Laurent Schwartz

Transformation de Laplace des distributions

Comm. Sém. Math. Univ. Lund, (1952), p. 196-206, Tome suppl.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

Reprinted from Communications du séminaire mathématique de l'université de Lund, tome supplémentaire (1952), dédié à Marcel Riesz.

Transformation de Laplace des distributions.

Par

Laurent Schwartz.

En hommage au Professeur Marcel Riesz.

La transformation de Laplace des fonctions d'une variable a été abondamment étudiée (théorie et applications) par DOETSCH, WIDDER, etc... Pour plusieurs variables, les travaux sont plus récents: BOCHNER, LERAY, MACKEY, GÅRDING,[1] etc... Par ailleurs, il y a lieu de remarquer que c'est spécialement dans la transformation de Laplace que les distributions ont été utilisées par les électriciens avant d'être mathématiquement justifiées ($\delta, \delta', \delta''$... comme les objets dont les images sont $1, p, p^2, \ldots$).[2] Des travaux récents de GARNIR [3] traitent de la transformation de Laplace des distributions.

Il nous a paru utile de donner in extenso le formalisme théorique de la transformation de Laplace des distributions. Le lecteur se convaincra aisément qu'il n'y a ici qu'une utilisation immédiate de la technique courante des distributions.[4]

---

[1] DOETSCH. »Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation». Berlin, Springer, 1937.

WIDDER. »Laplace Transform.» Princeton University Press, 1946.

BOCHNER. »Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals». American Journal of Mathematics, 59 (1937), p. 732.

GÅRDING. »Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients». Acta Mathematica, 85 (1950), p. 1.

LERAY. Conférence au Séminaire Bourbaki, ou cours à l'Institute for Advanced Study de Princeton, 1951.

MACKEY. »Laplace Transform for locally compact abelian groups». Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 34 (1948), p. 156.

[2] Il faudrait d'ailleurs dresser de nouvelles tables avec les distributions!

[3] Nous reviendrons ultérieurement sur les questions étudiées par GARNIR (transformation de Laplace partielle par rapport à une partie des variables). Dans une note non publiée, GARNIR donne un formalisme qui, s'il ne donne pas des conditions nécessaires et suffisantes, a le grand mérite d'être parfaitement élémentaire.

[4] Nous supposerons connu le contenu de notre livre, Théorie des Distributions, tome I et II, Paris, Hermann, 1950—51, auquel nous renverrons par TD.

§ 1. Produits d'une distribution par des exponentielles.

Soient $X^n = R^n$ un espace vectoriel réel à n dimensions, $\Xi^n = R^n$ son dual, $\Pi^n = \Xi^n + i\,\Xi^n$ l'espace vectoriel à n dimensions complexes canoniquement construit sur Ξ^n (ou espace des formes linéaires à valeurs complexes sur X^n).

Pour $x = (x^1, x^2, \dots x^n) \in X^n$, $p = (p^1, p^2, \dots p^n) \in \Pi^n$ ($p^j = \xi^j + i\eta^j$, $p = \xi + i\eta$, $\xi \in \Xi^n$, $\eta \in \Xi^n$) nous poserons $px = p^1 x^1 + \dots + p^n x^n$, produit scalaire (à valeurs complexes).

Soit maintenant $T \in \mathscr{D}'$ une distribution sur X^n. L'ensemble des $p \in \Pi^n$ pour lesquels $\exp(-px)\,T$ est une distribution tempérée ($\in \mathscr{S}'_x$) est évidemment un »cylindre» $\Gamma + i\Xi^n$ défini par $\xi \in \Gamma$, où Γ est un ensemble convenable de Ξ^n; car, quel que soit $\eta \in \Xi^n$, $\exp(-i\eta x)\,S$ est évidemment tempérée dès que S est tempérée.

(De plus l'application $(\eta, S) \to \exp(-i\eta x)\,S$ de $\Xi^n \times \mathscr{S}'$ dans $\mathscr{S}'$ est continue).

Proposition 1. — L'ensemble Γ est convexe.

Soient en effet ξ_1 et $\xi_2 \in \Gamma$. Pour $0 \leq t \leq 1$, posons $\xi = t\xi_1 + (1-t)\,\xi_2$; la quantité $\exp(-\xi x) = [\exp(-\xi_1 x)]^t\,[\exp(-\xi_2 x)]^{1-t}$ est comprise entre les deux quantités $\exp(-\xi_1 x)$, $\exp(-\xi_2 x)$, donc majorée par leur somme. Si nous posons

$$\alpha(x;\xi) = \exp(-\xi x)/[\exp(-\xi_1 x) + \exp(-\xi_2 x)] \tag{1}$$

c'est une fonction continue bornée de x, et on voit qu'il en est de même de toutes ses dérivées partielles en x. Autrement dit $\alpha \in \mathscr{B}_x = (\mathscr{D}_{L^\infty})_x$.

