Laurent Schwartz

Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe

Géométrie différentielle (Strasbourg, 1953), Colloques Internationaux du C.N.R.S., Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1953, p. 185-195.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

COURANT ASSOCIÉ A UNE FORME DIFFÉRENTIELLE MÉROMORPHE SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

par Laurent SCHWARTZ (PARIS)

I. POSITION DU PROBLÈME ET RAPPELS.

Soit V une variété analytique connexe à n dimensions complexes. Une forme différentielle est dite méromorphe si, au voisinage de chaque point de V, elle est quotient d'une forme holomorphe par une fonction holomorphe ; elle sera dite SEMI-MÉROMORPHE si, au voisinage de chaque point, elle est quotient d'une forme indéfiniment différentiable par une fonction holomorphe. Nous ignorons s'il existe une variété polaire pour une forme semi-méromorphe. Mais nous dirons qu'une telle forme a tous ses pôles dans W, sous-variété analytique (avec singularités) à n-1 dimensions complexes de V, si, au voisinage de chaque point, elle est quotient d'une forme indéfiniment différentiable par une fonction holomorphe ayant tous ses zéros dans W. Une forme semi-holomorphe sera dite RÉGULIÈRE si, au voisinage de chaque point, elle est somme d'un nombre fini de formes semi-méromorphes, chacune ayant tous ses pôles dans une sous-variété sans singularité.

Si une forme $\{\omega\}$ semi-méromorphe est localement à coefficients sommables, elle définit un « courant » que nous appellerons ω. Le but de cet article est de montrer qu'à toute forme semi-méromorphe régulière $\{\omega\}$ on peut attacher un courant vp ω (vp = valeur principale de Cauchy, pour des raisons qui seront données plus loin). C'est probablement encore possible même si $\{\omega\}$ n'est pas régulière, mais sûrement bien plus difficile à montrer (1).

Rappelons qu'il existe une bigraduation des formes sur V, suivant le z-degré et le $\bar{z}$-degré. La différentiation extérieure d est une somme $d_z + d_{\bar{z}}$, d_z (resp. $d_{\bar{z}}$) étant la « différentiation partielle en z (resp. $\bar{z}$), » qui augmente d'une unité le z-degré (resp. $\bar{z}$-degré). On a $d_z d_z = d_{\bar{z}} d_{\bar{z}} = 0$, $d_z d_{\bar{z}} + d_{\bar{z}} d_z = 0$.

Si $\mathfrak{D}^{n-p,n-q}$ est l'espace des formes différentielles de degrés (n-p, n-q) indéfiniment différentiables à support compact, muni de sa topologie habi-

---

(1) Kodaira l'a démontré si la dimension n de V est égale à 2, dans le cas où le dénominateur de $\{\omega\}$ est un produit de fonctions holomorphes irréductibles à la puissance 1. (The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, American Journal of Mathematics, vol. 73, n 4, 1951, p. 813-875 ; voir p. 830-838.)

tuelle, son dual topologique $\mathcal{D}'^{p,q}$ est l'espace des courants (2) de degrés (p, q). On munit cet espace de sa topologie de dual fort. Une forme $\{\omega\}$ de degrés (p, q), localement à coefficients sommables, définit un tel courant ω par $<\omega, \varphi> = \int_V \omega \wedge \varphi$. La différentiation sur les courants est définie par

$$(1,1)\qquad \begin{aligned} &< d_z \overset{p,q}{T}, \varphi > = (-1)^{p+q+1} < T, d_z \varphi > ;\\ &< d_{\bar z} \overset{p,q}{T}, \varphi > = (-1)^{p+q+1} < T, d_{\bar z} \varphi > . \end{aligned}$$

On peut caractériser une forme holomorphe de degré p comme un courant T de degrés (p, 0) vérifiant $d_{\bar z} T = 0$. Une forme méromorphe est de degrés (p, 0), une forme semi-méromorphe de degrés (p, q) arbitraires.

