Laurent Schwartz

Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions

Canadian J. Math., 3 (1951), p. 503-512.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

ANALYSE ET SYNTHESE HARMONIQUES DANS LES ESPACES DE DISTRIBUTIONS

LAURENT SCHWARTZ

Introduction. Cet article supposera connue la théorie des distributions, pour laquelle nous renverrons à notre livre *Théorie des distributions* (Paris, 1950). Nous noterons par (D) cet ouvrage. Rappelons cependant les définitions des principaux espaces utilisés, sur une variété indéfiniment différentiable V^n: .

($\mathfrak{D}$) = espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact;[1]

($\mathfrak{E}$) = espace des fonctions indéfiniment différentiables à support quelconque;

($\mathfrak{D}'$) = espace des distributions, dual topologique de ($\mathfrak{D}$);

($\mathfrak{E}'$) = espace des distributions à support compact, dual de ($\mathfrak{E}$) .

Il y aura lieu aussi d'utiliser les espaces ($\mathfrak{D}^m$) et ($\mathfrak{E}^m$) de fonctions m fois continûment différentiables (alors ($\mathfrak{D}$) = ($\mathfrak{D}^\infty$), ($\mathfrak{E}$) = ($\mathfrak{E}^\infty$)) et leurs duals ($\mathfrak{D}'^m$), ($\mathfrak{E}'^m$).

D'autre part pour l'étude de la transformation de Fourier, il y a lieu d'utiliser les espaces suivants, sur R^n ou plus généralement sur un groupe abélien localement compact élémentaire:[2].

($\mathfrak{S}$) = espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide;

($\mathfrak{S}'$) = espace des distributions à croissance lente ou tempérées, dual topologique de ($\mathfrak{S}$);

($\mathfrak{O}_M$) = espace des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente;

($\mathfrak{O}'_C$) = espace des distributions à décroissance rapide.

Le but de cet article est l'étude des sous-espaces vectoriels fermés des précédents, invariants par les opérations de multiplication ou de composition.

LES SOUS-MODULES FERMÉS DE L'ESPACE DES DISTRIBUTIONS POUR LE PRODUIT MULTIPLICATIF

Pour la multiplication par des fonctions indéfiniment différentiables sur V^n, ($\mathfrak{D}^m$) et ($\mathfrak{E}^m$) (m fini ou infini) sont des anneaux ou algèbres, ($\mathfrak{D}'^m$) et ($\mathfrak{E}'^m$)

Reçu le 5 septembre, 1940.

[1]A la fin du tome II de (D) figure un index terminologique et index des notations, qu'on pourra consulter pour tous les termes employés dans le présent article. Les espaces de fonctions ou distributions, notés en cursives dans (D), sont notés ici ($\mathfrak{D}$), ($\mathfrak{E}$), ($\mathfrak{O}_M$), ($\mathfrak{S}$), etc. . . . .

[2]Nous entendrons par groupe abélien localement compact élémentaire un produit $R^l \times Z^m \times T^p \times F$, où R = droite réelle, Z = groupe des entiers, T = tore, F = groupe fini. Mais nous emploierons pour simplifier la notation relative à R^n.

des modules sur ces anneaux. Nous appellerons $(\mathfrak{A}^m)$ les anneaux et $(\mathfrak{A}'^m)$ les modules. Un idéal de $(\mathfrak{A}^m)$ ou un sous-module de $(\mathfrak{A}'^m)$ est un sous-espace vectoriel invariant par les multiplications. Nous n'étudierons que ceux de ces sous-espaces qui seront faiblement fermés (faiblement peut être remplacé par fortement pour $(\mathfrak{A}^m)$, ou pour $(\mathfrak{A}')$).

1. Co-support d'un idéal fermé $\mathfrak{J}$ de $(\mathfrak{A}^m)$. Un point a de V^n sera dit un "zéro" de l'idéal fermé $\mathfrak{J}$ si toutes les fonctions ϕ de $\mathfrak{J}$ s'annulent en a. Le co-support de $\mathfrak{J}$ sera par définition l'ensemble de ses zéros; c'est un ensemble fermé $F = F(\mathfrak{J})$ de V^n. Si $\mathfrak{J}$ est "engendré" par une seule fonction ϕ, c'est-à-dire si $\mathfrak{J}$ est le plus petit idéal fermé contenant ϕ, le co-support de $\mathfrak{J}$ qu'on pourra appeler co-support de ϕ, est l'ensemble des zéros ordinaires de ϕ; bien qu'il ne soit pas nécessairement l'adhérence du complémentaire du support de ϕ, la réunion du support et du co-support est V^n, d'où le nom de co-support. Pour un idéal fermé quelconque $\mathfrak{J}$, le co-support est l'intersection des co-supports de n'importe quel système de fonctions ϕ engendrant $\mathfrak{J}$.

