Laurent Schwartz

**Généralisation de la notion de fonction et de dérivation, théorie des distributions**

*Ann. Télécommun.*, 3 (1948), p. 135-140.

**Extrait des ANNALES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS**
TOME 3, N° 4. — Avril 1948.

# GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE FONCTION ET DE DÉRIVATION THÉORIE DES DISTRIBUTIONS



par Laurent SCHWARTZ
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Nancy

SOMMAIRE. — *Bref exposé d'une théorie des « distributions » permettant de justifier complètement certains procédés hardis utilisés dans la pratique du calcul symbolique de* HEAVISIDE *(« fonction de* DIRAC *», « intégration » et « dérivation » d'une telle « fonction »). Généralisant la notion de fonction en notion de mesure, puis celle-ci en notion de « distributions », l'auteur définit ensuite ce que deviennent — dans cette conception — les opérations de dérivation, de multiplication, d'intégration, et de produit de composition, ainsi que les transformations de Fourier et de Laplace.*

## INTRODUCTION

Cet article expose brièvement une théorie des « distributions », qui a été développée dans ses grandes lignes à une Conférence faite à la Société des Radio-électriciens, le 4 décembre 1946. Un résumé de la théorie a déjà paru sous forme d'un article dans les *Annales de l'Université de Grenoble* (1945) ; un autre paraîtra prochainement dans les mêmes *Annales* (1947). La théorie complète sera exposée dans un livre, aux « Publications de l'Institut Mathématique de Strasbourg ». Cette théorie permet de justifier complètement certains procédés utilisés en calcul symbolique (électricité) et en mécanique ondulatoire. Dans la pratique de ce calcul, on utilise hardiment la « fonction de Dirac » $\delta(x)$, égale à 0 pour $x \neq 0$, à $+\infty$ pour $x = 0$, et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$ ; on se permet même de considérer cette fonction $\delta$ comme la dérivée de la fonction de Heaviside, $Y(x)$, égale à 0 pour $x \leqslant 0$, à 1 pour $x > 0$, et on utilise également les dérivées successives de cette fonction de Dirac. Naturellement la théorie des distributions ne se borne pas à justifier certaines formules ; elle est une théorie autonome, ayant ses règles de calcul, utilisable dans la théorie de la transformation de Fourier ou Laplace, ou dans celle des formes différentielles.

## GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE FONCTION : LA NOTION DE MESURE.

Nous n'emploierons ici que les fonctions d'une variable réelle ; les résultats sont valables pour les fonctions de plusieurs variables réelles.

Nous allons introduire des êtres mathématiques plus généraux que les fonctions : les mesures ou distributions de masses. Ainsi $\delta$ n'est pas une fonction, c'est une mesure, la mesure de DIRAC, d'un type particulièrement simple ; elle est réduite à une masse discrète $+1$ placée à l'origine. Une mesure $\mu$ est complètement définie par la connaissance de la masse $\mu(a, b)$ contenue dans tout intervalle $(a, b)$ ; $\mu(a, b)$ est un nombre réel ou complexe. Naturellement, $\mu(a, b)$ n'est pas n'importe quelle fonction d'intervalle $(a, b)$ ; elle doit être « complètement additive », ce qui signifie que si un intervalle est la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles deux à deux sans point commun, sa masse est la somme des masses de ces intervalles. (Il est entendu que lorsqu'on parle d'un intervalle, il faut toujours spécifier s'il est ouvert ou fermé, car les extrémités peuvent contenir des masses discrètes).