Sur une carte locale, de coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$, où $z_k = x_k + iy_k$, nous poserons

$$(1,2)\qquad \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) ; \frac{\partial}{\partial \bar z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

On a alors

$$(1,3)\qquad d_z T = \sum_k dz_k \wedge \frac{\partial T}{\partial z_k} \; ; \; d_{\bar z} T = \sum_k d\bar z_k \wedge \frac{\partial T}{\partial \bar z_k}$$

Une forme holomorphe est alors un courant de degrés (p, 0) vérifiant $\frac{\partial T}{\partial \bar z_k} = 0$ pour $k = 1,2, \ldots n$.

Nous dirons d'un opérateur différentiel D sur l'espace des courants qu'il est semi-holomorphe si tout point possède un voisinage muni d'un système de coordonnées locales, dans lequel chaque coefficient de DT est combinaison linéaire finie, à coefficients fonctions indéfiniment différentiables, de dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{p_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{p_2}\cdots\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{p_n}$ des coefficients de T. C'est bien là une propriété indépendante des coordonnées locales. La différentiation d_z est semi-holomorphe. Les opérateurs différentiels semi-holomorphes forment un anneau, et les formes différentielles semi-méromorphes régulières aussi bien que les courants forment des modules sur cet anneau.

2. COURANT ATTACHÉ A UNE FORME SEMI-MÉROMORPHE RÉGULIÈRE.

Théorème. — Pour toute variété analytique V il existe une opération vp (valeur principale de Cauchy) et une seule. qui a toute forme différentielle semi-méromorphe régulière $\{\omega\}$ de degrés (p, q) sur V fasse correspondre un courant vp ω de degrés (p, q) avec les propriétés suivantes :

1° Si $\{\omega\}$ est localement à coefficients sommables, vp $\omega = \omega$.

(2) Les courants sont une extension de la notion de distribution au cas des formes différentielles. (Voir De Rham et Kodaira, Harmonic integrals, Institute for Advanced Study, Princeton, 1950 et Schwartz, Théorie des Distributions, Paris, Hermann, 1950-51.)

2° L'opération vp est linéaire pour les structures de modules sur l'anneau des opérateurs différentiels semi-holomorphes. En particulier, pour $\alpha \in \mathcal{E}$:

$$(2,1) \qquad \mathrm{vp}\, \alpha \wedge \omega = \alpha \wedge \mathrm{vp}\, \omega \quad , \text{ et}$$

$$(2,2) \qquad \mathrm{vp}\, d_z \omega = d_z \mathrm{vp}\, \omega \quad .$$

Cette opération vp est de caractère local : si U est un ouvert de V, le courant attaché à la restriction de $\{\omega\}$ à U est la restriction à U du courant attaché à $\{\omega\}$ dans V. Le support de vp ω est le support de $\{\omega\}$.

Nous ne donnerons ici que les lignes essentielles de la démonstration.

Lemme 1. — L'espace des formes semi-méromorphes régulières est engendré, en tant que module sur l'anneau des opérateurs différentiels semi-holomorphes, par les formes localement à coefficients sommables.

Par une partition de l'unité (qui est un opérateur semi-holomorphe) on se ramène au cas où V est un ouvert assez petit de C^n, et $\{\omega\}$ une forme semi-méromorphe dont les pôles sont dans la variété $z_n = 0$. $\{\omega\}$ est alors de la forme $\left\{\frac{\bar{\omega}}{z_n^m}\right\}$, $\bar{\omega} \in \mathcal{E}$. La formule $\{\omega\} = -\frac{1}{m-1}\left\{\frac{\partial}{\partial z_n}\frac{\bar{\omega}}{z_n^{m-1}}\right\} + \frac{1}{m-1}\left\{\frac{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z_n}}{z_n^{m-1}}\right\}$ permet

de ramener le cas m au cas m-1 ; et pour $m = 1$, $\{\omega\}$ est à coefficients localement sommables.

Ce lemme montre tout de suite l'unicité de l'opération vp, si elle existe. Si $\{\omega\}$ est une forme semi-méromorphe régulière, on a

$$(2,3) \qquad \{\omega\} = \sum_{\nu} \{D_\nu\, \omega_\nu\} \ ,$$

D_ν opérateurs différentiels semi-holomorphes et $\{\omega_\nu\}$ à coefficients localement sommables.