L'ensemble des fonctions ϕ qui s'annulent en un point a de V^n est un idéal maximal fermé de $(\mathfrak{A}^m)$. Par ailleurs, à l'aide d'une partition de l'unité,[3] on montre que tout idéal de co-support vide contient $(\mathfrak{D}^m)$, et par suite est identique à $(\mathfrak{A}^m)$ si $(\mathfrak{A}^m) = (\mathfrak{D}^m)$ ou si cet idéal est fermé. Celà montre d'une part que les seuls idéaux maximaux de $(\mathfrak{D}^m)$ et les seuls idéaux maximaux fermés de $(\mathfrak{E}^m)$ sont ceux que nous avons vus plus haut (tandis que $(\mathfrak{D}^m)$ est un idéal dense de $(\mathfrak{E}^m)$, donc tout idéal maximal qui le contient est dense); d'autre part que tout idéal fermé de $(\mathfrak{A}^m)$ distinct de $(\mathfrak{A}^m)$ a un co-support non-vide, ou est contenu dans au moins un idéal maximal fermé. Le co-support d'un idéal fermé $\mathfrak{J}$ indique les idéaux maximaux fermés qui le contiennent.

2. Support d'un sous-module faiblement fermé de $(\mathfrak{A}'^m)$. $(\mathfrak{A}^m)$ est une algèbre, son dual $(\mathfrak{A}'^m)$ est un module sur $(\mathfrak{A}^m)$; il est alors classique que tout sous-module faiblement fermé de $(\mathfrak{A}'^m)$ est l'orthogonal $\mathfrak{J}^\times$ d'un idéal fermé $\mathfrak{J}$ de $(\mathfrak{A}^m)$ et réciproquement. Rappelons que $T \in (\mathfrak{A}'^m)$ et $\phi \in (\mathfrak{A}^m)$ sont dites orthogonales si $T(\phi)=0$. Le co-support F de $\mathfrak{J}$ sera appelé support de $\mathfrak{J}^\times$ et noté indifférement F, $F(\mathfrak{J}^\times)$, $F(\mathfrak{J})$. D'après la définition, $a \in F$ si et seulement si la masse ponctuelle $\delta_{(a)}$ est orthogonale à $\mathfrak{J}$ donc appartient à $\mathfrak{J}^\times$; $F(\mathfrak{J}^\times)$ est l'ensemble des points de V^n pouvant porter une masse ponctuelle $\neq 0$ appartenant à $\mathfrak{J}^\times$. On a le résultat classique suivant:

THÉORÈME 1. *Le support $F(\mathfrak{J}^\times)$ est la réunion des supports usuels des distributions T appartenant à $\mathfrak{J}^\times$.*

D'abord si $a \in F$, il est le support de $\delta_{(a)} \in \mathfrak{J}^\times$. Si maintenant a appartient au support usuel d'une distribution $T \in \mathfrak{J}^\times$, les fonctions $\phi \in \mathfrak{J}$, devant vérifier $\phi T = 0$, sont nécessairement nulles sur le support de T (car si dans un ensemble ouvert ϕ est $\neq 0$, la multiplication par $1/\phi$ y est possible et $\phi T = 0$

[3] Voir (D), chap. I, Théorème II.

entraîne $T = 0$), donc en a, alors $a \in F(\mathfrak{J})$. En particulier le support d'un sous-module fermé non réduit à $\{0\}$ n'est pas vide.

Ce théorème justifie le nom de support. Si un sous-module faiblement fermé $\mathfrak{J}^{\times}$ est engendré par une seule distribution T, $F(\mathfrak{J}^{\times})$ est le support usuel de T, et dans le cas général c'est l'adhérence de la réunion des supports d'un système quelconque de distributions engendrant $\mathfrak{J}^{\times}$. Remarquons que le sous-module engendré par une masse ponctuelle est un sous-module minimal; réciproquement tout sous-module minimal a évidemment un support ponctuel, donc est engendré par une masse ponctuelle. Le théorème I prouve alors que tout sous-module *faiblement fermé* non réduit à $\{0\}$ contient au moins un sous-module minimal. Celà prouve à nouveau que les idéaux maximaux fermés de $(\mathfrak{A}^m)$ sont ceux que nous avons vus, et que tout idéal fermé distinct de $(\mathfrak{A}^m)$ est contenu dans au moins un idéal maximal fermé. Le support d'un sous-module faiblement fermé indique les sous-modules minimaux qu'il contient.

3. Insuffisance du co-support et du support. Pour $m=0$, co-support et support caractérisent respectivement un idéal et un sous-module faiblement fermés. Il n'en est plus ainsi pour $m > 0$. Autrement dit un idéal fermé de $(\mathfrak{A}^m)$ n'est pas l'intersection des idéaux maximaux fermés qui le contiennent; un sous-module faiblement fermé de $(\mathfrak{A}'^m)$ n'est pas nécessairement engendré par les masses ponctuelles qu'il contient. Ainsi l'idéal $\mathfrak{J}^{(k)}$ des fonctions ϕ dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k \leqslant m$ sont nulles en a ou sur une sous-variété U de V^n (de dimensions $< n$) a pour co-support a ou U, quel que soit k; de même le sous-module $\mathfrak{J}^{(k)\times}$ des distributions, couches multiples d'ordre $\leqslant k + 1 \leqslant m + 1$ portées par a ou U a pour support a ou U, quel que soit k. $\mathfrak{J}^{(k)}$ et $\mathfrak{J}^{(k)\times}$ sont d'ailleurs orthogonaux.