Nous avons alors

$$\exp(-\xi x)\,T = \alpha\,[\exp(-\xi_1 x)\,T] + \alpha\,[\exp(-\xi_2 x)\,T] \tag{2}$$

Comme le produit d'une distribution $\in \mathscr{S}'$ et d'une fonction $\in \mathscr{B}$ est dans $\mathscr{S}'$, la proposition est démontrée.

Un index terminologique placé à la fin du tome II renseignera sur toutes les notations utilisées ici.

Nous avons appelé x la variable du côté objet, $p = \xi + i\eta$ la variable du côté image. Contrairement à notre livre (TD, tome II, chap. VII), nous avons appelé $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier définie par l'intégrale $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ixy)\,dx$ et non $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-2i\pi xy)\,dx$, de façon à avoir pour transformée de Laplace $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-px)\,f(x)\,dx$; alors $\overline{\mathscr{F}}$ est défini par $f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\exp(+ixy)\,dy$; ceci dans le but de simplifier les écritures.

Plus généralement, si $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_l$ sont l points fixes de Γ, ξ un point de leur enveloppe convexe, $p=\xi+i\eta$, la fonction

$$(3) \qquad a(x; p)=\exp(-px) \Big/ \left[\sum_{j=1}^{j=l} \exp(-\xi_j x)\right]$$

est dans $\mathscr{B}_x$. En effet elle est bornée; et chacune de ses dérivées partielles en x, combinaison finie (à coefficients bornés si η reste borné) de produits de cette fonction par des fonctions analogues où p est remplacé par $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_l$ (donc toutes bornées par 1), est bornée sur X^n pour η borné.

Par ailleurs chacune de ses dérivées partielles en x, ξ, η, est fonction continue de ces 3 variables et majorée par un polynome en x (pour η borné). Cela exprime que $(\xi, \eta) \to a$ est une fonction indéfiniment différentiable de ξ, η, à valeurs dans $(\mathscr{O}_M)_x$. Si de plus l'enveloppe convexe des l points ξ_j a un intérieur non vide dans Ξ^n, $p \to a$ est une fonction holomorphe de p à valeurs dans $(\mathscr{O}_M)_x$.

Comme on a toujours

$$(4) \qquad \exp(-px)\, T = \sum_{j=1}^{j=l} a(x, p) \left[\exp(-\xi_j x)\, T\right], \text{ on aura:}$$

Proposition 2. — *La distribution* $\exp(-px)\, T \in \mathscr{S}'_x$ *est une fonction indéfiniment différentiable de* ξ, η, *(à valeurs dans* $\mathscr{S}'_x$*) tant que* ξ *reste dans l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points* ξ_j $(j=1, 2 \dots l)$ *de* Γ; *elle est fonction holomorphe de* p *(à valeurs dans* $\mathscr{S}'_x$*) tant que* ξ *reste dans l'intérieur* $\mathring{\Gamma}$ *de* Γ.

Remarquons que, si par exemple Γ est constitué de la boule fermée $|\xi| \leq 1$ et si ξ_0 est un point de la sphère $|\xi|=1$, cette proposition n'affirme la continuité de $\exp(-\xi x)\, T_x$ (dans $\mathscr{S}'_x$) lorsque ξ tend vers ξ_0, que si l'angle de $\xi-\xi_0$ et de l'hyperplan tangent à la sphère reste borné inférieurement par un nombre $\varepsilon>0$. On peut montrer par un contre-exemple que ce genre de restrictions est nécessaire. Mais si on sait que $\exp(-\xi x) T$ est bornée dans $\mathscr{S}'_x$, lorsque x parcourt une partie A de Γ, elle est une fonction continue de $\xi \in A$ à valeurs dans $\mathscr{S}'_x$, car elle est fonction continue de ξ à valeurs dans $\mathscr{D}'_x$, et sur une partie bornée de $\mathscr{S}'_x$ (donc relativement compacte), les topologies de $\mathscr{S}'$ et de $\mathscr{D}'$ sont identiques. Comme ses dérivées partielles en ξ (dans $\mathscr{D}'_x$) sont ses produits par des polynomes en x, donc dans $\mathscr{S}'_x$ et bornées dans $\mathscr{S}'_x$, c'est une fonction indéfiniment différentiable de $\xi \in A$ à valeurs dans $\mathscr{S}'_x$.