On a alors nécessairement

$$(2,4) \qquad \mathrm{vp}\, \omega = \sum_{\nu} D_\nu\, \omega_\nu \ .$$

Cela prouve aussi le caractère local de vp et la propriété du support. Pour prouver l'existence de vp, il suffit d'ailleurs de prouver que si la forme (2.3) est nulle, le courant défini par (2,4) est nul, car alors la définition (2,4) donne le même courant vp ω attaché à $\{\omega\}$ quelle que soit sa décomposition (2,3). Or, la preuve de cette nullité est purement locale ; on peut donc encore se ramener, pour prouver l'existence de vp, au cas particulier utilisé dans le lemme 1.

Lemme 2. — Si $\varphi(x, y, \lambda)$ est une fonction indéfiniment dérivable de $(x, y) \in R^2$ et $\lambda \in R^k$, telle que pour tout λ son support soit dans un compact fixe K de R^2, alors l'intégrale

$$(2,5) \qquad \iint_{|z|>\varepsilon} \varphi \frac{(x, y, \lambda)}{z^m} \, dz \wedge d\bar{z} \quad , \quad z = x + iy ,$$

a une limite pour $\varepsilon \to 0$, cette limite est atteinte uniformément par rapport à λ quand λ parcourt un compact de R^k, et c'est une fonction indéfiniment différentiable de λ (3).

Ce lemme se démontre par un développement de Taylor de φ, pour λ fixé, suivant les puissances de z, $\bar{z}$.

Lemme 3. — Si V est un ouvert de C^n, G une fonction semi-méromorphe sur V, dont tous les pôles sont dans la sous-variété $z_n = 0$, et $\varphi \in \mathfrak{D}$, l'intégrale

$$(2,6) \qquad \iint_{|z_n| > \varepsilon} \cdots \iint G\,\varphi\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

a une limite pour $\varepsilon \to 0$, et cette limite dépend continuement de $\varphi \in \mathfrak{D}$.

En effet, cette intégrale peut s'écrire

$$(2,7) \qquad \iint \cdots \iint dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1} \wedge d\bar{z}_{n-1} \iint_{|z_n| \geqslant \varepsilon} G\,\varphi\, dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

L'intégrale double en $dz_n \wedge d\bar{z}_n$ atteint sa limite pour $\varepsilon \to 0$, uniformément par rapport à $z_1, z_2 \ldots, z_{n-1}$, et cette limite est indéfiniment dérivable (lemme 2), donc (2,6) a bien une limite qui vaut

$$(2,8) \qquad \iint \cdots \iint dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots dz_{n-1} \wedge d\bar{z}_{n-1} \left[\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{|z_n| > \varepsilon} G\,\varphi\, dz_n \wedge d\bar{z}_n \right]$$

Nous désignerons cette limite par

$$(2,9) \qquad \mathrm{vp} \iint \cdots \iint G\,\varphi\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

vp ayant bien ici le sens propre de valeur principale de Cauchy.

Si alors $\{\omega\}$ est une forme semi-méromorphe dans V ayant tous ses pôles dans $z_n = 0$, nous pourrons définir explicitement le courant vp ω par

$$(2,10) \qquad \langle \mathrm{vp}\, \omega , \varphi \rangle = \mathrm{vp} \int_V \omega \wedge \varphi .$$

Il reste à montrer que vp ainsi défini dans cette situation particulière, relative seulement aux formes ayant leurs pôles dans la sous-variété $z_n = 0$, a toutes les propriétés de l'énoncé du théorème 1. La propriété 1°) résulte du théorème de Lebesgue sur la convergence des intégrales. En ce qui concerne 2°) la linéarité relativement au corps des scalaires est évidente, ainsi que l'égalité (2.1). Comme tout opérateur semi-holomorphe est composé d'un nombre fini de multiplications par des formes indéfiniment différentiables et de dérivations

(3) Le contenu des lemmes 2 et 4 et la formule (3,15) sont énoncés, sans démonstration et sous une forme légèrement différente, dans Schwartz, Théorie des Distributions, tome I, formules (II,3 ; 23 à 28).