Par contre on voit facilement que $\mathfrak{J}^{\times}$ est toujours engendré par les masses ponctuelles $\delta_{(a)}$ placées aux points a d'un voisinage arbitraire Ω du support F. En effet si $\phi \in (\mathfrak{A}^m)$ est orthogonale à tous ces $\delta_{(a)}$, elle est nulle sur Ω, donc orthogonale à toute distribution de $\mathfrak{J}^{\times}$, de support contenu dans $F \subset \Omega$.

4. Anneaux et idéaux ponctuels de $(\mathfrak{A}^m)$. Les fonctions de $(\mathfrak{A}^m)$ qui sont nulles en $a \in V^n$ ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$ forment un idéal fermé; le quotient de $(\mathfrak{A}^m)$ par cet idéal fermé est un anneau $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$ (le même évidemment, que l'on parte de $(\mathfrak{D}^m)$ ou $(\mathfrak{E}^m)$) appelé anneau ponctuel associé à $(\mathfrak{A}^m)$ en a. Cet anneau est de dimension finie pour m fini, et est alors isomorphe au quotient de l'anneau des polynomes à n variables par l'idéal engendré par les monômes de degré $m + 1$. Pour $m = \infty$, $(\mathfrak{A})_{(a)}$, muni de la topologie canonique d'un quotient, est isomorphe à l'anneau des séries formelles à n variables, muni de la topologie faible (convergence de chaque coëfficient). Si maintenant $\mathfrak{J}$ est un idéal quelconque de $(\mathfrak{A}^m)$, son image $\mathfrak{J}_{(a)}$ dans $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$ par la représentation canonique de $(\mathfrak{A}^m)$ dans $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$ est un idéal $\mathfrak{J}_{(a)}$ de $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$, qui sera appelé l'idéal ponctuel associé à $\mathfrak{J}$ en a. $\mathfrak{J}_{(a)}$ est fermé, car dans $(\mathfrak{A})_{(a)}$, tout idéal est fermé.

5. Caractérisation d'un idéal fermé de $(\mathfrak{A}^m)$ par ses idéaux ponctuels.

THÉORÈME II. *Un idéal fermé $\mathfrak{J}$ de $(\mathfrak{A}^m)$ est entièrement caractérisé par ses idéaux ponctuels $\mathfrak{J}_{(a)}$, $a \in V^n$.*

Autrement dit: Pour que $\phi \in (\mathfrak{A}^m)$ appartienne à $\mathfrak{J}$, il faut et il suffit que pour tout point a de V^n, l'image canonique $\phi_{(a)}$ de ϕ dans $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$ appartienne à $\mathfrak{J}_{(a)}$.

L'ensemble des fonctions ϕ de $(\mathfrak{A}^m)$ pour lesquelles $\phi_{(a)}$ est dans un idéal ponctuel $\mathfrak{J}_{(a)} \neq (\mathfrak{A}^m)_{(a)}$ donné en un point a de V^n, est un idéal de $(\mathfrak{A}^m)$ qui peut être appelé "primaire"; il est fermé et n'est contenu que dans un idéal maximal fermé. Le théorème II exprime alors que tout idéal fermé $\mathfrak{J}$ de $(\mathfrak{A}^m)$ est l'intersection des idéaux primaires qui le contiennent.

Le théorème a été démontré pour m fini par M. Whitney,[4] et sa démonstration est délicate. Mais le passage de m fini à m infini est immédiat. Soit en effet $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de $(\mathfrak{A})$. Si la fonction ϕ est telle que, pour tout $a \in V^n$, l'image $\phi_{(a)}$ de ϕ dans $(\mathfrak{A})_{(a)}$ soit dans $\mathfrak{J}_{(a)}$, alors, pour tout m fini, l'image $(\phi^m)_{(a)}$ de ϕ dans $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$ est dans $\mathfrak{J}^m{}_{(a)}$, image de $\mathfrak{J}$ dans $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$; mais $\mathfrak{J}^m{}_{(a)}$ est l'idéal ponctuel associé en a à l'idéal adhérence $\overline{\mathfrak{J}}^m$ de $\mathfrak{J}$ dans $(\mathfrak{A}^m)$; celà prouve que, pour tout m, ϕ est dans $\overline{\mathfrak{J}}^m$, donc dans leur intersection, qui est l'idéal fermé $\mathfrak{J}$. Remarquons que pour $m = 0$, $(\mathfrak{A}^\circ)_{(a)}$ est le corps complexe, $\mathfrak{J}_{(a)}$ ne peut être que $\{0\}$ ou $(\mathfrak{A}^\circ)_{(a)}$, et le théorème redonne la caractérisation de $\mathfrak{J}$ par son co-support.