Proposition 3. — *Si* ξ *varie dans un compact* K *de* $\mathring{\Gamma}$, *il existe un nombre* $\varepsilon>0$ *tel que* $\exp\left[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}-px\right] T_x$ *reste borné dans* $\mathscr{S}'_x$ *pour* $\xi \in K$, *tant que* η *reste borné, et c'est une fonction holomorphe de* p *à valeurs dans* $\mathscr{S}'_x$.

En effet, pour ε assez petit, l'ensemble des $\xi+b$, $\xi\in K$, $|b|\leq\varepsilon$ reste dans l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points ξ_j $(j=1, 2.\dots l)$ de Γ.

Soit alors

$$\beta(x;p)=\exp\left(\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\right)\alpha(x;p). \tag{5}$$

On a

$$|\beta(x;p)|\leq\exp(\varepsilon)\exp(\varepsilon|x|)\ \alpha(x;p)$$

$$\leq\exp(\varepsilon)\ \underset{|b|\leq\varepsilon}{\operatorname{Max}}\exp(-bx)\ \ \alpha(x;p)\leq\underset{|b|\leq\varepsilon}{\operatorname{Max}}\exp(\varepsilon)\ \alpha(x;p+b)$$

qui est majorée, d'après l'hypothèse, quand η reste borné.

Chaque dérivée partielle en x de $\beta(x;p)$ reste bornée dans les mêmes conditions car elle est combinaison linéaire finie de produits de dérivées de α, majorées comme α elle-même, par des dérivées de $\exp\left(\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\right)$, bornées comme cette fonction elle-même.

Donc pour tout p, tel que $\xi\in K$, $\beta(x;p)$ est dans $\mathscr{B}_r$, donc dans $(\mathscr{O}_M)_x$; et elle est fonction holomorphe de p à valeurs dans $(\mathscr{O}_M)_x$.

On a alors

$$\exp\left[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}-px\right]T=\sum_{j=1}^{j=l}\beta(x;p)\left[\exp(-\xi_j x)\ T\right] \tag{6}$$

donc cette distribution est bornée dans $\mathscr{S}'_r$ pour η borné, et fonction holomorphe de p à valeurs dans $\mathscr{S}'_x$. C. Q. F. D.

Corollaire. Pour $\xi\in\mathring{\Gamma}$, $\exp(-px)\ T$ *est dans* $(\mathscr{O}'_c)_x$, *c'est une fonction holomorphe de* p *à valeurs dans* $(\mathscr{O}'_c)_x$.

En effet, elle est le produit de $\exp\left[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}-px\right]T$, fonction holomorphe de p à valeurs dans $\mathscr{S}'_r$, par $\exp\left[-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\right]\in\mathscr{S}$.

On voit qu'on pourrait dans l'énoncé de la prop. 3, remplacer $\mathscr{S}'$ par $(\mathscr{O}'_c)$.

Remarque. On pourrait remplacer $\mathscr{S}'_r$ par d'autres espaces faisant intervenir des hypothèses plus restrictives de régularité locale; alors la prop. 3 s'étendrait sans difficulté.

Par exemple si T est une fonction f et si lorsque ξ est dans un convexe Γ, $\exp(-\xi x)\ f$ est dans $L^k(X^n)$, alors lorsque ξ est dans Γ, $\exp(-px)\ f$ est le produit d'une fonction de L^l par une fonction à décroissance rapide $(\exp(-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}),\ \varepsilon$ convenable). Si pour $\xi\in\Gamma$, $\exp(-\xi x)\ f$ est dans $(\mathscr{O}_M)$, alors pour $\xi\in\mathring{\Gamma}$, $\exp(-px)\ f$ est dans $\mathscr{S}$. Naturellement à $T\in\mathscr{D}'$, et à tout espace de distributions tel que $\mathscr{S}'$, L^l, $\mathscr{O}_M$, etc. ... est associé un convexe Γ, qui varie avec cet espace.

§ 2. L'espace de distributions $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ associé à un ensemble convexe non vide Γ de Ξ^n.

Nous appellerons $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ l'ensemble des distributions $T \in \mathscr{D}'_x$ telles que $\exp(-\xi x)\, T$ soit dans $\mathscr{S}'_r$, pour tout $\xi \in \Gamma$. L'espace $\mathscr{S}'_x$ usuel correspond à $\Gamma = \{0\}$.