$\frac{\partial}{\partial z_k}$ (k = 1, 2,..., n), il reste seulement à montrer que, avec les notations du lemme 3,

$$(2,11)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{vp}\iint\cdots\iint G\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right) dz_1\wedge d\bar{z}_1\ldots\ldots dz_n\wedge d\bar{z}_n = \\ &\mathrm{vp}\iint\cdots\iint \frac{\partial G}{\partial z_k}\,\varphi\; dz_1\wedge d\bar{z}_1\ldots\ldots dz_n\wedge d\bar{z}_n\,. \end{aligned}$$

C'est évident si $k \neq n$. Car ces deux expressions sont les limites pour $\varepsilon \to 0$, d'intégrales 2n-uples qui, pour ε fixé, s'écrivent respectivement

$$(2,12)\qquad \begin{aligned} &\iint_{|z_n|\geq\varepsilon} dz_n\wedge d\bar{z}_n\left[\iint\cdots\iint G\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right) dz_1\wedge d\bar{z}_1\ldots\ldots dz_{n-1}\wedge d\bar{z}_{n-1}\right], \text{et} \\ &\iint_{|z_n|\geq\varepsilon} dz_n\wedge d\bar{z}_n\left[\iint\cdots\iint \frac{\partial G}{\partial z_k}\,\varphi\; dz_1\wedge d\bar{z}_1\ldots\ldots dz_{n-1}\wedge d\bar{z}_{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Or, dans les intégrales 2 (n-1) -uples entre crochets, toutes les fonctions qui interviennent sont indéfiniment différentiables (puisque $z_n \neq 0$) ; elles sont donc égales par intégration par parties.

La seule chose non triviale est donc la démonstration de (2,11) pour $k = n$. On redéfinira pour cela les quantités à comparer par des formules du type (2,8) et leur égalité résultera d'un dernier lemme :

Lemme 4. — Si G est une fonction semi-méromorphe sur C de seul pôle $z = 0$, et $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$(2,13)\qquad \mathrm{vp}\iint G\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) dz\wedge d\bar{z} = \mathrm{vp}\iint \frac{\partial G}{\partial z}\,\varphi\; dz\wedge d\bar{z}$$

Ce lemme se démontre comme le lemme 2.

Le théorème est donc démontré. Pour une forme donnée $\{\omega\}$, on pourra définir vp ω en utilisant une décomposition (2,3) quelconque. On pourra aussi, si $\{\omega\}$ a ses pôles dans une sous-variété W sans singularité, et si W peut être définie par une équation analytique $\zeta = 0$, définir vp ω par :

$$(2,14)\qquad \langle \mathrm{vp}\,\omega, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\cdots\iint_{|\zeta|\geq\varepsilon}\omega\wedge\varphi$$

Cette limite existe (lemme 3) et sa valeur est indépendante du choix de la fonction ζ. Si une telle fonction holomorphe ζ n'existe pas globalement, on se contentera de définitions locales de vp ω, qu'on « recollera ».

Pour terminer, disons que si l'on donne un sens convenable à l'expression : « une forme semi-méromorphe régulière $\{\omega_\lambda\}$ dépend du paramètre λ de manière continue (resp. m fois continuement différentiable) », alors cette hypothèse entraîne que le courant vp ω_λ dépende de λ de manière continue (resp. m fois continuement différentiable).

3. QUELQUES APPLICATIONS.

I Problème de Cousin additif sur une variété analytique complexe. — Trouver sur V une forme différentielle méromorphe $\{\omega\}$ ayant une variété polaire donnée et une partie singulière donnée au voisinage de cette variété polaire.

Une donnée de Cousin revient à la donnée d'un système d'ouverts U_j formant un recouvrement de V, et dans chacun d'eux d'une forme méromorphe $\{\omega_j\}$, de manière que dans $U_k \cap U_j$ la forme $\{\omega_k - \omega_j\}$ soit holomorphe. On cherche alors une forme méromorphe $\{\omega\}$ sur V telle que dans chaque U_j la forme $\{\omega - \omega_j\}$ soit holomorphe. Soit $W = \bigcup_j W_j$ la variété polaire de la donnée de Cousin.

