est toujours possible, et il y a un

---

[1] *Voir* notre *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1, 1950, p. 115.

élément δ, mais la multiplication n'est pas toujours possible. (Je ne connais pas d'exemple de multiplication et dérivation toujours possibles, même avec $\delta = 0$). Mais on ne peut exiger à la fois multiplication, dérivation et élément δ. De toute façon le lemme 1 montre déjà qu'on ne peut à la fois utiliser δ et δ^+ [qui fait intervenir $vp(1/x) = x^{-1}$] et vouloir une multiplication toujours définie.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 239, p. 847-848, séance du 11 octobre 1954.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
146842-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.