6. Distributions à support ponctuel d'un sous-module de $(\mathfrak{A}'^m)$. Rappelons[5] qu'une distribution de support ponctuel a est (pour tout système de coordonnées locales) combinaison linéaire finie de dérivées de la masse $\delta_{(a)}$. En transformant par dualité le théorème II, on obtient alors:

THÉORÈME III. *Tout sous-module faiblement fermé de $(\mathfrak{A}'^m)$ est caractérisé par les distributions à support ponctuel qu'il contient (donc engendré par ces distributions; il est l'adhérence faible des combinaisons linéaires finies de ces distributions).*

Soit d'abord m fini. Appelons $(\mathfrak{A}'^m)_{(a)}$, $\mathfrak{J}^\times{}_{(a)}$, les sous-modules de $(\mathfrak{A}'^m)$, $\mathfrak{J}^\times$, formés de celles de leurs distributions dont le support est vide ou réduit à a. $(\mathfrak{A}'^m)_{(a)}$ est le dual de $(\mathfrak{A}^m)_{(a)}$ (dualité entre le quotient par un sous-espace et l'orthogonal de ce sous-espace); dans cette dualité, $\mathfrak{J}^\times{}_{(a)}$ est l'orthogonal de l'idéal ponctuel $\mathfrak{J}_{(a)}$. Alors toute fonction ϕ de $(\mathfrak{A}^m)$ orthogonale à tous les $\mathfrak{J}^\times{}_{(a)}$ est telle que $\phi_{(a)}$ appartienne $\mathfrak{J}_{(a)}$ pour tout a, donc $\phi \in \mathfrak{J}$, ϕ est alors orthogonale à $\mathfrak{J}^\times$; cela prouve bien que l'espace vectoriel somme des $\mathfrak{J}^\times{}_{(a)}$ est faiblement dense dans $\mathfrak{J}^\times$. Pour $m = 0$, nous retrouvons le fait que $\mathfrak{J}^\times$ peut être engendré par les masses ponctuelles qu'il contient et défini par son support.

Passons maintenant à m infini. L'intersection $\mathfrak{J}^{\times(m)}$ de $(\mathfrak{A}'^m)$ avec $\mathfrak{J}^\times$ est,

[4] *On ideals of differentiable functions*, Amer. J. Math., vol. 70 (1948), 635-658.
[5] Voir (D), chap. III, Théorème XXXV.

pour tout m fini, faiblement fermée dans $(\mathfrak{A}'^m)$. Alors les distributions à support ponctuel de $\mathfrak{J}^\times$, d'ordre $\leqslant m$, engendrent $\mathfrak{J}^{\times(m)}$ faiblement dans $(\mathfrak{A}'^m)$, donc faiblement dans $(\mathfrak{A}')$, et par suite aussi fortement à cause de la réflexivité de $(\mathfrak{A})$. Mais toute distribution à support compact est d'ordre fini. La somme des $\mathfrak{J}^\times{}_{(a)}$ est donc dense dans $\mathfrak{J}^\times \cap (\mathfrak{E}')$. Enfin toute distribution T de $\mathfrak{J}^\times$ est limite de distributions αT, $\alpha \in (\mathfrak{D})$, qui sont dans $\mathfrak{J}^\times \cap (\mathfrak{E}')$, donc la somme des $\mathfrak{J}^\times{}_{(a)}$ est bien dense dans $\mathfrak{J}^\times$. Remarquons que si $\mathfrak{J}^\times$ est engendré par des distributions d'ordre $\leqslant m$, il est aussi engendré par les distributions à support ponctuel d'ordre $\leqslant m$ qu'il contient.

7. Equations multiplicatives. Soit H_j une famille quelconque de fonctions de $(\mathfrak{E})$. Les solutions T de la famille d'équations multiplicatives

7.1 $$H_j T = 0$$

forment un sous-module fermé $\mathfrak{J}^\times$ de $(\mathfrak{D}')$, orthogonal à l'idéal $\mathfrak{J}$ de $(\mathfrak{D})$ engendré par les αH_j, $\alpha \in (\mathfrak{D})$. On en déduit:

THÉORÈME IV. *Pour que la distribution T d'ordre m (fini ou infini) soit solution de la famille d'équations multiplicatives* 7.1, *il faut et il suffit qu'elle soit limite dans $(\mathfrak{D}')$ ou faiblement dans $(\mathfrak{D}'^m)$ de combinaisons linéaires finies de distributions à supports ponctuels d'ordre $\leqslant m$, solutions de la famille d'équations.*

En général on approchera les distributions de $\mathfrak{J}^\times$ par des combinaisons linéaires d'une partie seulement des distributions à support ponctuel de $\mathfrak{J}^\times$. Par exemple si G est l'adhérence de l'intérieur $\mathring{F}$ de $F(\mathfrak{J}^\times)$, toute distribution à support ponctuel dans G est limite de distributions à supports ponctuels dans $\mathring{F}$, et toute distribution à support ponctuel dans $\mathring{F}$ est limite[6] de combinaisons finies de *masses* ponctuelles à supports dans $\mathring{F}$ de sorte que $\mathfrak{J}^\times$ est sûrement engendré par l'ensemble des *masses* ponctuelles à supports dans $\mathring{F}$ et des *distributions* de $\mathfrak{J}^\times$ à support ponctuel dans $F - G$.