$\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ sera muni de la topologie suivante: des $T_j \in \mathscr{S}'_r(\Gamma)$ convergeront vers 0 si, pour tout $\xi \in \Gamma$, les $\exp(-\xi x)\, T_j$ convergent vers 0 dans $\mathscr{S}'_r$ (auquel cas les $\exp(-px)\, T_j$ convergent vers 0 dans $\mathscr{S}'_r$, uniformément pour η borné et lorsque ξ parcourt l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de Γ, d'après la prop. 2); c'est la topologie la moins fine pour laquelle les applications linéaires $T \to \exp(-\xi x)\, T$ de $\mathscr{S}'_r(\Gamma)$ dans $\mathscr{S}'_r$ soient continues. L'espace $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ est localement convexe, séparé, complet. On introduira de même l'espace $(\mathscr{O}')_x(\Gamma)$ (ou d'autres espaces analogues si l'on a en vue des applications déterminés). On a

$$(\mathscr{O}'_c)_x(\Gamma) \subset \mathscr{S}'_x(\Gamma) \subset (\mathscr{O}'_c)_x(\mathring{\Gamma})$$

et les espaces $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$, $(\mathscr{O}'_c)_x(\Gamma)$ sont identiques (vectoriellement et topologiquement) si Γ est ouvert.

Proposition 4. —Pour $S \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$, $T \in (\mathscr{O}'_c)_x(\Gamma)$, le produit de composition $S * T$ est défini et appartient à $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$; l'application bilinéaire $(S, T) \to$ $\to S * T$ de $\mathscr{S}'_x(\Gamma) \times (\mathscr{O}'_c)_x(\Gamma)$ dans $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ est hypocontinue.[1]

Nous définirons $S * T$ par la formule

$$\exp(-px)(S * T) = [\exp(-px)\, S] * [\exp(-px)\, T] \quad \text{pour } \xi \in \Gamma, \text{ ou} \tag{7}$$

$$S * T = \exp(px)\, [(\exp(-px)\, S) * (\exp(-px)\, T)]. \tag{8}$$

Pour p choisi une fois pour toutes ($\xi = \Re p \in \Gamma$), la formule (8) définit explicitement $S * T$; cette définition sera valable et la proposition 4 aussitôt démontrée si le résultat est indépendant de p.

Soit alors α_j une suite de fonctions $\in \mathscr{D}_x$, telle que les $1 - \alpha_j$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact en restant bornées sur X^n, chacune de leurs dérivées ayant la même propriété.

Alors les $S_j = \alpha_j S$, $T_j = \alpha_j T$ convergent vers S, T, respectivement dans $\mathscr{S}'_r(\Gamma)$, $(\mathscr{O}')_x(\Gamma)$ (ce qui prouve que $\mathscr{E}'$, et même $\mathscr{D}_r$ par régularisation, est dense dans ces espaces). On a, quel que soit p, la formule (8′), identique à (8), mais où S et T sont remplacées par S_j et T_j. Mais les

[1] Nous appelons *hypocontinue* ce que nous appelions *séparément* continue dans TD: continu par rapport à chacune des variables, uniformément lorsque l'autre reste bornée.

$\exp(-px)\,S_j = \alpha_j\,[\exp(-px)\,S]$ convergent vers $\exp(-px)\,S$ dans $(\mathcal{O}'_c)_x$, si $\xi \in \Gamma$. De même les $\exp(-px)\,T_j$ convergent vers $\exp(-px)\,T$ dans $\mathcal{S}'_x$.

Le 2ème membre de (8′) converge dans $\mathcal{D}'_x$ vers le 2ème membre de (8). Cela prouve que $S_j * T_j$ a pour limite (dans $\mathcal{D}'_x$) ce 2ème membre, et comme $S_j * T_j$ est indépendant de p, le 2ème membre de (8) est independant de p, pour $\xi \in \Gamma$, C. Q. F. D.

Cette démonstration, qui montre de plus que le produit de composition ainsi défini $S * T$, est limite dans $\mathcal{D}'_t$ des $S_j * T_j$, montre que si $S * T$ est défini pour une autre raison par un autre procédé (l'un quelconque de ceux qui sont indiqués dans TD, tome II), le résultat trouvé est le même.

Corollaire. — Si Γ est ouvert, $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ est une algèbre commutative pour le produit de composition, et celui-ci est une application bilinéaire continue de $\mathcal{S}'_x(\Gamma) \times \mathcal{S}'_x(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$.

