ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Les mathématiques en France pendant, et après la guerre

Proc. Second Canadian Math. Congress (Vancouver, 1949).

Toronto : University of Toronto Press, 1951, p.49-67

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES MATHÉMATIQUES EN FRANCE PENDANT, ET APRÈS LA GUERRE

L. SCHWARTZ, *Université de Nancy*

1. La formation des Mathématiciens en France. Après les deux baccalauréats, les futurs mathématiciens font deux années de Mathématiques Spéciales au lycée, en même temps que les futurs ingénieurs et élèves de diverses grandes Écoles. En principe ils entrent ensuite presque tous à l'École Normale Supérieure, en moyenne vers 19 ou 20 ans. Les Mathématiques Spéciales, centrées sur les mathématiques, la physique, et dans une moindre mesure la chimie, ont l'inconvénient d'avoir des programmes figés, et « d'abrutir » un peu les élèves par un excès de travail, demandant un gros effort de mémoire plus que de l'intelligence et de l'intuition. Mais elles ont le grand avantage d'être une remarquable discipline de travail, d'enseigner la rigueur, de donner l'habitude des calculs algébriques et analytiques, qui s'avère indispensable ensuite. Au lieu des Spéciales, les futurs licenciés peuvent préparer le certificat de Mathématiques Générales en Faculté; mais seule une minorité passe par ce canal, qui n'a pas les défauts des Spéciales, mais qui dans l'état actuel des choses n'en a pas non plus les qualités.

L'École Normale Supérieure de la Rue d'Ulm prépare les futurs professeurs agrégés des lycées, et en même temps les futurs chercheurs et membres de l'Enseignement Supérieur. Elle comprend une section Sciences (20 élèves par an) et une section Lettres (30 élèves par an). Sur les 20 scientifiques, il y a un peu plus de la moitié de mathématiciens; le reste comprend surtout des physiciens, quelques chimistes et biologistes. Dans les branches littéraires, et les branches scientifiques non mathématiques, les futurs membres de l'Enseignement Supérieur font souvent leurs études dans les Facultés de province,

et non à l'École Normale Supérieure: 10 pour cent des biologistes sont normaliens; 20 pour cent des chimistes; 40 pour cent des physiciens; mais 95 pour cent des mathématiciens sont normaliens.

Les mathématiciens passent trois années à l'École Normale. Pendant la première, ils préparent les certificats de licence de Calcul Différentiel et Intégral, et de Physique Générale; les autres scientifiques font le même travail; ce n'est qu'en deuxième année que la différenciation commence, ce qui permet un choix tardif. La deuxième année est consacrée pour les mathématiciens au certificat de Mécanique Rationnelle, et au «diplôme d'études supérieures»; ce diplôme est, pour les autres branches scientifiques, un travail original de recherche ou de bibliographie, mais pour les mathématiciens il a été remplacé par un certificat de mathématiques supérieures (analyse supérieure, algèbre supérieure, géométrie supérieure, etc. . .). Ces certificats de licence sont préparés à la Faculté de Paris, la Sorbonne, en commun avec les étudiants non normaliens; les normaliens disposent, en plus, d'autres cours ou séminaires spécialement pour eux, qui ont lieu à l'École Normale. La troisième année d'École Normale est consacrée à la préparation de l'Agrégation, qui donnera accès à l'Enseignement Secondaire des lycées. Tous les professeurs des lycées ne sont pas agrégés, mais les meilleurs le sont. L'agrégation n'est pas nécessaire pour l'entrée dans l'Enseignement Supérieur, mais en mathématiques presque tous les membres de l'Enseignement Supérieur sont normaliens, donc agrégés. L'agrégation marque la fin du séjour à l'École Normale. Elle est donc passée en moyenne vers 22-24 ans. Sauf exceptions, seuls les jeunes gens vont à l'École Normale de la rue d'Ulm; l'agrégation féminine est préparée à l'École Normale Supérieure de Sèvres, qui était autrefois à Sèvres, qui est aujourd'hui à Paris.

La formation donnée par l'École Normale est donc un facteur commun à presque tous les futurs mathématiciens. Cette formation offre des avantages exceptionnels. Les 20 chercheurs et enseignants scientifiques de chaque année sont réunis,

et trois générations annuelles se rencontrent; les diverses branches scientifiques et littéraires se côtoient. Cette cohabitation et collaboration laissera de nombreuses traces dans l'avenir des normaliens; les liaisons de camaraderie et de travail acquises à l'École seront conservées. Le travail en groupe, l'échange des idées, l'émulation, porteront leurs fruits. Ajoutons qu'il n'y a chez les normaliens ni sectarisme ni orgueil d'École.

