Laurent Schwartz

Homomorphismes et applications complètement continues

C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), p. 2472-2473.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

2° Le problème de Dirichlet peut être traité de façon plus générale : on cherche u dans $\mathcal{E}^1_{q,2}$, h est donné dans $\mathcal{E}^1_{q,2}$, f est donné dans $(\mathcal{D}^1_{q,2})'$, espace dual de $\mathcal{D}^1_{q,2}$, et la condition aux limites est $h - u \in \mathcal{D}^1_{q,2}$.

3° On peut considérer des cas où Ω n'est pas connexe, et étudier notamment des problèmes de transmission.

4° Généralisation facile au cas de systèmes de N équations.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Homomorphismes et applications complètement continues.* Note de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Généralisation de certains théorèmes de la théorie de Riesz.

On ne considère que des espaces vectoriels topologiques, localement convexes et séparés.

Théorème 1. — *Soient u et v deux applications linéaires continues d'un espace localement convexe E dans un autre F. Supposons que u soit un isomorphisme de E sur $u(E)$, que $u(E)$ soit fermé, et que v soit complètement continue* [1]. *Alors $w = u + v$ est un homomorphisme* [2], *son noyau N est de dimension finie, et son image est fermée.*

L'hypothèse relative à v signifie qu'il existe sur E une semi-norme continue p, telle que l'ensemble V des $x \in E$ satisfaisant à $p(x) \leq 1$ ait une image $v(V)$ relativement compacte. Soit $W = V \cap N$; on a $u(W) = -v(W)$ qui est précompact; u étant un isomorphisme, W est précompact, donc N est de dimension finie [3]. En restreignant u et v à un supplémentaire topologique de N, on est ramené au cas où $N = 0$. Supposons donc w biunivoque, et soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur E, tel que $w(\mathfrak{U})$ converge dans F. Tout revient à montrer que $\mathfrak{U}$ a une limite.

Soit a la limite (finie ou infinie) de $p(x)$ suivant $\mathfrak{U}$. Supposons d'abord $a < +\infty$. Alors $(a+1)V \in \mathfrak{U}$, donc $v(\mathfrak{U})$ converge dans F, et par suite $u(\mathfrak{U})$ converge dans F. Comme $u(E)$ est fermé et que u est un isomorphisme, $\mathfrak{U}$ converge dans E.

Montrons maintenant que $a = +\infty$ est impossible. Sinon, $w[x/p(x)]$ convergerait vers zéro suivant $\mathfrak{U}$, et $v[x/p(x)]$ aurait une limite; donc $u[x/p(x)]$ aussi, et par suite $x/p(x)$ aurait une limite y_0. On aurait $p(y_0) = 1$ et $w(y_0) = 0$, ce qui contredit la biunivocité de w. C. Q. F. D.

Théorème 2. — *Soient u et v deux applications linéaires continues d'un espace*

---

(1) Au sens de J. Leray, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, 1950, p. 177-186.

(2) Au sens de N. Bourbaki, *Top. Gén.*, chap. III, § 2, n° 7.

(3) *Cf.* N. Bourbaki, *Esp. Vect. Topo.*, chap. I, p. 30, remarque 1.

localement convexe E *dans un autre* F. *Supposons que u soit un homomorphisme faible de* E *sur* F, *que v soit complètement continue, et que u satisfasse à la condition :*

(K) *Tout compact convexe de* F *est contenu dans l'image par u d'un compact convexe de* E.

Alors $w = u + v$ *est un homomorphisme faible de* E *sur un sous-espace fermé de codimension finie de* F.

Munissons les duals E′, resp. F′, de la topologie $\mathfrak{T}_c$ de la convergence uniforme sur les compacts convexes de E, resp. F. Comme $v(V)$ est relativement compact, la transposée ${}^t v$ transforme le polaire [4] de $v(V)$ en une partie équicontinue, donc relativement compacte, de E′; il s'ensuit que ${}^t v$ est complètement continue. En vertu de l'hypothèse (K), la convergence de $z' \in F'$ vers zéro équivaut à la convergence de ${}^t u(z')$ vers zéro. Donc ${}^t u$ est un isomorphisme de F′ sur ${}^t u(F')$. Or, u étant un homomorphisme faible, ${}^t u(F')$ est faiblement fermé [5], donc fermé pour $\mathfrak{T}_c$.

Ainsi ${}^t u$ et ${}^t v$ vérifient les hypothèses du théorème 1. Donc :

a. ${}^t w(F')$ est fermé pour $\mathfrak{T}_c$; mais $\mathfrak{T}_c$ est intermédiaire entre les topologies $\sigma(E', E)$ et $\tau(E', E)$ [5], donc ${}^t w(F')$ est aussi faiblement fermé, ce qui prouve que w est un homomorphisme faible [5].

b. ${}^t w$ est un homomorphisme pour les topologies $\mathfrak{T}_c$; pour ces topologies, le dual de E′ (resp. F′) est E (resp. F), d'après le raisonnement de (*a*). Donc ${}^t w$ est un homomorphisme pour $\sigma(F', F)$ et $\sigma(E', E)$, et $w(E)$ est fermé.

c. le noyau de ${}^t w$ est de dimension finie, donc $w(E)$, qui est fermé, est de codimension finie. C. Q. F. D.

Corollaire du théorème 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Fréchet* [6], *u une application linéaire continue de* E <u>*sur*</u> F, *v une application linéaire complètement continue de* E *dans* F. *Alors* $w = u + v$ *applique* E *sur un sous-espace fermé de codimension finie de* F.

En effet, u est un homomorphisme (théorème de Banach), et *a fortiori* un homomorphisme faible. En outre on voit aisément que la condition (K) est vérifiée du fait que E et F sont des espaces de Fréchet.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Classes de fonctions indéfiniment dérivables presque périodiques de spectre donné.* Note de M. **Pierre Lalaguë**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Inégalités liant les bornes supérieures des modules des dérivées successives de telles fonctions.

---

(4) *Cf.* J. Dieudonné et L. Schwartz, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 1, 1949, p. 61-102, n° 2.

(5) *Cf.* J. Dieudonné, *Annales E. N. S.*, 59, 1942, p. 107-139, th. 14.

(6) Au sens de N. Bourbaki, *Esp. Vect. Topo.*, chap. II, p. 59.