Toute mesure $\mu$ définit une fonctionnelle $\mu(\varphi)$ ($\varphi$ étant n'importe quelle fonction continue, nulle en dehors d'un intervalle fini) par la formule

$$(1) \quad \mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\mu \quad \text{(Intégrale de STIELTJES).}$$

Par exemple, si $\delta$ est la mesure de DIRAC

$$(2) \quad \delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d\delta = \varphi(0),$$

$\mu(\varphi)$ est une fonctionnelle linéaire de $\varphi$, ce qui signifie que, si $l$ et $m$ sont deux constantes complexes quelconques, $\mu(l\,\varphi + m\,\psi) = l\,\mu(\varphi) + m\,\mu(\psi)$. Elle est aussi une fonctionnelle continue, au sens suivant : si des fonctions $\varphi_j$ convergent uniformément vers 0 et sont toutes nulles en dehors d'un même intervalle fini, les nombres $\mu(\varphi_j)$ convergent vers 0. (La considération des intervalles finis est nécessaire pour éviter toute difficulté relative au comportement de la mesure $\mu$ pour $x$ très grand). Réciproquement, d'après un célèbre théorème de F. RIESZ, toute fonctionnelle linéaire et continue au sens précédent, peut être définie comme une $\mu(\varphi)$ où $\mu$ est une mesure. Désormais, nous ne parlerons plus jamais d'une mesure que comme définie par la fonctionnelle linéaire continue $\mu(\varphi)$.

Il est possible de considérer une fonction $f(x)$ comme un cas particulier d'une mesure, car elle définit la mesure $\mu$ de densité $f(x)$ pour laquelle la masse d'un intervalle $(a, b)$ est $\int_a^b f(x)\, dx$ ; la fonctionnelle $\mu(\varphi)$ s'écrit alors :

$$(3) \quad \mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

que nous appellerons $f(\varphi)$. Dans ce cas, nous identifierons complètement $\mu$ et $f$ et nous écrirons $\mu = f$. Il faut noter que $f$ n'est pas n'importe quelle fonction, elle est sommable sur tout intervalle fini, et n'est définie qu'à un ensemble de mesure nulle près [au sens de LEBESGUE]. $\delta$, mesure de DIRAC, est un exemple simple d'une mesure qui n'est pas une fonction.

### GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE MESURE : LES DISTRIBUTIONS.

Comment définit-on un « doublet » ou « dipôle » de « moment électrique ou magnétique $+1$ » en théorie du potentiel ? C'est « la limite » lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 d'un système de deux masses très grandes et opposées, $+1/\varepsilon$ et $-1/\varepsilon$, placées aux points d'abscisses respectives $\varepsilon$ et 0. La distribution définie par les deux masses donne la forme linéaire :

$$T_\varepsilon(\varphi) = \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon}.$$

Lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, cette expression n'a de limite que si $\varphi$ est dérivable, et l'on a :

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon(\varphi) = \varphi'(0). \tag{4}$$

Ainsi un dipôle définit une fonctionnelle linéaire pour $\varphi$ dérivable ; de plus $T(\varphi)$ ne converge vers 0 que si $\varphi'$ converge vers 0. Pour définir des couches multiples, nous sommes naturellement amenés à considérer seulement des fonctions $\varphi$ indéfiniment dérivables, et nulles en dehors d'intervalles finis. Nous dirons que de telles fonctions $\varphi_j$ convergent vers 0 si d'une part les dérivées de tout ordre donné des $\varphi_j$ convergent uniformément vers 0, et si d'autre part les fonctions $\varphi_j$ sont toutes nulles en dehors d'un même intervalle fini. Nous appellerons $(\mathcal{D})$ l'espace vectoriel de ces fonctions $\varphi$, avec cette notion de convergence. Nous appellerons alors « distribution », toute fonctionnelle $T(\varphi)$, linéaire et continue, définie pour $\varphi \in (\mathcal{D})$. Cela signifie donc que, si des fonctions $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergent vers 0 au sens ci-dessus, les nombres $T(\varphi_j)$ doivent converger vers 0.