L'École Normale est un internat, où les élèves sont logés, nourris, et gagnent un petit traitement. Les élèves peuvent être externes si leur famille habite Paris ou s'ils sont mariés. C'est de toute façon un internat sans surveillance ni discipline, avec liberté d'être présent ou absent, de suivre ou non les cours. Après les années de tension des Mathématiques Spéciales, cette liberté a les plus grands avantages; elle offre une détente de l'esprit, et permet aux élèves de travailler dans le sujet de leur choix et de se cultiver dans d'autres domaines. Le régime à ce point de vue est celui des étudiants de toutes les Facultés; on a les avantages de l'internat et des Écoles sans les inconvénients.

Il est impossible cependant de ne pas signaler un aspect négatif de cette préparation. Tous les futurs mathématiciens d'une génération auront eu la même formation, les mêmes professeurs, ceux de Paris; cette centralisation est un facteur de monotonie, d'uniformité, et présente par là même un danger de sclérose. Les jeunes membres de l'Enseignement Supérieur, qui passent leurs premières années dans les Facultés de province, n'auront aucune influence sur la génération suivante d'étudiants. De ce point de vue, les contacts établis ces dernières années entre professeurs de province et de Paris et normaliens par les séminaires qui ont lieu à Paris, remédient à cette situation. Mais ce n'est là qu'un aspect partiel du problème; de toute façon, les meilleurs étudiants scientifiques de chaque génération (et non seulement les futurs enseignants), vont à Paris (à la Sorbonne comme étudiants, ou dans les grandes Écoles, dont la principale est l'École Polytechnique

qui prépare des ingénieurs de l'État), plutôt que dans les Facultés de province, où le niveau moyen des étudiants est relativement bas. La France est je crois le seul pays où existe cette centralisation.

La plupart des normaliens mathématiciens entrent dans l'Enseignement Secondaire. Chaque année quelques uns, au maximum trois ou quatre, se destinent à la recherche et à l'enseignement supérieur. Ils prennent alors, au sortir de Normale, un poste d'Attaché de Recherche au C.N.R.S., Centre National de la Recherche Scientifique. Ce centre est de création récente, il a été fondé par Jean Perrin dans les dernières années d'avant cette guerre; c'est une institution indépendante de l'Enseignement Supérieur. L'allocation est accordée pour trois ans; à la fin de la première et de la deuxième année, elle est confirmée sauf manquement grave de la part de l'allocataire; ces manquements ne se produisent pas, car la bourse n'est accordée qu'avec sévérité, à ceux qui offrent des garanties suffisantes. L'allocation n'est pas complètement suffisante pour vivre, mais elle me paraît nettement supérieure à toutes les allocations analogues existant dans les autres pays; elle s'élève à \$120 par mois, plus sécurité sociale et allocations familiales. L'expérience prouve le plein succès de ce système, qui laisse au chercheur une grande liberté. Le système du CNRS est assez différent pour les autres branches scientifiques. Signalons qu'il est valable aussi pour certaines recherches non scientifiques, par exemple, philosophiques, historiques, etc. . . . Actuellement le CNRS a des ressources modestes, et le nombre des chercheurs n'est pas assez élevé.

En pratique la thèse de Doctorat est en moyenne achevée dans les trois années, éventuellement quatre. C'est donc en général entre 25 et 30 ans que la thèse est achevée. Son niveau est naturellement plus élevé que celui des thèses américaines, puisqu'il y a annuellement plus d'une centaine de ces dernières, alors qu'il n'y a que quelques thèses en France. Peu d'années après sa thèse, le chercheur, qui a continué à bénéficier d'une allocation du CNRS jusqu'à sa nomination

dans l'Enseignement Supérieur, devient Maître de Conférences en Faculté, puis plus tard Professeur; mais la différence entre les deux tend à disparaître, et pratiquement, à part des différences de traitement ou d'avancement d'ailleurs faibles, le Maître de Conférences est considéré de la même manière que le Professeur.

2. La théorie des Fonctions, et l'analyse classique. La théorie des ensembles et des fonctions de variable réelle, traditionnelle en France depuis les travaux français ou belges de BOREL, LEBESGUE, BAIRE, DE LA VALLÉE POUSSIN, DENJOY, BOULIGAND, continue à se développer, quoique d'une façon moins systématique qu'en Pologne par exemple. M. DENJOY, poursuivant ses travaux sur les problèmes difficiles posés par la totalisation et les questions qui s'y rattachent, a publié récemment des ouvrages sur l'énumération transfinie, et le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, dont on sait qu'elle converge vers une fonction donnée (non sommable). Ces problèmes sont caractérisés par l'extrême simplicité de leur énoncé, mais leur grande difficulté, et la complication des moyens mis en œuvre. M. ROGER, M. PAUC, (ce dernier est actuellement au Cap) M. DE POSSEL, ont publié il y a plusieurs années des travaux sur la structure des ensembles et de leurs variétés tangentes, les intégrales généralisées. Les plus importants travaux récents dans ce domaine sont ceux de M. CHOQUET (isométrie des ensembles, mesure générale des longueurs, relations entre le contingent et le paratingent et points où ils coïncident, primitive d'une fonction par rapport à une fonction continue, problèmes fins de représentation conforme, etc. . . .), très variés mais ayant un fonds commun, celui des fonctions sans dérivée ou des courbes sans tangente.