Nous supposerons les $\{\omega_j\}$ méromorphes régulières, soient $\mathrm{vp}\,\omega_j$ les courants associés. Dans $U_k \cap U_j$,

$$(3,1) \qquad d_{\bar z}\,\mathrm{vp}\,\omega_k - d_{\bar z}\,\mathrm{vp}\,\omega_j = d_{\bar z}\,(\omega_k - \omega_j) = 0$$

donc les courants locaux $d_{\bar z}\,\mathrm{vp}\,\omega_j$ définissent un même courant global B, de support W, $\bar z$-fermé et de $\bar z$-degré 1.

Proposition. — Pour que le problème de Cousin admette une solution, il faut et il suffit que B soit $\bar z$-cohomologue à 0. La solution est alors déterminée à une forme holomorphe près (4).

En effet, supposons d'abord qu'il y ait une solution $\{\omega\}$. Dans U_j

$$(3,2) \qquad d_{\bar z}\,\mathrm{vp}\,\omega - d_{\bar z}\,\mathrm{vp}\,\omega_j = d_{\bar z}\,(\omega - \omega_j) = 0\,, \text{ donc}$$

$$(3,3) \qquad d_{\bar z}\,\mathrm{vp}\,\omega = B, \text{ donc } B \text{ est } \bar z \text{ - cohomologue à 0.}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un courant X, de $\bar z$-degré 0, tel que

$$(3,4) \qquad d_{\bar z}\, X = B\,.$$

Dans $\complement W$, on a $d_{\bar z} X = 0$, donc X définit dans cet ouvert une forme holomorphe $\{\omega\}$. Cette forme est une solution du problème, car dans U_j :

$$(3,5) \qquad d_{\bar z}\,(X - \mathrm{vp}\,\omega_j) = B - B = 0\,,$$

donc $\{\omega - \omega_j\}$, forme définie dans $U_j \cap \complement W$, est la restriction d'une forme holomorphe définie dans U_j, de courant associé $X - \mathrm{vp}\,\omega_j$.

Remarquons d'ailleurs que X n'est autre que le courant $\mathrm{vp}\,\omega$ associé à $\{\omega\}$ dans V ; car, d'après (3,3)

$$(3,6) \qquad d_{\bar z}\,(X - \mathrm{vp}\,\omega) = 0$$

donc $X - \mathrm{vp}\,\omega$ est une forme holomorphe, mais de support contenu dans W donc nulle.

---

(4) La solution du problème de Cousin est connue sous une autre forme : à toute donnée de Cousin on peut attacher canoniquement une classe de $\bar z$-cohomologie ; pour qu'il y ait une solution, il faut et il suffit que cette classe soit nulle. Cette classe est précisément celle du courant B.

Si V est kählérienne compacte (5), elle admet un opérateur de Green G, et on sait que l'équation (3,4) admet la solution

$$X = 2\, \partial_{\bar z}\, G \,.\, B. \tag{3,7}$$

Si les formes données $\{\omega_j\}$ sont fermées, c'est-à-dire si

$$\{d\,\omega_j\} = \{d_z\,\omega_j\} = 0 \tag{3,8}$$

on exige en général d'une solution du problème de Cousin qu'elle soit aussi fermée. Compte tenu de (2,2), (3,8) équivaut à

$$d_z\, \mathrm{vp}\, \omega_j = 0, \tag{3,9}$$

alors le courant B est z-fermé, $\bar z$-fermé (et fermé) car

$$d_z B = d_z d_{\bar z}\, \mathrm{vp}\, \omega_j = - d_{\bar z}\, d_z\, \mathrm{vp}\, \omega_j = 0. \tag{3,10}$$

Pour qu'une solution de (3,4) soit acceptable, il faut et il suffit qu'elle vérifie en outre

$$d_z X = 0. \tag{3,11}$$

Dans le cas où V est kählérienne compacte, cette relation supplémentaire est automatiquement vérifiée, car

$$d_{\bar z}\, d_z X = - d_z\, d_{\bar z} X = - d_z\, B = 0 \tag{3,12}$$

donc $d_z X$ est une forme holomorphe et z-cohomologue à 0, donc nulle. Rappelons aussi que, dans ce cas, il est équivalent de dire que B est $\bar z$-cohomologue à 0, ou qu'il est cohomologue à 0 (6).