Par exemple dans R^n, toute solution T de l'équation

7.2 $$(1 - r^2)^l\, T = 0$$

est somme finie[6] de dérivées normales $\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^q$ d'ordres $q \leqslant l - 1$ d'extensions à R^n de distributions définies sur la sphère unité $r = 1$, et comme toute distribution définie sur une variété est limite de combinaisons de masses ponctuelles, T est finalement limite de combinaisons linéaires de dérivées $\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^q$ d'ordres $\leqslant l - 1$ de *masses* ponctuelles portées par la sphère unité.

Dans le cas de la dimension $n = 1$, on peut perfectionner ce qui est dit plus haut. Toute distribution de support ponctuel $a \in F(\mathfrak{J}^\times)$ est limite de combinaisons linéaires de *masses* ponctuelles portées par F dès que a est non isolé

[6]Voir (D), chap V, Théorème VIII.

dans F. Alors toute distribution $T \in \mathfrak{J}^{\times}$ d'ordre $\leqslant m$ est limite de combinaisons linéaires finies de *masses* ponctuelles portées par l'ensemble dérivé de F et des distributions $\in \mathfrak{J}^{\times}$ d'ordre $\leqslant m$ dont le support est ponctuel et isolé dans F.

Les sous-modules fermés de l'espace des distributions pour le produit de composition. Analyse et synthèse harmoniques

Nous supposerons maintenant que la variété V^n est l'espace numérique X^n à n dimensions, ou plus généralement un groupe abélien localement compact X élémentaire, dont le dual Y^n ait n dimensions; nous emploierons cependant les notations du cas particulier où $X^n = R^n$.

Le produit de composition fait de $(\mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{E}')$ des algèbres, de $(\mathfrak{D}')$ et $(\mathfrak{E})$ des modules sur ces anneaux. Un idéal fermé ou un sous-module fermé n'est autre qu'un sous-espace vectoriel fermé invariant par les compositions avec des distributions de $(\mathfrak{E}')$; *c'est aussi un sous-espace vectoriel fermé invariant par les translations du groupe.*

L'impossibilité d'effectuer une transformation de Fourier pour toutes les distributions nous oblige à considérer d'autres espaces que les précédents. Nous étudierons alors $(\mathfrak{S})$, $(\mathfrak{S}')$, $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$ et $(\mathfrak{O}'_{\mathrm{C}})$.

8. Les idéaux et sous-modules multiplicatifs fermés de $(\mathfrak{S})$, $(\mathfrak{S}')$, $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$, $(\mathfrak{O}'_{\mathrm{C}})$. Pour les opérations de *multiplication* vues au paragraphe précédent, $(\mathfrak{S})$ et $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$ sont des algèbres. Comme toute fonction $\phi \in (\mathfrak{S})$ ou $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$ est limite de fonctions $\alpha\phi$, $\alpha \in (\mathfrak{D})$, qui sont dans $(\mathfrak{D})$ et appartiennent à l'idéal fermé engendré par ϕ, le théorème II est vrai sans modification dans $(\mathfrak{S})$ et $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$. De même pour la multiplication, $(\mathfrak{S}')$ et $(\mathfrak{O}'_{\mathrm{C}})$ sont des modules sur $(\mathfrak{S})$, et $(\mathfrak{S}')$ sur $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$, et les théorèmes I et III sont vrais sans modification. Nous pouvons alors opérer une transformation de Fourier et revenir à l'étude des idéaux et sous-modules pour le produit de composition.

9. Les idéaux de composition fermés dans $(\mathfrak{S})$, $(\mathfrak{O}'_{\mathrm{C}})$. Par transformation de Fourier $\mathfrak{F}$, nous trouverons les propriétés des idéaux fermés des algèbres (pour la composition) $(\mathfrak{S})$ et $(\mathfrak{O}'_{\mathrm{C}})$, et des sous-modules fermés (pour la composition) de $(\mathfrak{S}')$ et $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$, modules sur $(\mathfrak{S})$, et $(\mathfrak{S}')$, module sur $(\mathfrak{O}'_{\mathrm{C}})$.

Le co-spectre $F = F(\mathfrak{J})$ d'un idéal fermé $\mathfrak{J}$ de $(\mathfrak{S})$ ou $(\mathfrak{O}'_{\mathrm{C}})$ est le co-support de $\mathfrak{F}\mathfrak{J}$: c'est l'ensemble des points $a \in Y^n$ tels que toutes les fonctions de $\mathfrak{F}\mathfrak{J}$ s'annulent en a. Le co-spectre de tout idéal $\mathfrak{J}$ fermé non-réduit à $\{0\}$ n'est pas vide, et indique les idéaux maximaux fermés qui contiennent $\mathfrak{J}$. Pas plus que le co-support pour les idéaux multiplicatifs, le co-spectre ne peut suffire à caractériser un idéal fermé. Par contre $\mathfrak{J}$ sera caractérisé par les idéaux ponctuels $(\mathfrak{F}\mathfrak{J})_{(a)}$, associés aux différents points a du co-spectre.

10. Les sous-modules de composition fermés dans $(\mathfrak{S}')$ **et** $(\mathfrak{O}_{\mathrm{M}})$. *Le spectre.* Si $\delta_{(a)}$ est une masse ponctuelle $+1$ en $a \in Y^n$, on a $\overline{\mathfrak{F}}\delta_{(a)} = \exp(2i\pi\, a\,.\,x)$.