Les fonctions analytiques d'une variable complexe sont aussi de tradition en France, depuis POINCARÉ, HADAMARD, PICARD, BOREL, DENJOY, André BLOCH, MONTEL, JULIA, VALIRON, MILLOUX, MANDELBROJT. Cette tradition s'est

maintenue solidement, au risque de ne pas laisser apparaître des tendances plus modernes des mathématiques; dans la génération des chercheurs qui ont aujourd'hui 30 ou 40 ans, cette partie des mathématiques a sans doute pris une place trop grande. Citons les travaux récents de MM. MANDELBROJT (séries de Dirichlet, séries lacunaires, fonctions entières de type exponentiel), H. CARTAN (idéaux de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes), BOURION (ultra-convergence), LELONG (fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, fonctions plurisousharmoniques), DELANGE (approximation polynomiale, théorèmes taubériens), DUFRESNOY (théorie d'Ahlfors), Mlle Jacqueline FERRAND, devenue Mme LELONG (problèmes au contour en représentation conforme, dérivée angulaire, potentiels et fonctions surharmoniques, fonctions préholomorphes).

L'ensemble de cette théorie manifeste des signes certains de vieillissement. La branche nouvelle développée juste avant la guerre par l'École finlandaise (NEVANLINNA-AHLFORS) a eu beaucoup de retentissement ici, mais marque aussi un arrêt, sauf les développements dans le cas de plusieurs variables complexes. Signalons que les méthodes topologiques de MORSE sont peu connues en France. Il nous semble que les développements nouveaux qu'on pourrait voir dans ces questions doivent surtout se rapporter aux fonctions de plusieurs variables complexes, en liaison avec la théorie des équations aux dérivées partielles et avec la topologie algébrique; ces questions sont encore dans l'enfance malgré les travaux importants auxquels elles ont déjà donné lieu.

A côté des fonctions analytiques, il y a lieu de parler des fonctions quasi-analytiques, et indéfiniment dérivables. Outre les travaux de MM. GORNY (polonais, mort en déportation), H. CARTAN, de nombreux articles et mémoires ont été publiés ces derniers temps par M. MANDELBROJT. Les résultats obtenus sont très fins, souvent «les meilleurs possibles», et demandent une technique très poussée. M. MANDELBROJT a traité des sujets divers mais qui, malgré leur apparence dis-

parate se ramènent à des propriétés analogues et finalement peuvent être considérés comme des cas particuliers d'une grande formule englobant de nombreux résultats.

La représentation des fonctions par des séries, séries de Fourier ou séries de polynômes, etc. . . n'a suscité que peu de travaux récents. Citons la thèse de M. ZAMANSKY sur la série de Fourier, les divers travaux de M. FAVARD sur l'approximation polynomiale, les fonctions presque-périodiques.

La théorie des fonctions harmoniques et surharmoniques, et des potentiels, quoique déjà ancienne puisqu'elle remonte à DIRICHLET, RIEMANN, GAUSS, est féconde en développements modernes. Cela tient d'une part à l'apparition des fonctions surharmoniques, généralisant les propriétés de convexité des fonctions d'une variable, et qui jouent un rôle essentiel dans la théorie des fonctions harmoniques et holomorphes, et d'autre part dans les renouvellements de la théorie du potentiel en liaison avec le produit de composition et la notion d'énergie. Tous ces problèmes ont été travaillé ces dernières années par M. MONTEL (fonctions surharmoniques), M. BOULIGAND (données au contour, fonctions surharmoniques positives), et M. BRELOT (potentiels, rôle du point à l'infini, ensembles effilés, points singuliers ou réguliers, fonctions susharmoniques et rattachées) dont les multiples publications ont constamment soutenu en France l'intérêt pour ces problèmes et les diverses façons de les poser. A la suite de l'École suédoise (FROSTMAN, Marcel RIESZ), M. Henri CARTAN a reposé pendant et après la guerre les fondements d'une théorie générale du potentiel basée sur les opérations de groupe (produits de composition) et la théorie de l'espace de Hilbert (norme énergie). Ces méthodes très générales résolvent aussi des problèmes fins sur la convergence des suites de potentiels et la capacité. Dernièrement, M. DENY a mis en valeur dans ces questions le rôle des distributions et de la transformation de Fourier, et a obtenu des résultats fins en même temps que d'esprit très général.

