Laurent Schwartz

Sur les multiplicateurs de FL^p

Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, 22 (21) (1953), p. 1-5.

KUNGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS I LUND FÖRHANDLINGAR

Bd 22. Nr 21.

Sur les Multiplicateurs de FL^p.

Par

Laurent Schwartz.

Communiqué par Prof. M. Riesz le 29 Mai 1952.

Le présent article a essentiellement pour but de montrer le théorème p. 2, qui est une conséquence de la belle théorie de M. Marcel Riesz sur les fonctions conjuguées.

§ 1. $FL^p(R^n) = FL^p (1 < p < +\infty)$ est l'espace vectoriel des distributions T sur R^n, dont l'image de Fourier FT est dans $L^p(R^n)$, normé par $\|T\| = \|FT\|_{L^p}$. Pour $p=2$, $FL^p = L^2$; pour $p<2$, $FL^p \subset L^{p'}$; pour $p>2$, FL^p contient d'authentiques distributions.[1] (S) est dense dans FL^p; si $T \in FL^p$, et $\varphi \in (D)$, φT et $T * \varphi$ sont dans FL^p, et si $\varphi \geq 0$ a un support tendant vers l'origine et vérifie $\int \varphi = 1$, $T * \varphi$ tend vers T dans FL^p. Les rotations et les translations de R^n définissent des isométries sur FL^p. Toute la théorie est valable aussi pour $F(D_{L^p})$ et $F(D'_{L^p})$.

Nous appellerons multiplicateur de FL^p une fonction localement sommable f (définie à un ensemble de mesure nulle près) telle que la multiplication $\varphi \to f\varphi$ applique (D) dans FL^p, et soit continue quand on munit (D) de la topologie induite par FL^p; cette opération se prolonge alors d'une manière unique, par passage à la limite, en une opération linéaire continue sur FL^p, qu'on appellera encore multiplication et qu'on notera $T \to f \cdot T$.

Proposition 1. — Si l'un des deux multiplicateurs f, g, est une fonction localement bornée, la fonction localement sommable fg est un multiplicateur et l'on a, pour $T \in FL^p$:

$$f \cdot (g \cdot T) = g \cdot (f \cdot T) = (fg) \cdot T \tag{1}$$

[1] Nous adoptons les notations de notre livre, Théorie des Distributions, tomes I et II, Paris, Hermann, 1950—51, auquel nous renverrons par TD. Cependant le produit scalaire d'une distribution T et d'une fonction φ sera noté $< T, \varphi >$, et non $T(\varphi)$ et les lettres cursives de TD sont remplacées par des majuscules grasses.

En effet, pour $T=\varphi\in(\boldsymbol{D})$, $f\cdot(g\cdot\varphi)=f\cdot g\varphi$ est défini comme limite, dans $\boldsymbol{FL}^p$ donc dans $(\boldsymbol{D}')$, d'une suite $f(\varrho_\nu * g\varphi)$; or, si f ou g est localement bornée, ces fonctions convergent, localement faiblement dans L^1 donc dans $(\boldsymbol{D}')$, vers la fonction $fg\varphi$. On a donc $f\cdot(g\cdot\varphi)=g\cdot(f\cdot\varphi)=(fg)\cdot\varphi$, d'où la conclusion par passage à la limite de $(\boldsymbol{D})$ à $\boldsymbol{FL}^p$.

Corollaire. Le multiplicateur f commute avec tous les multiplicateurs $\alpha\in(\boldsymbol{D})$, donc la multiplication est une opération de caractère local.

Un polyèdre projectif P de R^n est l'intersection de R^n avec un polyèdre de l'espace projectif P^n obtenu en adjoignant à R^n un hyperplan à l'infini. C'est donc un polyèdre non nécessairement borné, mais à nombre fini de faces de toutes dimensions.

Théorème. La fonction caractéristique f_P d'un polyèdre projectif P de R^n est un multiplicateur sur $\boldsymbol{FL}^p$ $(1<p<+\infty)$.

Démonstration:

1° — Si P est le demi-espace $x_1\geq 0$, f_P est la fonction d'Heaviside $Y(x_1)=Y(x_1)\times 1_{x_2,\ldots x_n}$, et

$$\boldsymbol{F}f_P=\left[\frac{1}{2i\pi}\,vp\cdot\frac{1}{y_1}+\frac{1}{2}\,\delta_{y_1}\right]\times\delta_{y_2,\ldots y_n}. \tag{2}$$

Il reste donc à montrer que $S=vp\dfrac{1}{y_1}\times\delta_{y_2\ldots y_n}$ est un opérateur de convolution dans L^p. Or c'est un théorème classique de Marcel Riesz,[1] dans le cas d'une dimension et le cas général s'y ramène immédiatement, car, pour $\varphi\in(\boldsymbol{D})$,