Le théorème I donne alors, si l'on appelle spectre d'un sous-module fermé $\mathfrak{I}^{\times}$ le support de $\mathfrak{F}\mathfrak{I}^{\times}$:

THÉORÈME V. *Le spectre d'un sous-module fermé* $\mathfrak{I}^{\times}$ *de* $(\mathfrak{S}')$ *ou* $(\mathfrak{O}_M)$, *réunion des spectres usuels des distributions de* $\mathfrak{I}^{\times}$, *est aussi l'ensemble des points a de* Y^n *tels que* $\exp(2i\pi a \,.\, x)$ *soit dans* $\mathfrak{I}^{\times}$. *Le spectre usuel d'une distribution* $T \in (\mathfrak{S}')$ *est aussi l'ensemble des* $a \in Y^n$ *tels que* $\exp(2i\pi a \,.\, x)$ *soit limite de combinaisons linéaires finies de translatées de T.*

La recherche du spectre d'un sous-module est son analyse harmonique. La synthèse harmonique est la reconstitution du sous-module à partir des exponentielles de son spectre. Mais pas plus que pour le support dans le cas multiplicatif, le spectre ne peut suffire à caractériser un sous-module fermé; les exponentielles $\exp(2i\pi a \,.\, x)$ avec $a \in F(\mathfrak{I}^{\times})$, n'engendrent pas $\mathfrak{I}^{\times}$, et la synthèse harmonique est impossible (sauf si sur Y^n toute distribution est une mesure, c'est-à-dire si Y^n est discret, ou X compact). La synthèse harmonique sera possible exceptionnellement si $\mathfrak{F}\mathfrak{I}^{\times}$ peut être engendré par des mesures, c'est-à-dire si $\mathfrak{I}^{\times}$ peut être engendré par des distributions de type positif; en particulier toute distribution T de type positif est limite de combinaisons linéaires finies des exponentielles définies par son spectre. D'autre part, comme nous l'avons vu pour le support, $\mathfrak{I}^{\times}$ est toujours engendré par les exponentielles $\exp(2i\pi a \,.\, x)$ où a parcourt n'importe quel voisinage du spectre F.

11. Génération d'un sous-module fermé par ses exponentielles-polynomes. La transformation de Fourier $\overline{\mathfrak{F}}S$ d'une distribution S d'ordre m de support ponctuel $a \in Y^n$ est une exponentielle-polynome de degré m, produit de exp $(2i\pi a \,.\, x)$ par un polynome de degré m:

11.1 $$\mathfrak{F}D_y{}^p\,\delta_{(a)} = (-2i\pi x)^p \exp(2i\pi a \,.\, x).$$

La transformation de Fourier du théorème II donne alors:

THÉORÈME VI. *Tout sous-module fermé* $\mathfrak{I}^{\times}$ *de* $(\mathfrak{S}')$ *ou* $(\mathfrak{O}_M)$ *est engendré par les exponentielles-polynomes qu'il contient.* (*Il est l'adhérence du sous-espace vectoriel défini par ces exponentielles-polynomes.*)

Comme toute distribution $S = \mathfrak{F}T$ est d'ordre fini m, (S) est engendrée par les distributions à support ponctuel d'ordre $\leqslant m$ du sous-module multiplicatif qu'elle engendre; par suite T est engendrée par les exponentielles-polynomes de degré $\leqslant m$ du sous-espace vectoriel fermé engendré par les translatées de T. La considération d'une partie seulement de ces exponentielles-polynomes pourra parfois suffire.

Soit par exemple T une distribution bornée,[7] $S = \mathfrak{F}\,T$, a un point *isolé* du support F de S. Montrons qu'au voisinage de a, S est une *masse* proportionnelle à $\delta_{(a)}$. Si en effet β est une fonction de $(\mathfrak{D})_y$, de support assez petit, égale à 1 au voisinage de a, S est égale à βS au voisinage de a, et βS est une distribution de support ponctuel a. Alors si $\alpha = \overline{\mathfrak{F}}\beta$, on a $\overline{\mathfrak{F}}(\beta S) = \alpha * T$; mais, T

[7]Voir (D), chap. VI, p. 56 (tome II).

étant bornée et α dans $(\mathfrak{S})$, $\alpha * T$ est une fonction continue bornée, ce qui ne peut être que si c'est non pas une exponentielle-polynome quelconque, mais une exponentielle pure, de sorte que S est bien une masse ponctuelle, au voisinage de a. Dans ce cas, si $\mathfrak{J}^{\times}$ est le sous-module fermé engendré par T, $(\mathfrak{F}\mathfrak{J}^{\times})_{(a)}$ ne contient que des masses ponctuelles. Plus généralement si T est une distribution à croissance polynomiale de degré m, c'est-à-dire produit d'un polynome de degré m par une distribution bornée, $S = \mathfrak{F}T$ est, au voisinage de tout point a isolé de son support F, une distribution ponctuelle d'ordre $\leqslant m$, et $(\mathfrak{F}\mathfrak{J}^{\times})_{(a)}$ ne contient que des distributions d'ordré $\leqslant m$ de support a. Utilisant alors le résultat vu pour les supports dans le cas particulier de la dimension $n = 1$, on obtient:

THÉORÈME VII. *Dans le cas particulier de la dimension $n = 1$, toute distribution T à croissance polynomiale de degré m est limite de combinaisons linéaires finies des exponentielles pures* $\exp(2i\pi a \, . \, x)$, *où a parcourt l'ensemble dérivé de son spectre F, et des exponentielles-polynomes de degré $\leqslant m$*, $P(x) \exp(2i\pi a \, . \, x)$, *où a parcourt les points isolés du spectre F.*

Pour une distribution bornée ($m = 0$), la synthèse harmonique est alors possible, avec les exponentielles-pures définies par le spectre. Ce résultat est spécial à la dimension $n = 1$; nous ignorons s'il est vrai pour $n = 2$, et nous verrons plus loin qu'il est faux dans R^n pour $n \geqslant 3$.

12. Equations de composition. Considérons une famille d'équations de composition

$$K_j * T = 0, \tag{12.1}$$

où les K_j sont des distributions de $(\mathfrak{D}'_C)$, T une distribution de $(\mathfrak{S}')$. Les solutions T forment un sous-module fermé $\mathfrak{J}^{\times}$ de $(\mathfrak{S}')$, orthogonal de l'idéal $\mathfrak{J}$ de $(\mathfrak{S})$ engendré par les $\alpha * K_j$, $\alpha \in (\mathfrak{S})$. On en déduit:

THÉORÈME VIII. *Pour qu'une distribution tempérée T soit solution du système* 12.1, *il faut et il suffit qu'elle soit limite, dans* $(\mathfrak{S}')$ *de combinaisons linéaires finies d'exponentielles-polynomes, solutions du système.*

Par exemple toute solution tempérée T de l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\left(1 + \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)\right)^l T = 0 \tag{12.2}$$

est limite de combinaisons linéaires finies des exponentielles-polynomes $(2i\pi a.x)^q \exp(2i\pi a.x)$, où a parcourt la sphère unité et $q = 0, 1, 2, \ldots l - 1$. (Voir équation 7.2.)

13. Analyse et synthèse harmoniques dans L^∞. Il est naturellement possible de se poser les mêmes questions dans d'autres espaces fonctionnels. Le problème le plus classique est celui de WIENER-BEURLING.[8]

[8] WIENER, *Tauberian theorems.* Ann. of Math., vol. 33 (1932), 1-100. BEURLING, *Un théorème sur les fonctions uniformément bornées et continues sur l'axe réel*, Acta Mathematica, vol. 77 (1945), 127-136.

L'espace L^1 est une algèbre pour la composition, tandis que L^∞ est un module sur cet anneau. Le co-spectre d'un idéal fermé $\mathfrak{I}$ de L^1 est l'ensemble des zéros communs aux fonctions (continues) de $\mathfrak{F}\mathfrak{I}$; le spectre d'un sous-module faiblement fermé $\mathfrak{I}^\times$ de L^∞ est l'ensemble des $a \in Y^n$ tels que l'exponentielle exp $(2i\,\pi\, a.x)$ soit dans $\mathfrak{I}^\times$. (Comme toujours, si $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}^\times$ sont orthogonaux, co-spectre de $\mathfrak{I}$ et spectre de $\mathfrak{I}^\times$ sont symétriques.) Le théorème de WIENER affirme que, si $\mathfrak{I}$ n'est pas L^1 lui-même, son co-spectre n'est pas vide; le théorème de BEURLING affirme que si $\mathfrak{I}^\times$ n'est pas réduit à $\{0\}$, son spectre n'est pas vide. Par ailleurs on peut voir aussi que $\mathfrak{I}^\times$ est sûrement engendré par les exponentielles pures exp $(2i\,\pi\, a.x)$ où a parcourt un voisinage arbitraire Ω du spectre F de $\mathfrak{I}^\times$. Mais la synthèse harmonique est-elle possible avec les seules exponentielles exp $(2i\,\pi\, a.x)$, où a parcourt le spectre F?

14. Identité du spectre-L^∞ et du spectre-($\mathfrak{S}'$). Tout d'abord le théorème de BEURLING ne résulte pas du théorème V. Celui-ci affirme que si $f(x) \in L^\infty$ n'est pas $\equiv 0$, il existe au moins une exponentielle exp $(2i\,\pi\, a.x)$ qui est adhérente, *pour la topologie de* ($\mathfrak{S}'$), au sous-espace vectoriel défini par les translatées de f; cela ne prouve pas que cette exponentielle soit adhérente au même sous-espace vectoriel pour la *topologie faible* de L^∞.

THÉORÈME IX. *Le spectre de $f \in L^\infty$ dans L^∞ est identique à son spectre dans* ($\mathfrak{S}'$).