A propos des fonctions harmoniques, il serait normal de parler de la grande théorie des équations aux dérivées par-

tielles. Mais cette branche si importante, où M. HADAMARD a apporté une si grande contribution, n'a guère eu d'adeptes en France (sauf M. GEVREY). C'est en Belgique actuellement (M. BUREAU) et en Suède (école de M. Marcel RIESZ) que sont continués les travaux de M. HADAMARD.

Signalons toutefois dans des domaines voisins les travaux de M. ARONSJAZN, M. PARODI (calcul symbolique et électricité), M. HUMBERT (formulaire de calcul symbolique), M. DELSARTE (équations de Maxwell), M. LERAY (équations de Navier et solutions turbulentes, équations intégrales et intégral-différentielles, équations fonctionnelles diverses, qui se sont dirigées de plus en plus vers les méthodes de la topologie algébrique; nous en reparlerons). A part les travaux de M. LERAY, il n'y a pas là d'école ou de direction d'ensemble. Je souhaiterais que les distributions permettent une reprise de ces problèmes sous un angle nouveau.

3. L'analyse fonctionnelle. L'analyse s'est fondamentalement modifiée depuis l'apparition de l'analyse fonctionnelle, qui est l'étude des méthodes générales de l'analyse. Les calculs d'autrefois, nombreux et compliqués, sont remplacés par des raisonnements plus abstraits, qui vont beaucoup plus au fond des choses, et donnent à l'analyste beaucoup plus de moyens. On peut même constater que la jeune génération connaît à fond ces moyens, sans trop savoir comment les utiliser, et répugne à tout calcul un peu long. L'analyse fonctionnelle marque l'invasion de l'analyse par l'axiomatique, et avant tout par deux techniques fondamentales: l'algèbre et la topologie. Par les techniques algébriques, on étudie les relations algébriques entre les fonctions ou autres êtres mathématiques sans se préoccuper de leur définition première; dans ce domaine le rôle du linéaire est apparu fondamental. Par les techniques topologiques, la notion de convergence a pris un sens plus intuitif (une suite convergente de fonctions est devenue une suite de points d'un espace topologique) et plus maniable.

Après que M. FRÉCHET (espaces abstraits) eût mis en relief ce rôle essentiel de la topologie, et par là grandement contribué à la diffusion et à l'extension de ces méthodes abstraites, l'analyse fonctionnelle a fait des pas de géant avec les remarquables travaux de BANACH et Frédéric RIESZ (théorie des espaces vectoriels topologiques). Il n'y a pas à proprement parler actuellement en France de grande école d'analyse fonctionnelle, mais la jeune génération connaît et utilise à fond ces méthodes.

C'est M. DIEUDONNÉ qui a apporté le plus de contribution à la théorie des espaces vectoriels topologiques (espaces de Banach et espaces plus généraux, dualité forte et faible, réflexivité, polarité, etc. . .). A cela il faut ajouter ses résultats en topologie générale, et dans la théorie de l'intégration (théorème de Lebesgue-Nikodym). M. FORTET a étudié les espaces uniformément convexes.

Je rangerai aussi mes propres travaux (approximation des fonctions par des sommes d'exponentielles, fonctions moyenne-périodiques, distributions) dans l'analyse fonctionnelle ou les applications de l'analyse fonctionnelle à des problèmes d'analyse classique.

Une des branches de l'analyse fonctionnelle qui s'est le plus développée ces dernières années dans le monde entier, est celle qui gravite autour de la théorie des opérateurs (spécialement dans les espaces de Hilbert), des théories spectrales, des représentations et des modèles d'algèbre d'opérateurs, et par là-même des applications à l'étude de la transformation de Fourier dans les groupes abéliens localement compacts ou des groupes plus généraux. Ce genre de problèmes a été lancé en France par le livre de M. André WEIL (l'intégration dans les groupes topologiques et ses applications) qui a été le point de départ des travaux ultérieurs. D'ailleurs M. WEIL, qui est actuellement en Amérique, continue à influencer considérablement le développement des mathématiques en France, par ses relations avec de nombreux mathématiciens et ses voyages en France. Les travaux ultérieurs sont surtout ceux de

M. GODEMENT (fonctions de type positif, transformation de Fourier dans des groupes non abéliens, algèbres normées, généralisation des théorèmes de Stone, Wiener, Beurling, sommes directes continues d'espaces de Hilbert), de M. Henri CARTAN, M. DIXMIER (généralisation de la trace des opérateurs). Des travaux un peu différents sur les groupes abéliens localement compacts ont été faits par MM. BRACONNIER, RISS, COLMEZ.