Examinons la forme particulière de ces résultats pour n = 1. Au voisinage d'un pôle q de V, choisissons une carte locale et une coordonnée locale z. La donnée de Cousin, au voisinage de q, pour le degré 0, est celle d'un développement

$$\{\overset{0,0}{\omega}_q\} = \Big\{\sum_m a_{m,q} \Big(\frac{1}{z-q}\Big)^m \Big\} \tag{3,13}$$

Un calcul analogue à ceux des lemmes 2 et 4 donne alors

$$d_{\bar z}\, \mathrm{vp}\, \omega_q = \sum_m a_{m,q}\, E_{m,q}\,, \tag{3,14}$$

$E_{m,q}$ étant le courant de degrés (0,1) défini par

$$\langle E_{m,q}\,,\, \Psi_1\, dz + \Psi_2\, d\bar z \rangle = \frac{2 i \pi}{(m-1)!}\, \frac{\partial^{m-1} \Psi_1}{\partial z^{m-1}}(q) \tag{3,15}$$

(5) Pour les formules relatives aux variétés kählériennes, consulter le livre de De Rham-Kodaira (voir note 2), 2e partie. Nous désignons par $\partial_{\bar z}$ l'adjoint (pour la structure hilbertienne) de $d_{\bar z}$; c'est un opérateur différentiel qui diminue d'une unité le $\bar z$-degré.

(6) Lorsque les $\{\omega_i\}$ sont fermées, le courant X donné par la formule (3,7) ne dépend pas, malgré l'intervention de $\partial_{\bar z}$ et de G, de la métrique kählérienne choisie, mais seulement, sous réserve de l'existence d'une telle métrique, de la structure analytique complexe de V : car X est la seule solution de l'équation (3,4) à être z-cohomologue à 0.

Pour que le problème de Cousin ait une solution, il faut et il suffit que

$$(3,16) \qquad B = \sum_{m,q} a_{m,q} E_{m,q}$$

soit $\bar{z}$-cohomologue à 0. Si V est compacte, cela revient à dire que B est orthogonal aux formes harmoniques de degrés (1,0), c'est-à-dire aux différentielles holomorphes de degré 1. Cela fait g conditions linéaires (complexes), g étant le genre.

Maintenant une donnée de Cousin, pour les formes de degré 1, au voisinage d'un pôle q, est de la forme

$$(3,17) \qquad \left\{ \overset{1,0}{\omega}_q \right\} = \left\{ \overset{0,0}{\omega}_q \, dz \right\} = \sum_m a_{m,q} \frac{dz}{(z-q)^m}$$

On a alors

$$(3,18) \qquad d_{\bar{z}} \, \mathrm{vp} \overset{1,0}{\omega}_q = d_{\bar{z}} \, \mathrm{vp} \overset{0,0}{\omega}_q \wedge dz = \sum_m a_{m,q} E_{m,q} \wedge dz .$$

Pour que le problème de Cousin ait une solution, il faut et il suffit que

$$(3,19) \qquad B = \sum_{m,q} a_{m,q} E_{m,q} \wedge dz$$

soit $\bar{z}$-cohomologue à 0, ou encore cohomologue à 0 car B est fermé ; mais chacun des termes $a_{m,q} E_{m,q} \wedge dz$ est cohomologue à 0 si $m \geqslant 2$, car

$$(3,20) \qquad d E_{m-1,q} = d_z E_{m-1,q} = (m-1) E_{m,q} \wedge dz \text{, si } m \geqslant 2 \text{ (7)}$$

Finalement, l'unique condition de possibilité est

$$(3,21) \qquad \sum_q a_{1,q} E_{1,q} \wedge dz \sim 0,$$

et comme $E_{1,q} \wedge dz$ est le courant $2 i \pi \delta_{(q)}$, $\delta_{(q)}$ mesure de Dirac, et qu'un courant T de degrés (1,1) est ~ 0 si et seulement si son intégrale $\langle T, 1 \rangle$ est nulle, cette condition exprime que la somme des résidus $\sum a_{1,q}$ est nulle (8).