Cela résulte de ce que $\mathcal{S}'_x(\Gamma) = (\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$, de ce que $(\mathcal{O}'_c)$ est une algèbre pour la composition et de ce que celle-ci est une opération continue.[1]

§ 3. Transformation de Laplace sur $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$.

Soit Γ un ensemble convexe non vide de Ξ^n. Pour ξ fixé dans Γ cherchons la transformée de Fourier de $\exp(-\xi x)\,T_x$, considérée comme distribution en x; nous écrirons cette transformée de Fourier comme une distribution en η, appartenant à $\mathcal{S}'_\eta$ $(\eta \in \Xi^n)$, dépendant du paramètre $\xi \in \Gamma$, soit

$$(E(\xi))_\eta = [\mathcal{F}_{(x)}(\exp(-\xi x)\,T_x)]_\eta \tag{9}$$

(qui est la fonction $\int_{X^n} \exp\left[-(\xi + i\eta)\,x\right] T_x\,dx$ si cette intégrale a un sens c. à. d. si $\exp\left(-(\xi + i\eta)\,x\right) T_x$ est dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_x$).

Proposition 5. — $\xi \to (E(\xi))_\eta$ est une application de Γ dans $\mathcal{S}'_\eta$, indéfiniment différentiable lorsque ξ parcourt l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de Γ. Si d est une dérivation suivant un vecteur de Ξ^n appartenant à la variété linéaire V engendrée par Γ, on a

$$(d_\xi + i d_\eta)\,(E(\xi))_\eta = 0 \tag{10}$$

aux points ξ qui sont intérieurs à Γ dans V.[2]

[1] TD, tome II. p. 104.

[2] d_ξ est la dérivation d appliquée à $(E(\xi))_\eta$, fonction de ξ à valeurs dans $\mathcal{S}'_\eta$; d_η est, pour ξ fixé, la dérivation d appliquée à $(E(\xi))_\eta$, distribution $\in \mathcal{S}'_\eta$.

Réciproquement si $\xi \to (E(\xi))_\eta$ *est une application de Γ dans $\mathscr{S}'_\eta$ ayant les propriétés précédentes, il existe une distribution $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ et une seule, telle que* $(E(\xi))_\eta = [\mathscr{F}_{(x)}(\exp(-\xi x)\, T_x)]_\eta$.

Soit en effet $(T(\xi))_\eta = [\overline{\mathscr{F}}_{(\eta)}(E(\xi))_\eta]_x$. Il est équivalent d'écrire (10) ou

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}(T(\xi))_x + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a^\nu x^\nu (T(\xi))_x = 0 \tag{11}$$

pour tout vecteur $a = (a^1, a^2, \dots a^n) \in V$ (avec $\xi = (\xi^1, \xi^2 \dots \xi^n)$, $x = (x^1, x^2, \dots x^n)$), lorsque ξ parcourt l'intérieur de Γ dans V. Ceci est encore équivalent à

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\Big[\exp(\xi x)\,(T(\xi))_x\Big] = 0. \tag{12}$$

(le crochet étant considéré comme fonction de ξ à valeurs dans $\mathscr{D}'_x$).

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\exp(\xi x)\,(T(\xi))_x \in \mathscr{D}'_x$ soit indépendante de ξ quand ξ parcourt l'intérieur de Γ dans V, donc par continuité quand ξ parcourt Γ; donc il faut et il suffit qu'il existe une distribution $T \in \mathscr{D}'_x$ telle que

$$(T(\xi))_x = \exp(-\xi x)\, T_x, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarquons que, pour que T_x converge vers 0 dans $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$, il faut et il suffit que $(E(\xi))_\eta$ converge vers 0 dans $\mathscr{S}'_\eta$, pour tout $\xi \in \Gamma$, auquel cas la convergence est uniforme dans l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de Γ.

Définition. Cette application $\xi \to (E(\xi))_\eta$ de Γ dans $\mathscr{S}'_\eta$ s'appelle la transformée de Laplace de $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$, et se note $(\mathscr{L}T(\xi))_\eta$ ou simplement $\mathscr{L}T$.

Proposition 6. — Si Γ est ouvert, la transformée de Laplace de $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ est une application indéfiniment différentiable de Γ dans $(\mathscr{O}_M)_\eta$, et de plus

$$(E(\xi))_\eta = E(\xi, \eta) = F(\xi + i\eta) = F(p), \tag{13}$$

où F est une fonction holomorphe de p dans $\Gamma + i\,\Xi^n$, qu'on appellera encore la transformée de Laplace de T.

