

ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Homomorphismes et applications complètement continues

C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), p. 2472-2473.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

2° Le problème de Dirichlet peut être traité de façon plus générale : on cherche u dans $\mathcal{E}_{q,2}^1$, h est donné dans $\mathcal{E}_{q,2}^1$, f est donné dans $(\mathcal{O}_{q,2}^1)'$, espace dual de $\mathcal{O}_{q,2}^1$, et la condition aux limites est $h - u \in \mathcal{O}_{q,2}^1$.

3° On peut considérer des cas où Ω n'est pas connexe, et étudier notamment des problèmes de transmission.

4° Généralisation facile au cas de systèmes de N équations.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Homomorphismes et applications complètement continues*. Note de M. LAURENT SCHWARTZ, présentée par M. Jacques Hadamard.

Généralisation de certains théorèmes de la théorie de Riesz.

On ne considère que des espaces vectoriels topologiques, localement convexes et séparés.

THÉORÈME 1. — *Soient u et v deux applications linéaires continues d'un espace localement convexe E dans un autre F . Supposons que u soit un isomorphisme de E sur $u(E)$, que $u(E)$ soit fermé, et que v soit complètement continue ⁽¹⁾. Alors $\alpha = u + v$ est un homomorphisme ⁽²⁾, son noyau N est de dimension finie, et son image est fermée.*

L'hypothèse relative à v signifie qu'il existe sur E une semi-norme continue p , telle que l'ensemble V des $x \in E$ satisfaisant à $p(x) \leq 1$ ait une image $v(V)$ relativement compacte. Soit $W = V \cap N$; on a $u(W) = -v(W)$ qui est précompact; u étant un isomorphisme, W est précompact, donc N est de dimension finie ⁽³⁾. En restreignant u et v à un supplémentaire topologique de N , on est ramené au cas où $N = 0$. Supposons donc α biunivoque, et soit \mathcal{U} un ultrafiltre sur E , tel que $\alpha(\mathcal{U})$ converge dans F . Tout revient à montrer que \mathcal{U} a une limite.

Soit a la limite (finie ou infinie) de $p(x)$ suivant \mathcal{U} . Supposons d'abord $a < +\infty$. Alors $(a + 1)V \in \mathcal{U}$, donc $v(\mathcal{U})$ converge dans F , et par suite $u(\mathcal{U})$ converge dans F . Comme $u(E)$ est fermé et que u est un isomorphisme, \mathcal{U} converge dans E .

Montrons maintenant que $a = +\infty$ est impossible. Sinon, $\alpha[x/p(x)]$ convergerait vers zéro suivant \mathcal{U} , et $v[x/p(x)]$ aurait une limite; donc $u[x/p(x)]$ aussi, et par suite $x/p(x)$ aurait une limite y_0 . On aurait $p(y_0) = 1$ et $\alpha(y_0) = 0$, ce qui contredit la biunivocité de α . G. Q. F. D.

THÉORÈME 2. — *Soient u et v deux applications linéaires continues d'un espace*

(1) Au sens de J. LERAY, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, 1950, p. 177-186.

(2) Au sens de N. BOURBAKI, *Top. Gén.*, chap. III, § 2, n° 7.

(3) Cf. N. BOURBAKI, *Esp. Vect. Topo.*, chap. I, p. 30, remarque 1.

localement convexe E dans un autre F . Supposons que u soit un homomorphisme faible de E sur F , que v soit complètement continue, et que u satisfasse à la condition :

(K) Tout compact convexe de F est contenu dans l'image par u d'un compact convexe de E .

Alors $\omega = u + v$ est un homomorphisme faible de E sur un sous-espace fermé de codimension finie de F .

Munissons les duals E' , resp. F' , de la topologie \mathfrak{C}_c de la convergence uniforme sur les compacts convexes de E , resp. F . Comme $v(V)$ est relativement compact, la transposée $'v$ transforme le polaire (\cdot) de $v(V)$ en une partie équicontinue, donc relativement compacte, de E' ; il s'ensuit que $'v$ est complètement continue. En vertu de l'hypothèse (K), la convergence de $z' \in F'$ vers zéro équivaut à la convergence de $'u(z')$ vers zéro. Donc $'u$ est un isomorphisme de F' sur $'u(F')$. Or, u étant un homomorphisme faible, $'u(F')$ est faiblement fermé (\cdot) , donc fermé pour \mathfrak{C}_c .

Ainsi $'u$ et $'v$ vérifient les hypothèses du théorème 1. Donc :

a. $'\omega(F')$ est fermé pour \mathfrak{C}_c ; mais \mathfrak{C}_c est intermédiaire entre les topologies $\sigma(E', E)$ et $\tau(E', E)$ (\cdot) , donc $'\omega(F')$ est aussi faiblement fermé, ce qui prouve que ω est un homomorphisme faible (\cdot) .

b. $'\omega$ est un homomorphisme pour les topologies \mathfrak{C}_c ; pour ces topologies, le dual de E' (resp. F') est E (resp. F), d'après le raisonnement de (a). Donc $'\omega$ est un homomorphisme pour $\tau(F', F)$ et $\tau(E', E)$, et $\omega(E)$ est fermé.

c. le noyau de $'\omega$ est de dimension finie, donc $\omega(E)$, qui est fermé, est de codimension finie.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 2. — Soient E et F deux espaces de Fréchet $(^6)$, u une application linéaire continue de E sur F , v une application linéaire complètement continue de E dans F . Alors $\omega = u + v$ applique E sur un sous-espace fermé de codimension finie de F .

En effet, u est un homomorphisme (théorème de Banach), et a fortiori un homomorphisme faible. En outre on voit aisément que la condition (K) est vérifiée du fait que E et F sont des espaces de Fréchet.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Classes de fonctions indéfiniment dérivables presque périodiques de spectre donné. Note de M. PIERRE LALAGUË, présentée par M. Jacques Hadamard.

Inégalités liant les bornes supérieures des modules des dérivées successives de telles fonctions.

(⁴) Cf. J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ. *Ann. de l'Inst. Fourier*, 1, 1949, p. 61-102, n° 2.

(⁵) Cf. J. DIEUDONNÉ, *Annales E. N. S.*, 59, 1942, p. 107-139, th. 14.

(⁶) Au sens de N. BOURBAKI, *Esp. Vect. Topo.*, chap. II, p. 59.