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&(S*\varphi)(y)=vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y_1-\eta_1,y_2\ldots y_n)}{\eta_1}\,d\eta_1\\ &\|S*\varphi\|_{L^p}^p=\int dy_2\ldots dy_n\int_{-\infty}^{+\infty}|S*\varphi|^p dy_1\leq C\int dy_2\ldots dy_n\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi|^p dy_1=C\|\varphi\|_{L^p}^p.\end{aligned}\right.$$

2° — Le cas d'un demi-espace P quelconque se ramène au précédent par rotation et translation, et tous les opérateurs f_P ainsi obtenus ont même norme.

3° — Si P est un polyèdre projectif convexe, il est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces P_ν; d'après la proposition 1, $f_P=\prod\limits_\nu f_{P_\nu}$ est un multiplicateur.

4° — Si P est un polyèdre projectif quelconque, il est réunion finie de polyèdres projectifs convexes P_ν, simplexes projectifs 2 à 2 sans point intérieur commun, alors $f_P=\sum\limits_\nu f_{P_\nu}$ est un multiplicateur, *C.Q.F.D.*

---

[1] Marcel Riesz: »Sur les fonctions conjuguées» Mathematische Zeitschrift, 27 (1927), p. 218—244.

Remarques. 1° La norme du multiplicateur f_P est bornée quand le nombre des faces de toutes dimensions de P est borné.

2° — Tous les multiplicateurs f_P commutent (prop. 1).

§ 2 — *Proposition 2. Si* $T \in FL^p$, $f_P \cdot T$ *est la seule distribution appartenant à* FL^p, *égale a* T *dans l'intérieur* $\overset{\circ}{P}$ *de* P, *et de support contenu dans* P.

Démonstration. Comme $f_P \cdot T$ a les propriétés indiquées, il reste à montrer qu'il est impossible qu'une distribution $S \neq 0$, ayant son support dans la frontière $\dot{P}$ de P, appartienne à FL^p. Or si S avait ces propriétés, il existerait une distribution $\varphi S \neq 0$, de FL^p, ayant son support dans une variété linéaire, donc dans un hyperplan, qu'on pourrait supposer, par déplacement, être l'hyperplan $x_1 = 0$. Mais l'expression[1] d'une telle distribution montre que son image de Fourier, somme de produits de puissances de y_1 par des fonctions ou distributions indépendantes de y_1, ne peut pas être dans L^p.

Corollaire 1. Pour que $T \in FL^p$ *ait son support dans* P, *il faut et il suffit que* $T = f_P \cdot T$.

Corollaire 2. Si $P_1, P_2, \ldots P_N$ *sont les polyèdres projectifs à n dimension d'une triangulation finie de* R^n, FL^p *est la somme directe topologique des* $f_{P_\nu} \cdot (FL^p)$, $f_{P_\nu} \cdot (FL^p)$ *étant l'espace des distributions de* FL^p *à support dans* P_ν.

Les opérateurs f_{P_ν} vérifient en effet $f_{P_i} \circ f_{P_j} = \delta_{ij}\, f_{P_i}$, $\sum_\nu f_{P_\nu} = 1$.

§ 3 — Soient p, q, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, $1 < r < \infty$, et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Il existe alors un produit multiplicatif, opération bilinéaire de $FL^p \times FL^q$ dans FL^r, et, une dualité entre FL^p et $FL^{p'}$, définies par transformation de Fourier.

Proposition 3. Si $R \in FL^p$, $S \in FL^q$, $T \in FL^{p'}$ *et si* f_P *est la fonction caractéristique d'un polyèdre projectif* P, *on a*

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} f_P \cdot (RS) = (f_P \cdot R) S = R (f_P \cdot S) \\ < f_P \cdot R,\ T > \, = \, < R,\ f_P \cdot T > \quad \text{(transposition)} \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de le voir pour $R, S, T \in (D)$ et c'est alors trivial. D'ailleurs tout multiplicateur sur FL^p est multiplicateur sur $FL^{p'}$, et la 2è formule est toujours vraie.

Corollaire 1. — Si R *et* S (resp. T) *ont leur support dans 2 polyèdres projectifs* P, Q, *sans point intérieur commun,* RS (resp. $< R, T >$) $= 0$.

Car $R = f_P \cdot R$, $S = f_Q \cdot S$, et $RS = (f_P f_Q) \cdot RS = 0$.

---

[1] *TD*, formules (III,10; 5) et (IV,5; 7).

Corollaire 2. Si $P_1, P_2 \ldots P_N$ sont les polyèdres projectifs d'une triangulation finie de R^n, les décompositions en sommes directes de FL^p et $FL^{p'}$ sont duales l'une de l'autre.