Réciproquement, toute fonction holomorphe $F(p)$ sur $\Gamma + i\,\Xi^n$, telle que, pour tout compact K de Γ, F soit majorée sur $K + i\,\Xi^n$ par un polynome en η, est transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathscr{S}'_x(\Gamma)$ unique.

1°. — *La condition est nécessaire.* On pourrait le déduire de la prop. 5, mais c'est évident directement. Le fait que $\mathscr{S}'_\eta$ puisse être remplacé par $(\mathscr{O}_M)_\eta$ résulte du corollaire de la proposition 3; de même, puisque $\exp(-px)\,T_x$ est une fonction holomorphe de p à valeurs dans $(\mathscr{O}'_c)_x$, $F(p)$ qui ici est exactement l'intégrale

$$F\,(p)=\int_{X^n}\Big[\exp\,(-px)\;T_x\Big]\,dx, \tag{14}$$

est une fonction holomorphe de p.

2°. — *La condition est suffisante.*

Si, sur $K+i\,\Xi^n$, F est majorée par un polynome, la majoration classique par l'intégrale de Cauchy montre que toute dérivée partielle en ξ ou η de F est majorée aussi par un polynome (de degré fixe) en η; alors $\xi\to F\,(\xi+i\,\eta)$ est une application indéfiniment différentiable de Γ dans $(\mathscr{O}_M)_\eta$ donc dans $\mathscr{S}'_\eta$; comme de plus F est holomorphe, elle vérifie les conditions de Cauchy $(d_\xi+i\,d_\eta)\,F\,(\xi+i\,\eta)=0$ $\Big(d$, dérivation suivant un vecteur arbitraire; si $d=\dfrac{\partial}{\partial\xi^\nu}\,(\nu=1,2,\,..n),\,d_\xi+i\,d_\eta=\dfrac{\partial}{\partial\xi^\nu}+i\,\dfrac{\partial}{\partial\eta^\nu}\Big)$, d'où la conclusion en vertu de la prop. 5.

Remarques diverses.

1°. — Pour que des $T_\jmath$ convergent vers 0 dans $\mathscr{S}'_\xi\,(\Gamma)$, il suffit (et il faut s'il s'agit d'une suite, ou d'un filtre à base bornée ou dénombrable) que les $F_\jmath\,(\xi+i\,\eta)$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact de $\Gamma+i\,\Xi^n$ et que, pour tout compact K de Γ, elles restent majorées par un polynome fixe en η sur $K+i\,\Xi^n$.

2°. — Tout polynome en η est majoré par un polynome en p lorsque ξ reste borné (car il est majoré par une puissance de $A+\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}(\eta^\nu)^2$, donc de $B-$ $-\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}(p^\nu)^2)$ donc, pour tout compact K de Γ, $F\,(p)$ est sur $K+i\,\Xi^n$ le produit d'un polynome en p par une fonction $G\,(p)$ holomorphe et bornée.

3°. — Si $\big(E\,(\xi)\big)_\eta\in(\mathscr{D}'_{L^p})_\eta$ (resp. $(\mathscr{O}'_c)_\eta$) pour tout $\xi\in\Gamma$, alors $\big(E\,(\xi)\big)_\eta\in(D_{L^p})_\eta$ (resp. $\mathscr{S}_\eta$) pour tout $\xi\in\Gamma$ et c'est une application indéfiniment différentiable de Γ dans $(\mathscr{D}_{L^p})_\eta$ (resp. $\mathscr{S}_\eta$).

En reprenant en effet les méthodes utilisées dans la démonstration de la prop. 3, on a

$$\big(E\,(\xi)\big)_\eta=\sum_\jmath\Big[\mathscr{F}_{(r)}\exp\big(-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}\big)\Big]*\mathscr{F}_{(r)}\,\beta*\big(E\,(\xi_\jmath)\big)_\eta.$$

Or si $\big(E\,(\xi_\jmath)\big)_\eta\in(\mathscr{D}'_{L^p})_\eta$, $\mathscr{F}\,\beta\in(\mathscr{O}'_c)_\eta$, $\mathscr{F}\exp\,(-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2})\in\mathscr{S}_\eta$, donc $\big(E\,(\xi)\big)_\eta\in(\mathscr{D}_{L^p})_\eta$, C. Q. F. D.

4°. — Nous avons, en passant, montré ce qui suit:

Soit U_x *une distribution tempérée; pour que* $\exp\left(k\sqrt{1+|x|^2}\right) U_x$ *soit une distribution bornée dès que* $k<R$, *il faut et il suffit que* $V(y)=\mathscr{F}U$ *soit une fonction analytique de* y, *prolongeable en une fonction holomorphe de* $\mathfrak{z}=y+iy'$ *pour* $|y'|<R$, *majorée par un polynome* (en y ou en $\mathfrak{z}$) *pour* $|y'|\leq R-\varepsilon$.