4. Groupes de Lie, géométrie différentielle. Cette branche des mathématiques, en liaison avec des domaines très divers, a été avant tout développée par M. Élie CARTAN, qui a eu une influence considérable sur un certain nombre de mathématiciens de la génération suivante. Dernièrement encore il a publié des livres sur les espaces de Riemann, et sur les systèmes différentiels extérieurs. Toute la jeune génération utilise aujourd'hui les éléments de la géométrie différentielle, mais peu de mathématiciens en France sont spécialisés dans ces théories.

Les travaux de M. LICHNEROVICZ sont assez divers, mais ont un fonds commun de géométrie différentielle ou d'analyse linéaire (relativité générale, mécanique, calcul des variations et espaces variationnels, topologie algébrique des espaces fibrés, algèbre et analyse linéaire, calcul tensoriel). M. GALVANI étudie aussi les espaces de RIEMANN.

En ce qui concerne les groupes de Lie, leur étude proprement différentielle cède le pas à l'étude des algèbres de Lie ou à la topologie algébrique des groupes de Lie, dont nous parlerons plus loin.

5. Calcul des probabilités, statistique. L'École française de calcul des probabilités a toujours été assez active, avec les travaux de MM. BOREL, FRÉCHET, DARMOIS, P. LÉVY. Après ses travaux sur les bases du calcul des probabilités (fonctions caractéristiques, sommes de variables aléatoires), M. LÉVY a publié des mémoires sur l'intégrale stochastique, le mouvement brownien, et des questions diverses en dehors des probabilités.

Les probabilistes de la génération suivante ont surtout étudié les fonctions aléatoires stationnaires: MM. LOEVE (actuellement en Amérique), FORTET, BLANCLAPIERRE, VILLE, DUGUE, KAMPÉ de FÉRIET, BASS. M. BLANCLAPIERRE a appliqué les probabilités à des problèmes de physique. Signalons aussi M. DOEBLIN, d'origine allemande, tué au début de la guerre comme combattant de l'armée française, laissant des travaux inachevés.

La statistique n'est pas aussi développée en France que dans les pays anglo-saxons. Les principaux travaux sont ceux de MM. DARMOIS, FRÉCHET, en statistique théorique, MALECOT en biométrie. Je ne parle pas naturellement de l'actuariat.

6. Arithmétique, Algèbre, Géométrie algébrique. L'arithmétique relève à la fois de l'analyse (théorie analytique des nombres) et de l'algèbre. L'aspect analytique a été le domaine des travaux de M. PISOT (répartition de nombres modulo 1, nombres algébriques et transcendants, valeurs entières de fonctions analytiques, fonctions analytiques à coefficients entiers, etc...). L'arithmétique algébrique est étudiée par M. CHABAUTY (points rationnels ou algébriques de variétés, géométrie des nombres, théorème de Minkowski-Hlawka, équations diophantiennes, nombres p -adiques, théorèmes de Thue) et M. François CHÂTELET. M. DELSARTE a étudié de nombreux problèmes d'arithmétique (travaux non tous publiés): fonctions presque-périodiques liées à l'arithmétique, fonction de Möbius, arithmétique des groupes finis, séries singulières de Hardy, répartition de points sur des «Gitter», etc... M. DELSARTE a publié des mémoires sur d'autres sujets très différents, équations aux dérivées partielles, fonctions presque-périodiques et fonctions spéciales, hypergroupes de Lie, fonctions moyenne-périodiques, etc... Cependant il y a très nettement un point commun fondamental à ces travaux, c'est leur substratum algébrique, même lorsqu'il s'agit d'analyse.

L'algèbre pure a été peu développée en France autrefois si l'on compare avec l'Allemagne par exemple. Mais dans la jeune génération le développement pris par l'emploi des techniques algébriques est un des points marquants du stade actuel. On délaisse fréquemment l'analyse, et l'algèbre est en vogue. Il s'agit d'ailleurs d'une excellente conception, car l'algèbre est une technique de base des mathématiques modernes, et nous avons précisément déjà signalé que l'analyse fonctionnelle qui a transformé l'analyse, est à base d'algèbre. Les principaux travaux sont ceux de M. Albert CHÂTELET (groupes finis, congruences, etc...), M. DUBREIL (variétés algébriques, théorèmes de Noëther), DIEUDONNÉ (systèmes hypercomplexes, anneaux semi-simples, modules, théorie de Galois non commutative, groupes classiques), Henri CARTAN (théorie de Galois, algèbre homologique), KRASNER (fonctions analytiques sur les corps valués, extensions, corps de classes, hypergroupes, groupes finis, etc...) KALOUJNINE (groupes finis); ces deux derniers mathématiciens qui ont travaillé en France sont d'origine russe.