Remarque. — Des problèmes tels que le précédent consistent à résoudre globalement un problème supposé résolu localement. Donc ils sont en réalité du domaine de la topologie algébrique, et ne devraient pas supposer l'intervention de l'analyse. Effectivement, la théorie de la cohomologie permet de les résoudre même quand les formes méromorphes considérées ne sont pas régulières. Cependant la méthode exposée ici, outre l'avantage de donner une solution explicite, montre l'existence d'un invariant plus précis ; en topologie algébrique, le problème de Cousin additif donne pour invariant une certaine classe de $\bar{z}$-cohomologie de $\bar{z}$-degré 1, nous trouvons ici comme invariant un courant B bien déterminé appartenant à cette classe.

---

(7) On a en effet :

$$d_z E_{m-1,q} = d_z d_{\bar{z}} \, \mathrm{vp} \left(\frac{1}{z-q}\right)^{m-1} = - d_{\bar{z}} d_z \, \mathrm{vp} \left(\frac{1}{z-q}\right)^{m-1} = (m-1) \, d_{\bar{z}} \, \mathrm{vp} \left(\frac{1}{z-q}\right)^m \wedge dz = (m-1) E_{m,q} \wedge dz.$$

(8) Ces résultats sont classiques.

2. Etude de certaines formes méromorphes sur le produit $V \times V$ d'une variété analytique compacte à 1 dimension complexe par elle-même.

Sur une telle variété, une carte est le produit d'une carte locale de V par une autre. Nous supposerons toujours que les cartes au voisinage des points de la diagonale de $V \times V$ sont des produits d'une carte de V PAR ELLE-MÊME.

Sur $V \times V$ il existe une quadruple graduation des formes différentielles et des courants ; en appelant (u, v) un point de $V \times V$, on aura le u-degré, le $\bar{u}$-degré, le v-degré, le $\bar{v}$-degré.

On voit alors qu'on peut constituer une donnée de Cousin sur $V \times V$, ayant pour variété polaire la diagonale, et définie sur une carte locale au voisinage d'un point de la diagonale par

$$(3,22) \qquad \left\{ \frac{du}{u-v} \right\} = \left\{ d_u \log (u-v) \right\}$$

car si l'on fait un changement de coordonnée locale sur V, elle est invariante, à l'addition près d'une forme holomorphe. Il en est de même pour

$$(3,23) \qquad \left\{ \frac{dv}{u-v} \right\} = - \left\{ d_v \log (u-v) \right\} \quad \text{et}$$

$$(3,24) \qquad \left\{ \frac{du \wedge dv}{(u-v)^2} \right\} = \left\{ d_u d_v \log (u-v) \right\} = \left\{ - d_v \frac{du}{u-v} \right\} = \left\{ - d_u \frac{dv}{u-v} \right\}$$

Il est alors naturel, d'après ce qui a été dit au début de ce paragraphe, de calculer le $d_{\bar{z}} = d_{\bar{u}} + d_{\bar{v}}$ des courants vp associés. On a

$$(3,25) \qquad d_{\bar{u}} \frac{du}{u-v} = 2 i \pi \overset{1,1,0,0}{\delta}_{u-v} ,$$

courant de degrés (1,1, 0,0) concentré sur la diagonale, défini par

$$(3,26) \qquad < \overset{1,1,0,0}{\delta}_{u-v} , \overset{0,0}{\alpha} \otimes \overset{1,1}{\beta} > = \iint_V \alpha \wedge \beta$$

si $\overset{0,0}{\alpha}$ et $\overset{1,1}{\beta}$ sont des formes définies sur V ; $\alpha \otimes \beta$ est la forme de degrés (0, 0, 1,1) associée sur $V \times V$, tandis que $\alpha \wedge \beta = \alpha \beta$ est leur produit extérieur sur V. De même

$$(3,27) \qquad d_{\bar{v}} \frac{dv}{u-v} = - 2 i \pi \overset{0,0,1,1}{\delta}_{u-v}$$

avec

$$(3,28) \qquad < \overset{0,0,1,1}{\delta}_{u-v} , \overset{1,1}{\alpha} \otimes \overset{0,0}{\beta} > = \iint_V \alpha \wedge \beta$$

Ces calculs ne nous seront d'ailleurs pas utiles, nous utiliserons seulement le fait évident que (3,25) et (3,27) sont des courants concentrés sur la diagonale de $V \times V$.