5°. — Dans le cas d'une dimension ($n=1$), Γ est un intervalle (a, b) que nous supposerons ouvert. Alors si $T\in\mathscr{S}'_x(a,b)$, $\mathscr{L}T=F(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-px)\,T_x dx$ est une fonction holomorphe de $p=\xi+i\eta$ pour $a<\xi<b$; pour $a+\varepsilon\leq\xi\leq$ $\leq b-\varepsilon$, elle est le produit d'un polynome en p par une fonction $G(p)$ holomorphe et bornée; et réciproquement.

Proposition 7. — Si Γ *est un convexe non vide de* Ξ^n, $S\in\mathscr{S}'_x(\Gamma)$, $T\in(\mathscr{O}'_C)_x(\Gamma)$, *alors* $\mathscr{L}(S*T)$ *est le produit de* $\mathscr{L}S$ *et de* $\mathscr{L}T$, *produit effectué pour tout* $\xi\in\Gamma$ *entre une distribution de* $\mathscr{S}'_\eta$ *et une fonction de* $(\mathscr{O}_M)_\eta$.

Conséquence immédiate de la prop. 4.

Corollaire. — Si Γ *est ouvert, et si* S *et* T *sont dans* $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$, *la fonction holomorphe* $\mathscr{L}(S*T)$ *de la variable complexe* $p\in\Gamma+i\Xi^n$ *est le produit des fonctions holomorphes* $\mathscr{L}S$ *et* $\mathscr{L}T$. *Alors l'algèbre* $\mathscr{S}'_x(\Gamma)$ *est sans diviseurs de* 0.

§ 4. Etude du support d'une distribution à partir de sa transformée de Laplace.

Proposition 8.[1] *— Soit* T_x *une distribution,* $\Gamma\subset\Xi^n$ *l'ensemble convexe attaché à* T (§ 1), *supposé non vide, et* $\xi_0\in\Gamma$.

Pour que le support de T *soit contenu dans le demi-espace* $\xi x\geq A$, $\xi\in\Xi^n$, *il faut et il suffit que, quel que soit* $B<A$, *la distribution*

$$\exp(tB)\exp\left(-(\xi_0+t\xi)\,x\right)T_x \tag{15}$$

soit dans $\mathscr{S}'_x$ *pour tout* t *réel* ≥ 0, *et y reste bornée pour* $t\geq 0$.

1°. — *La condition est nécessaire.*

Nous supposons donc le support de T contenu dans le demi-espace $\xi x\geq A$. Nous allons montrer que $\xi_0\in\Gamma$ entraîne alors $\xi_0+t\xi\in\Gamma$ pour tout $t\geq 0$, et que (15) reste bornée dans $\mathscr{S}'_x$ et même y converge vers 0 pour $t\to+\infty$. Pour cela nous montrerons que, si $\varphi\in\mathscr{D}_x$ a son support assez voisin de l'origine, la régularisée par φ est dans $(\mathscr{O}_M)_x$ et y tend vers 0 pour $t\to+\infty$.

[1] Ce résultat est dû à M. Lions. Avec son accord, je le publie dans cet article à cause des relations étroites qu'il a avec ce qui précède et M. Lions en donnera diverses améliorations dans un article séparé.

Nous pouvons supposer le support de φ contenu dans la bande $|\xi x|\leq\varepsilon$. Posons alors

(16) $$\psi_{(t)}(x)=\exp(t\xi x-2\varepsilon t)\,\varphi(x).$$

ψ_t est majorée par $\exp(-\varepsilon t)$, chacune de ses dérivées partielles en x est majorée par $\exp(-\varepsilon t)\times$polynome en t, donc ψ_t est majorée dans $\mathscr{D}_x$ pour $t\geq 0$, et converge vers 0 dans $\mathscr{D}_x$ pour $t\to+\infty$. Comme alors $\xi_0\in\Gamma$, on peut affirmer que $[\exp(-\xi_0 x)\,T_x*\psi_t]$ qui a son support dans le demi-espace $\xi x\geq A-\varepsilon$ est dans $(\mathscr{O}_M)_x$ pour $t\geq 0$, et converge vers 0 dans $(\mathscr{O}_M)_x$ pour $t\to+\infty$. Mais