La branche la plus jeune de l'algèbre est la géométrie algébrique; jeune par l'état dans lequel elle se trouve encore, quoique travaillée depuis longtemps. Dans ce domaine comme dans d'autres on ne saurait exagérer l'influence qu'ont exercée et exercent encore MM. A. WEIL et CHEVALLEY, qui sont actuellement aux États-Unis, mais qui restent en relations constantes avec les mathématiques françaises. Les livres de M. WEIL sur les fondements de la géométrie algébrique, l'hypothèse de Riemann, les variétés abéliennes, les livres ou mémoires de M. CHEVALLEY sur la géométrie algébrique, les idéaux, le corps de classes, les groupes et algèbres de Lie envisagés sous tous les aspects, sont un matériel de base pour une grande partie des mathématiciens français; il est donc impossible de ne pas les mentionner dans une étude des mathématiques en France. Citons ensuite les travaux plutôt géométriques de MM. GAUTHIER, APERY, les travaux algébriques de M. SAMUEL (valuations et spécialisations, théorie

des intersections, polynomes de Hilbert, anneaux locaux). La géométrie algébrique a beaucoup de succès chez les jeunes.

7. La topologie algébrique. La destinée de la topologie algébrique est assez curieuse. Créée par Betti, Riemann, Poincaré, sous le nom d'analysis situs, comme outil pour l'analyse, elle a pris un développement extraordinaire, est devenue une science autonome, presque un point culminant des mathématiques modernes; la topologie semble même parfois en avoir disparu ou servir seulement de base à des développements purement algébriques, autrement dit le topologique est souvent dépassé par l'algébrique (un algébrique où le produit tensoriel et extérieur jouent un rôle essentiel). L'influence de la Suisse est d'ailleurs grande en ce qui concerne le développement de cette science en France et dans le monde, et les contacts avec l'École suisse sont fréquents. M. EHRESMANN a toujours travaillé dans cette branche; ses conceptions restent toujours très près de l'aspect topologique et géométrique des choses, l'aspect algébrique vient après (variétés de Grassmann, géométrie différentielle, espaces fibrés). Il a eu de nombreux élèves, notamment MM. FELDBAU (déporté pendant la guerre, laissant des travaux inachevés sur les espaces fibrés), REEB (espaces feuilletés, solutions d'équations différentielles, etc. . .), WU-WEN-TSUN (classes caractéristiques des espaces fibrés), YEN-CHI-TA (nombres de Betti des groupes de Lie exceptionnels). M. LICHNEROVICZ, à côté de la géométrie différentielle, a été amené à des problèmes de topologie algébrique (géométrie différentielle globale, espaces fibrés) d'aspect plus géométrique qu'algébrique.

M. LERAY, qui a travaillé d'abord sur les équations aux dérivées partielles et les équations intégrales, a été amené à introduire les méthodes de la topologie algébrique dans la résolution des équations (théorèmes de point fixe, et degré topologique dans les espaces de Banach, théorème de Jordan généralisé), puis ultérieurement à faire des études très générales de topologie algébrique pure, où l'aspect algébrique prédomine

(homologie et cohomologie générales, espaces homogènes, homologie filtrée, anneau d'homologie d'une représentation, position des ensembles fermés, etc. . . .).

Dans les dernières années, M. Henri CARTAN a renouvelé de nombreuses méthodes dans la topologie algébrique (dualité, suites exactes, produits de variétés, fondement généraux de la topologie algébrique, théorie des carapaces, théorèmes de de Rham sous leur forme la plus générale). Plusieurs de ses travaux ne sont pas encore publiés, tous sont relatifs aux méthodes générales ou aux problèmes généraux; l'algèbre devient ici prépondérante.

Enfin récemment M. KOSZUL a publié de nombreux et importants travaux de topologie algébrique, notamment en topologie algébrique des groupes et algèbres de Lie, groupes exceptionnels, espaces fibrés, géométrie différentielle globale, etc. . . . Ici les méthodes et les problèmes sont avant tout de pure algèbre.

8. Bourbaki et son influence. Bourbaki est un groupe d'une dizaine de mathématiciens, fondé juste avant la guerre, et qui se propose, par la publication régulière de livres, d'étudier les «structures» fondamentales des mathématiques. Bourbaki ne traite pas les problèmes particuliers, réservés aux spécialistes, mais exclusivement ceux qui sont d'ordre général, et servent de fondement aux mathématiques; en exagérant peut-être un peu, les problèmes que tout mathématicien devrait connaître. Les méthodes sont très abstraites, l'algèbre et la topologie y jouent un rôle essentiel, d'ailleurs celui qui leur revient normalement. Chaque théorie est disséquée de telle manière qu'elle s'exprime en une suite de théorèmes, propositions et corollaires de démonstrations très courtes, dont chacun est une conséquence presque immédiate du précédent. Le rôle de ces livres est donc surtout pédagogique, la plupart des résultats n'en sont pas nouveaux, tout en étant en général exprimés sous une forme originale. Il est certain que ces livres, et l'esprit bourbachique en général, comportent

un certain danger: l'exagération scolastique, «l'hyperaxiomatisation» et «l'hypergénéralisation», le style exagérément abstrait. C'est sans doute ce qui a écarté au début beaucoup de mathématiciens; actuellement cependant le succès de Bourbaki est considérable, surtout auprès de la jeune génération, qui apprend souvent les plus importantes théories dans les livres de Bourbaki.