Une distribution $T$ peut être, comme cas particulier, une mesure (ou même une fonction). Cela signifie que la fonctionnelle $T(\varphi)$, définie seulement pour $\varphi$ indéfiniment dérivable, peut s'étendre à toutes les fonctions $\varphi$ continues, non nécessairement dérivables, et nulles en dehors d'intervalles finis, et que, si des fonctions $\varphi_j$, toutes nulles en dehors d'un même intervalle fini, convergent uniformément vers 0, aucune hypothèse n'étant faite quant à leurs dérivées, les nombres $T(\varphi_j)$ convergent vers 0. Le doublet est un exemple simple d'une distribution qui n'est pas une mesure.

Nous appellerons $(\mathcal{D}')$ l'espace vectoriel des distributions. Nous y introduirons une notion de convergence : on dira que des distributions $T_j$ convergent vers 0, si les nombres $T_j(\varphi)$ convergent vers 0, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, et uniformément par rapport à tout ensemble de fonctions $\varphi$ nulles en dehors d'un même intervalle fini et ayant leurs dérivées de tout ordre donné, bornées dans leur ensemble. On se contentera souvent d'utiliser la topologie faible : des distributions $T_j$ convergent faiblement vers 0 si les $T_j(\varphi)$ convergent vers 0 quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, aucune condition d'uniformité n'étant requise. Il est facile de voir que si les fonctions continues $f$ convergent uniformément vers 0 sur tout intervalle fini, les distributions $f_j$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$.

### DÉRIVATION

La dérivée ordinaire d'une fonction $f$ dérivable est définie par

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5}$$

La fonction $f(x+h)$ n'est autre que la fonction obtenue à partir de $f$ par la translation $-h$ ; nous l'appellerons $f_{-h}$. Alors

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f_{-h} - f}{h}. \tag{6}$$

Pour toute distribution $T$, nous pouvons définir la translatée $T_{-h}$ ; elle vérifie évidemment :

$$T_{-h}(\varphi) = T(\varphi_h), \tag{7}$$

formule d'ailleurs immédiate si $T$ est une fonction $f$.

Nous pouvons alors définir la dérivée $T'$ ou $\dfrac{dT}{dx}$ de la distribution $T$ par

$$T' = \lim_{h \to 0} \frac{T_{-h} - T}{h}, \tag{8}$$

si cette limite existe. Mais, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions, ici la limite existe toujours. En effet,

$$\frac{T_{-h} - T}{h}(\varphi) = \frac{T(\varphi_h) - T(\varphi)}{h}$$
$$= T\left(\frac{\varphi_h - \varphi}{h}\right) \xrightarrow[h \to 0]{} T(-\varphi')$$

pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$.

Cela prouve bien que toute distribution $T$ admet une dérivée $T'$ vérifiant

$$T'(\varphi) = -T(\varphi'). \tag{9}$$

On peut ensuite prendre les dérivées suivantes ; toute distribution est indéfiniment dérivable et, dans le cas de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations. Si $T$ est une fonction $f$ continue, et à dérivée continue, au sens usuel, sa distribution dérivée $T'$ n'est autre que sa dérivée usuelle $f'$. La formule (9) est, en effet, celle de l'intégration par parties :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Au contraire, si $f$ est discontinue, il ne faut pas confondre sa dérivée usuelle et sa distribution dérivée. Ainsi, si $Y(x)$ est la fonction de HEAVISIDE (égale à $\theta$ pour $x \leqslant 0$, à $+1$ pour $x > 0$), on trouve :

$$Y'(\varphi) = - Y(\varphi') = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0),$$

ou (10) $Y' = \delta$, mesure de DIRAC.

C'est le résultat classique du calcul symbolique trouvé ici par voie entièrement rigoureuse. On voit que les discontinuités de la fonction apparaissent dans sa dérivée sous formes de masses ponctuelles : dans les dérivées suivantes elles ne disparaissent plus jamais. En effet :

$$Y''(\varphi) = \delta'(\varphi) = - \delta(\varphi') = - \varphi'(0)$$
$$(11) \qquad \delta^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Nous voyons que la dérivée $\delta'$ est un doublet placé à l'origine, de moment $-1$.