(17) $$\exp(tB)\left[\exp\left(-(\xi_0+t\xi)\,x\right)T_x\right]\underset{(x)}{*}\varphi(x)= \\ =\left[\exp(-\xi_0 x)\,T_x*\psi_t\right]\left[\exp(-t\xi x+tB+2\varepsilon t)\right];$$

le 2ème crochet est majoré par $\exp(-\varepsilon t)$ et chacune de ses dérivées en x par $\exp(-\varepsilon t)\times$polynome en t, sur le support du premier crochet, dès que $B\leq A-4\varepsilon$; dans ces conditions le 2ème membre est dans $(\mathscr{O}_M)_x$ et y tend vers 0 pour $t\to+\infty$, donc aussi le 1er membre; et comme ε est aussi petit qu'on veut, la proposition est démontrée.

2°. — *La condition est suffisante.*

Nous supposons maintenant que $\xi_0+t\xi\in\Gamma$ pour tout $t\geq 0$, et que (15) reste bornée dans $\mathscr{S}'_x$ pour $t\geq 0$. Soit ψ une fonction de $\mathscr{D}_x$, de support assez voisin de l'origine, par exemple contenu dans la bande $|\xi x|\leq\varepsilon$. Posons cette fois

(18) $$\varphi_{(t)}(x)=\exp(-t\xi x-2\varepsilon t)\,\psi(x)$$

Comme précédemment $\varphi_{(t)}$ est bornée dans $\mathscr{D}_x$ pour $t\geq 0$. D'après l'hypothèse, la régularisée de (15) par $\varphi_{(t)}$ doit donc être bornée dans $(\mathscr{O}_M)_x$. Mais

(19) $$\exp(tB)\left[\exp\left(-(\xi_0+t\xi)\,x\right)T_x\right]\underset{(x)}{*}\varphi_{(t)}(x)= \\ =\left[\exp(-\xi_0 x)\,T_x*\psi\right]\exp(-t\xi x+tB-2\varepsilon t).$$

Le crochet du 2ème membre est une fonction continue indépendante de T; l'exponentielle qui le multiplie tend vers $+\infty$ pour $t\to+\infty$, si $B\geq A-\varepsilon$, et $\xi x\leq A-4\varepsilon$; donc le support du crochet du 2ème membre est contenu dans le demi-espace $\xi x\geq A-4\varepsilon$; ceci étant vraie pour toute $\psi\in\mathscr{D}_x$ de support assez voisin de l'origine, le support de $\exp(-\xi_0 x)\,T_x$ ou de T_x est lui aussi dans le demi-espace $\xi x\geq A-4\varepsilon$; comme ε est arbitrairement petit, le support de T est dans le demi-espace $\xi x\geq A$.

Remarques.

1°. — Si $\xi_0\in\mathring{\Gamma}$, $\exp(-\xi_0 x)\,T_x\in(\mathscr{O}'_C)_x$, et dans l'énoncé de la proposition on peut remplacer $\mathscr{S}'_x$ par $(\mathscr{O}'_C)_x$.

2°. — La plus grande valeur de A possible telle que le support de T soit contenu dans le demi-espace $\xi x \geq A$, est la borne supérieure des B réels tels que (15) soit borné dans $\mathcal{S}'_t$ pour $t \geq 0$. Cette borne est donc indépendante du choix de $\xi_0 \in \Gamma$. Cette méthode détermine donc tous les demi-espaces contenant le support de T, et par suite l'enveloppe convexe fermée de ce support.

Une transformation de Laplace donne immédiatement:

Corollaire. — Pour que le support de $T \in \mathcal{S}'_t(\Gamma)$ soit contenu dans le demi-espace $\xi x \geq A$, il faut et il suffit que la transformée de Laplace $\big(E(\xi)\big)_\eta$ de T soit telle que, pour tout $B < A$, et au moins un point $\xi_0 \in \Gamma$ (auquel cas c'est vrai pour tout $\xi_0 \in \Gamma$):

$$\exp(tB)\ \big(E(\xi_0 + t\xi)\big)_\eta \tag{20}$$

soit bornée dans $\mathcal{S}'_\eta$ pour $t \geq 0$.

Remarque. Si Γ est ouvert, et si $\big(E(\xi)\big)_\eta = F(\xi + i\eta)$, il faut et il suffit, pour que la condition précédente soit réalisée, que, pour tout point $\xi_0 \in \Gamma$, et tout $B < A$,

$$\exp(tB)\ F(\xi_0 + t\xi + i\eta) \tag{21}$$

soit majorée par un polynome en η (ou p) pour $t \geq 0$.

30 COURS LEOPOLD, NANCY.