Il est au fond possible de classer les esprits scientifiques en deux catégories (avec tout l'arbitraire que comporte toute classification): les esprits fins et les esprits généraux, aucune des deux catégories n'étant le moins du monde supérieure à l'autre. Les esprits fins s'intéressent à des questions précises, généralement difficiles, nécessitant de grands moyens; les résultats les intéressent plus que les démonstrations, les problèmes plus que les méthodes; ces problèmes, souvent assez particuliers, sont généralement originaux, et traités dans tous leurs détails. Les esprits généraux s'intéressent surtout aux théories générales, qu'ils tentent de simplifier au maximum, ayant en quelque sorte une certaine aversion pour les «difficultés» que les esprits fins affectionnent; les démonstrations les intéressent souvent plus que les problèmes, dont ils cherchent avant tout à dégager le pourquoi. Chacune des deux catégories a des représentants d'élite; chacune a ses excès, comme l'esprit fin qui passera des années à chercher des problèmes quasi insolubles et d'intérêt nul, ou l'esprit général qui fera dans le vide des théories évidentes et sans applications. Ce sont ces excès et probablement la nature humaine qui font que souvent les mathématiciens d'une catégorie ont tendance à mépriser ceux de l'autre (les esprits généraux reprocheront aux esprits fins de faire des travaux inutiles et très particuliers, les esprits fins reprocheront aux esprits généraux de ne pas avoir introduit d'idées neuves). Le développement d'une théorie mathématique est en général le suivant: ce sont d'abord les esprits fins qui introduisent une question nouvelle, et la traitent en général par des méthodes nouvelles, donc difficiles et imparfaitement élaborées; ce sont les pionniers

qui défrichent un terrain vierge et posent les grands problèmes. Leur ténacité les empêche d'être arrêtés par les nombreuses difficultés de l'entreprise, alors que les esprits généraux se plaisent mieux dans les belles théories bien construites; sans les esprits fins il n'y aurait pas de théories nouvelles. Mais une fois cette œuvre faite, il faut la déblayer, en dégager le principal, les grandes idées directrices, qui feront de la théorie initiale, compliquée et incomplète, une science assimilable à la majorité, qui rentrera dans le domaine courant. Certaines des idées initiales des créateurs apparaîtront comme inutilement compliquées et seront rejetés. On fixe les connaissances, méthodes et résultats, qui seront seuls utiles pour l'avenir. Sans cette œuvre d'organisation aucun progrès ne serait possible; les nouvelles générations ne pourraient pas profiter des conquêtes de leurs prédécesseurs. Les esprits généraux font ouvrage pédagogique plus que réellement créateur, mais aussi indispensable et difficile que l'autre. Ce n'est que quand ce stade a été atteint que des esprits hypergénéralisateurs font des généralisations abstraites qui n'apportent plus rien de nouveau, ou que des esprits hyperfins traitent de problèmes que la science a dépassés, et c'est cette seule partie du travail des uns ou des autres qui est à côté du progrès et reste stérile. Remarquons que pour les esprits fins une grande opiniâtreté est nécessaire pour résoudre des questions ardues avec de puissants moyens; les esprits généraux seront plus paresseux mais auront plus de sens esthétique, et généralement contourneront les difficultés, quitte à changer les énoncés mêmes des problèmes.

Bourbaki est donc caractérisé par l'esprit général. Tous ses membres, malgré des différences considérables de conception mathématique, ont ceci de commun: ce sont des esprits généraux.

La rédaction d'un livre de Bourbaki se fait de la façon suivante. Des Congrès se réunissent périodiquement (3 ou 4 fois par an; à Pâques le grand congrès dure 15 jours, les autres 8 jours seulement). Ces Congrès comportent un travail