On voit de même que si $f(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable « par morceaux » (ce qui signifie qu'on peut partager l'axe réel en intervalles partiels dans chacun desquels $f$ est indéfiniment dérivable, la fonction $f$ et chacune de ses dérivées ayant aux extrémités de chacun de ces intervalles une limite à gauche et une limite à droite), la distribution dérivée première $f'$ est la somme de la fonction dérivée première usuelle et d'un système de masses ponctuelles aux extrémités des intervalles, chacune étant égale à la discontinuité de $f$. La distribution dérivée seconde $f''$ est la somme de la fonction dérivée seconde usuelle, d'une distribution de doublets dont les moments sont opposés aux discontinuités de $f$, et d'une distribution de masses ponctuelles égales aux discontinuités de la fonction dérivée première usuelle.

Naturellement une fonction quelconque n'a pas de dérivée, au sens usuel ; cela signifie que sa distribution dérivée n'est pas une fonction, ni même en général une mesure.

On peut montrer que la dérivation est dans $(\mathcal{D}')$ une opération linéaire continue. Cela signifie que si les distributions $T_j$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$, leurs dérivées $T_j'$ convergent aussi vers 0. Il est bien connu cependant que des fonctions continues $f_j$ peuvent converger uniformément vers 0 sans que leurs dérivées convergent vers 0. Dans ce cas, les dérivées convergent vers 0 non pas au sens usuel, mais au sens de la convergence dans $(\mathcal{D}')$. Il résulte de ces propriétés que l'on peut toujours, sans prendre aucune précaution spéciale, dériver une série convergente terme à terme ou une intégrale convergente sous le signe d'intégration. Cela supprime bien des difficultés de l'analyse usuelle. Mais naturellement, il faut se servir de la notion de dérivation et de la notion de convergence convenables, celles de la théorie des distributions.

On démontre que, sur tout intervalle fini, toute distribution coïncide avec une dérivée $\frac{d^n f}{dx^n}$ d'une certaine fonction continue $f$. Nous avons donc, au point de vue local, introduit aussi peu d'êtres mathématiques nouveaux que possible, pour que toute fonction continue soit indéfiniment dérivable.

MULTIPLICATION

Il est facile de définir le produit d'une distribution $T$ par une fonction indéfiniment dérivable $\alpha$, de façon que si $T$ est une fonction $f$, ce produit coïncide avec la fonction $\alpha f$. On posera :

$$(12) \qquad (\alpha T).(\varphi) = T(\alpha\varphi).$$

On démontre que ce produit se dérive suivant la règle habituelle :

$$(13) \qquad (\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'.$$

Donnons un exemple d'un tel produit :

$$(14) \qquad x\delta' = - \delta,$$

car

$$x\delta'(\varphi) = \delta'(x\varphi) = -(\varphi + x\varphi')_0 = - \varphi(0) = - \delta(\varphi).$$

La formule (12) montre bien pourquoi il est nécessaire que $\alpha$ soit indéfiniment dérivable ; il est impossible, si $T$ est une distribution quelconque, de supprimer cette hypothèse.

INTÉGRATION. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Toute distribution $S$ possède une infinité de « primitives », c'est-à-dire de distributions $T$ vérifiant

$$(15) \qquad T' = S.$$

La différence entre deux solutions de cette équation vérifie

$$(16) \qquad T' = 0.$$

On démontre que c'est une fonction constante arbitraire, comme dans le cas des fonctions ordinaires. Une primitive est donc encore déterminée à une fonction constante près.

L'équation (16) est une équation différentielle. Nous pouvons alors considérer plus généralement les équations différentielles linéaires sans second membre, à coefficients indéfiniment dérivables :

$$(17) \qquad T^{(n)} = \sum_{\nu<n} \alpha_\nu(x)\, T^{(\nu)}.$$

($\alpha_\nu(x)$ = fonction indéfiniment dérivable au sens usuel).