Nous allons maintenant montrer que la donnée de Cousin définie par (3,24) est celle d'une forme différentielle méromorphe $\{\Omega\}$ sur $V \times V$. Pour cela il faut démontrer que

$$B = (d_{\bar{u}} + d_{\bar{v}}) \mathrm{vp} \frac{du \wedge dv}{(u-v)^2} \tag{3,29}$$

est $\bar{z}$-cohomologue à 0 ; mais comme il est z-fermé, et que $V \times V$ est kählérienne compacte, il suffit de prouver que B est z-cohomologue à 0. Or, B est concentré sur la diagonale et, sur une carte au voisinage d'un point de la diagonale, on a

$$B_1 = d_{\bar{u}} \mathrm{vp} \frac{du \wedge dv}{(u-v)^2} = d_{\bar{u}} \left[-d_z \frac{du}{u-v} \right] = d_z d_{\bar{u}} \frac{du}{u-v} \tag{3,30}$$

On a de même

$$B_2 = d_{\bar{v}} \mathrm{vp} \frac{du \wedge dv}{(u-v)^2} = d_z d_{\bar{v}} \frac{dv}{u-v} \tag{3,31}$$

Donc finalement

$$B = d_z \left[d_{\bar{u}} \frac{du}{u-v} + d_{\bar{v}} \frac{dv}{u-v} \right] = d_z \left[2i\pi \overset{1,1,00}{\delta}_{u-v} - 2i\pi \overset{0,0,1,1}{\delta}_{u-v} \right] \tag{3,32}$$

Donc B est bien z-cohomologue à 0.

Conséquences. — Soit $\{\Omega\}$ une solution du précédent problème de Cousin, $\{\Omega\}$ résoud TOUS les problèmes de Cousin pour les formes de degré 1 sur V. Soit en effet, $q \in V$, et considérons au voisinage de q une carte locale, de coordonnée locale z. Pour u voisin de q, $\{\Omega\}$ s'écrit

$$\{\Omega\} = \{du \wedge \Omega(u)\} \tag{3,33}$$

où $\{\Omega\ (u)\}$ est, pour u fixé, une forme différentielle (en v) de degré 1 méromorphe sur V. Si alors on considère $\{\Omega\ (q)\}$, c'est une forme méromorphe sur V répondant à la donnée de Cousin $\left\{\frac{dz}{(z-q)^2}\right\}$. Une solution du problème de Cousin pour la donnée de Cousin $\left\{\frac{dz}{(z-q)^m}\right\}$

sera donnée par $\left\{\frac{1}{(m-2)!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{m-2} \Omega(u)\right]\right\}$;

ainsi tous les problèmes de Cousin pour des données de Cousin sans résidus seront résolus de cette manière.

Maintenant, une donnée de Cousin avec résidus, du fait que la somme des résidus doit être nulle, est une combinaison de données du type $\left\{\frac{dz}{z-q} - \frac{dz}{z-p}\right\}$ (relativement à des coordonnées locales choisies au voisinage de p et q). Une solution est donnée par l'intégrale de Ω, par rapport à la variable u, sur une ligne quelconque allant de p à q ; d'ailleurs l'intégrale de Ω, par rapport à u, sur une courbe fermée de V, est une forme différentielle (en v) holomorphe de degré 1 sur V.

Cette méthode résoud des problèmes de Cousin sur V, en donnant une solution dépendant analytiquement des pôles et des coefficients du développement polaire. Si V est un tore, Ω sera la différentielle elliptique $\left\{ \wp(u-v)\, du \wedge dv \right\}$, où $\wp$ est la fonction de Weierstrass.

On peut résoudre un problème analogue avec les fonctions θ .