Le théorème de BEURLING étant admis, soit F_1 le spectre de $f(x)$ dans ($\mathfrak{S}'$) et F_2 son spectre dans L^∞; montrons qu'ils sont identiques (donc identiques au support de $\mathfrak{F}f$). D'abord la topologie faible de L^∞ étant plus fine que la topologie faible de ($\mathfrak{S}'$), on a, comme nous l'avons vu ci-dessus, $F_1 \supset F_2$. Mais si $a \in F_1$ n'était pas dans F_2, on pourrait approcher f dans L^∞ faible, donc dans ($\mathfrak{S}'$) faible, par des combinaisons des exponentielles exp $(2i\,\pi\, b.x)$, $b \in \Omega$, Ω étant un voisinage de F_2 dont l'adhérence $\bar{\Omega}$ ne contient pas a. Par transformation de Fourier, on en déduit que $\mathfrak{F}f$ serait limite dans ($\mathfrak{S}'$) faible de distributions à support dans $\bar{\Omega}$, ce qui est absurde puisque a appartient au support de $\mathfrak{F}f$.

On voit ainsi que la propriété démontrée par M. BEURLING, suivant laquelle f est proportionnelle à une exponentielle si son spectre est ponctuel, devient évidente. Plus généralement toute distribution de croissance polynomiale de degré m et de spectre ponctuel est une exponentielle-polynome de degré m. Généralisations évidentes dans le cas d'un spectre fini. Tout celà est un cas particulier des considérations développées avant le théorème VII.

15. Impossibilité de la synthèse harmonique dans L^∞ sur R^n pour $n \geqslant 3$. Le théorème VII ne prouve pas la possibilité de la synthèse harmonique dans L^∞ sur R^1: car $f(x) \in L^\infty$ est limite dans ($\mathfrak{S}'$) de combinaisons linéaires des exponentielles de son spectre, mais non nécessairement limite dans L^∞ faible.

Montrons maintenant[9] que dans L^∞ sur R^n pour $n \geqslant 3$, une fonction $f(x)$

[9]Résultat déjà publié antérieurement: *Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts.* Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 227 (1948), 424-426.

n'est même pas limite dans $(\mathfrak{S}')$ faible (et par conséquent n'est pas limite dans L^∞ faible) des combinaisons des exponentielles définies par son spectre. Nous allons construire une fonction $f(x)$ bornée telle que $\mathfrak{F}f$ soit une *couche double* portée par la sphère unité de Y^n; alors, $\mathfrak{F}f$ n'étant pas limite dans $(\mathfrak{S}')$ faible de mesures portées par son support, notre affirmation sera prouvée. Dans ce cas, l'approximation de f, qui pourtant est bornée, nécessitera des exponentielles-polynomes, donc des fonctions non bornées, d'où l'impossibilité de toute tentative de synthèse harmonique en demeurant dans L^∞.

Prenons la mesure μ de masse 1 répartie de façon homogène sur la sphère unité de Y^n, et $\mathfrak{F}f = \dfrac{\partial \mu}{\partial y_1}$,

15.1 $$\overline{\mathfrak{F}}\mu = \Gamma(\tfrac{1}{2}n)(\pi|x|)^{-\frac{1}{2}(n-2)} J_{\frac{1}{2}(n-2)}(2\pi|x|),$$

15.2 $$f = -2i\pi x_1 \overline{\mathfrak{F}}\mu.$$

Pour $|x|$ tendant vers ∞, $|J_{\frac{1}{2}(n-2)}(2\pi|x|)| = O(|x|)^{-\frac{1}{2}}$ d'où

15.3 $$|f(x)| = O(|x|^{-\frac{1}{2}(n-3)}),$$

fonction qui est bornée pour $n \geqslant 3$. Remarquons que $\mathfrak{F}f$ est solution de 7.2 pour $l \geqslant 2$, donc f est solution de 12.2 pour $l \geqslant 2$.

Au fur et à mesure que n croît, on trouvera des $f(x)$ bornées dont l'approximation nécessitera des exponentielles-polynomes de degré de plus en plus élevé.

16. Questions non résolues.

16.1. Le théorème III se démontre par dualité à partir du théorème II, donc utilise le théorème de Hahn-Banach. Il serait intéressant de trouver une démonstration directe et de savoir si toute distribution T d'un sous-module fermé est limite d'une *suite* de distributions à support ponctuel du sous-module.

16.2. La synthèse harmonique est-elle possible dans L^∞ sur la droite réelle R^1? Un théorème analogue à VII existe-t-il pour $n = 2$ et la synthèse harmonique est-elle possible dans L^∞ pour $n = 2$?

16.3. Si, pour le produit de composition, on remplace les espaces $(\mathfrak{S})$, $(\mathfrak{O}'_C)$, $(\mathfrak{S}')$, $(\mathfrak{O}_M)$ par $(\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{E}')$, $(\mathfrak{D}')$, $(\mathfrak{E})$ la transformation de Fourier ne donne plus directement de résultats. Les théorèmes VI et VIII sont-ils valables dans les modules $(\mathfrak{E})$ et $(\mathfrak{D}')$? Nous l'avons montré pour la dimension $n = 1$ dans un mémoire antérieur[10] par des méthodes de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe qui ne semblent pas s'étendre à $n > 1$.

Université de Nancy

[10] *Théorie générale des fonctions moyennes périodiques.* Ann. of Math., vol. 48 (1947), 857-928.