intensif, d'environ 6 à 8 heures par jour. Le premier rédacteur d'une théorie est chargé d'un simple rapport de 15 à 30 pages, élaborant l'essentiel de la question, l'ordre des différentes branches, les notations. Ce rapport est lu et discuté en Congrès, généralement très critiqué, des décisions sont prises, et une rédaction «état 1» est confiée à un autre rédacteur. Elle sera lue et discutée point par point à un Congrès ultérieur. Là on prendra de nouvelles décisions, et un autre rédacteur sera désigné pour un «état 2» à un congrès ultérieur. Et ainsi de suite. C'est en général après 4, 5, 6 états successifs qu'un livre atteint l'état définitif et sera livré à l'impression sous la signature Bourbaki. L'appartenance à Bourbaki exige donc de ne pas avoir un excès d'amour-propre; les idées personnelles d'un membre ou un autre ne porteront pas son nom dans la rédaction finale, et surtout ses rédactions auront été copieusement critiquées, parfois démolies en congrès. Cela exige évidemment une grande camaraderie, préparée par la fraternité de l'École Normale, et accompagnée d'une intense atmosphère de «canular» (practical joke) qui introduit une détente dans l'atmosphère sérieuse des congrès, où les discussions sont parfois très vives. L'origine du nom de Bourbaki se perd dans la nuit des temps et pourra servir de thèse aux historiens de l'avenir. La personne même de Bourbaki est un impénétrable mystère; il est arrivé qu'on le voie dans certaines séances exceptionnelles, qu'on prenne un repas avec lui, mais généralement sa présence se manifeste surtout sur le plan spirituel.

Les publications de Bourbaki ont été les suivantes (chez Hermann, à Paris):

LIVRE 1. *Théorie des ensembles*. Fascicule de résultats (n° 846).
(L'ensemble du livre a été déjà souvent discuté en congrès, et paraîtra ultérieurement.)

LIVRE 2. *Algèbre*.

Chapitre 1: Structures algébriques (n° 934).

Chapitre 2: Algèbre linéaire (n° 1032). Un exposé complet de la théorie élémentaire des espaces vectoriels et des modules.

- Chapitre 3:* Algèbre multilinéaire (n° 1044). Exposé des formes multilinéaires, des tenseurs, de l'algèbre extérieure de Grassmann, sans utilisation de coordonnées.
- Chapitre 4:* Polynomes et fractions rationnelles.
- Chapitre 5:* Corps commutatifs (théorie de Galois).

La divisibilité, les représentations matricielles des groupes, les formes bilinéaires et quadratiques, les anneaux primitifs, les géométries élémentaires, constitueront les chapitres ultérieurs. Les premières rédactions sont achevées, certaines très avancées.

LIVRE 3. *Topologie générale.*

<i>Chapitre 1:</i> Structures topologiques.	}	(n° 858)
<i>Chapitre 2:</i> Structures uniformes.		
<i>Chapitre 3:</i> Groupes topologiques.	}	(n° 916)
<i>Chapitre 4:</i> Nombres réels.		
<i>Chapitre 5:</i> Groupes à un paramètre.	}	(n° 1029)
<i>Chapitre 6:</i> Espaces numériques et espaces projectifs.		
<i>Chapitre 7:</i> Les groupes additifs $\mathbb{R}^n$.		
<i>Chapitre 8:</i> Nombres complexes.	}	(n° 1045)
<i>Chapitre 9:</i> Utilisation des nombres réels en topologie générale.		
<i>Chapitre 10:</i> Espaces fonctionnels; dictionnaire.	}	(n° 1084)

LIVRE 4. *Fonctions d'une variable réelle.*

<i>Chapitre 1:</i> Dérivées.	}	(n° 1074)
<i>Chapitre 2:</i> Primitives et intégrales.		
<i>Chapitre 3:</i> Fonctions élémentaires.		

Un chapitre suivra sur les équations différentielles, et diverses questions élémentaires.

Les livres suivants traiteront des espaces vectoriels topologiques (rédaction très avancée), de l'intégration et de la mesure (rédaction très avancée), des différentielles et des variétés différentiables (étude locale), des groupes de Lie, des fonctions analytiques, de la topologie algébrique (rédaction embryonnaire). Tout ceci n'est que la première partie, qui sera suivie d'une deuxième traitant de questions moins générales, puis d'une troisième; Bourbaki a pour lui l'éternité, car il se reproduit.

Les livres de Bourbaki ont conquis la jeune génération mathématique en France. Mais là ne se limite pas son influence. Un séminaire Bourbaki a lieu sous son égide trois fois par an à Paris, pour étudier les mémoires nouveaux de l'année (chaque fois trois jours, l'après-midi seulement, deux séances chaque après-midi; soit six séances par séminaire, dix-huit par an). Les auditeurs y sont nombreux, venus de tout les coins de la France et même de la Belgique.

9. Conclusion. Je m'excuse à l'avance de l'imperfection de cette brève analyse. Je n'ai ni le recul ni l'envergure nécessaires pour juger impartialement de la valeur des travaux actuels. J'ai fait incontestablement des omissions, qu'on m'en excuse; je n'ai en particulier rien dit des mathématiques appliquées (mécanique appliquée, hydrodynamique, etc...) qui ont pourtant donné lieu à d'importants travaux. Ce que je voudrais avoir montré, c'est le grand développement, le grand bouillonnement des mathématiques en France à l'heure actuelle; après les difficultés de la guerre, le travail reprend sur une grande échelle, et il semble que la bonne volonté et la qualité de la génération nouvelle permettent d'excellents espoirs.