Corollaire 3. Si P est un polyèdre projectif, les espaces $f_P \cdot (FL^p)$: $f_P \cdot (FL^{p'})$, des distributions de FL^p, $FL^{p'}$, ayant leurs supports dans P, sont duals l'un de l'autre: l'orthogonal de $f_P \cdot (FL^p)$ est $f_Q \cdot (FL^{p'})$, $Q = \complement P$.

Remarque. Une fonction holomorphe entière $F(z_1, z_2 \ldots z_n)$ sera dite de type exponentiel A si

$$(5) \qquad \limsup_{|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|\to\infty} \frac{\log|F(z_1, \ldots z_n)|}{|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|} = A.$$

Alors le sous-espace fermé $L^p(R^n; C)$ de $L^p(R^n)$ formé des fonctions analytiques entières de type exponentiel $\leq C$ a pour dual le sous-espace $L^{p'}(R^n; C)$ de $L^{p'}$; car, par le théorème de Paley-Wiener, on se ramène au corollaire 3 dans le cas où le polyèdre est un cube.

Mais si on définissait le type exponentiel B par

$$(6) \qquad \limsup_{\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2}\to\infty} \frac{\log|F(z_1, z_2 \ldots z_n)|}{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2}} = B,$$

le théorème de Paley-Wiener nous amènerait à un corollaire 3 mais où P serait une boule: le résultat serait faux (prop. 4).

§ 4. — On peut se demander dans quelle mesure on peut remplacer les polyèdres par d'autres volumes. La proposition suivante montre que le caractère linéaire de la frontière est essentiel.

Proposition 4. — La fonction caractéristique f_B de la boule unité de R^n, $n \geq 2$, n'est pas un multiplicateur sur FL^p, pour $p > \frac{2n}{n-1}$ ou $p < \frac{2n}{n+1}$.

Démonstration. Soit $\mu_x(R)$ la mesure formée de la masse $+1$ répartie avec homogénéité sur la sphère $|x| = R \neq 0$. On a

$$(7) \qquad F(\mu_x(R)) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi|y|R}\right)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|y|R),$$

J fonction de Bessel.

Alors, pour $|y| \to \infty$, $F(\mu_x(R)) = O\left(\frac{1}{|y|^{\frac{n-1}{2}}}\right)$, d'où $\mu_x(R) \in FL^p$, pour $p > \frac{2n}{n-1}$.

Par ailleurs, $\mu_x(R)$ dépend continûment de $R \neq 0$ dans FL^p. On conçoit alors que $f_B \cdot \mu_x(1)$ n'ait pas de sens: plus précisément, si f_B était un multiplicateur sur FL^p, $f_B \cdot \mu_x(1)$ serait limite dans FL^p de $f_B \cdot \mu_x(R)$ pour R tendant vers 1; or, pour $R > 1$, $f_B \cdot \mu_x(R) = 0$, et pour $R < 1$, $f_B \cdot \mu_x(R) = \mu_x(R)$, qui tend vers $\mu_x(1) \neq 0$, d'où une contradiction.[1] Le résultat relatif à $p < \frac{2n}{n+1}$ s'obtient par transposition. Il se passerait dans ce cas le phénomène suivant: pour une fonction $g \in FL^p$, on peut définir $< g, \mu_x(R) >$, moyenne de g sur la sphère de rayon R, et cette moyenne dépend continuement de R; d'où l'impossibilité de multiplier par la fonction caractéristique f_B.

Ce contre-exemple résout aussi par la négative un autre problème. Disons qu'une distribution T est, au voisinage d'un point $a \in R^n$, dans FL^p, si elle coïncide dans un voisinage de a avec une distribution de FL^p. Cette propriété est-elle invariante par un homéomorphisme analytique d'un voisinage de a sur un autre, laissant a fixe? Il n'en est rien, au moins pour $n \geq 2$ puisqu'un homéomorphisme analytique peut transformer le voisinage d'un point de la sphère unité $|x| = 1$ en un autre, en amenant la sphère sur un hyperplan tangent: or la sphère peut porter une mesure appartenant à un FL^p, alors qu'un hyperplan ne le peut pas (Ce résultat reste valable pour FL^1 et FL^{∞} dans R^n, $n \geq 3$: car alors la sphère peut porter une double couche qui soit dans FL^{∞}, alors qu'un hyperplan ne le peut pas).

---

[1] Cette même mesure μ m'a déjà servi à donner un autre contre-exemple: »Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts». Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 227, 1948, p. 424—426.

Tryckt den 19 jan. 1953.
Håkan Ohlssons boktryckeri, Lund.