On démontre qu'une telle équation, où le coefficient de $T^{(n)}$ est 1, n'a pas d'autres solutions que ses solutions usuelles, qui sont des fonctions indéfiniment dérivables. (Si le coefficient de $T^{(n)}$ n'était pas 1, il en serait tout autrement ; ainsi l'équation $xT' + T = 0$ a pour solution la mesure de DIRAC $\delta$ d'après (14)). Pour les équations aux dérivées partielles, il se passe des phénomènes tout différents. Pour une équation comme celle de LAPLACE :

$$(18) \qquad \Delta T = 0,$$

ou pour l'équation itérée de LAPLACE :

$$(19) \qquad \Delta^n T = 0,$$

qui sont du type elliptique, il n'y a pas d'autres solutions que les solutions usuelles, qui sont des fonctions analytiques. Mais pour une équation hyperbolique, telle que

$$\text{(20)} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(cas de 2 variables } x \text{ et } y\text{)}$$

la solution générale est de la forme

$$\text{(21)} \quad T = A(x+y) + B(x-y),$$

où $A$ et $B$ peuvent être des fonctions continues, non nécessairement dérivables, ou des fonctions discontinues, ou même des distributions quelconques, $A$ dépendant seulement de $x + y$, $B$ de $x—y$. Une telle introduction de solutions discontinues dans la théorie des équations aux dérivées partielles est d'un grand intérêt physique, comme l'ont déjà montré de nombreuses applications bien antérieures à la théorie des distributions. Il n'est même pas possible de traiter d'une façon convenable la théorie de la solution élémentaire sans utiliser, au moins d'une façon camouflée, les distributions (Parties finies de HADAMARD).

### PRODUIT DE COMPOSITION

On appelle usuellement « composée » de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ la fonction $h(x)$ définie par l'intégrale

$$\text{(22)} \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt,$$

et on la note $h = f * g = g * f$.

Le produit de composition a une importance de plus en plus grande dans un nombre croissant de domaines de l'analyse (calcul des probabilités, équations intégrales, théorie des groupes, etc.) ; c'est l'opération fondamentale du calcul symbolique. Il est donc très intéressant de pouvoir la généraliser aux distributions. La formule (22) donne :

$$\text{(23)} \quad h(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \iint \varphi(u+v)\, f(u)\, g(v)\, du\, dv$$

(par le changement de variables $x = u + v$, $t = v$). On a donc encore :

$$\text{(24)} \quad h(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Cela peut s'interpréter de la façon suivante. On considère $\varphi(x + \xi)$ comme une fonction de $\xi$ dépendant du paramètre $x$ ; pour $x$ fixé, c'est une fonction connue de $\xi$, que nous appellerons $\psi(\xi)$ ; on calcule alors $g(\psi)$. Le résultat est une fonction du paramètre $x$, qui se trouve être indéfiniment dérivable. Soit $\theta(x)$ cette fonction de $x$. On a alors $h(\varphi) = f(\theta)$. Cette définition peut évidemment s'étendre au cas de deux distributions quelconques $S$ et $T$, pourvu que les difficultés à l'infini s'éliminent ; on est sûr qu'il en est ainsi si l'une au moins des distributions $S$ et $T$ s'annule en dehors d'un intervalle fini. Le processus de définition ci-dessus s'écrit :

$$\text{(25)} \quad (S * T).(\varphi) = S_x\{T_\xi\, [\varphi(x+\xi)]\}$$

On peut ensuite définir le produit de composition d'un nombre fini quelconque de distributions, pourvu que toutes, sauf une au plus, soient nulles en dehors d'un intervalle fini. Ce produit est associatif et commutatif.

On peut voir que, pour toute distribution $T$, on a :

$$\text{(26)} \quad \delta * T = T\,; \qquad \delta' * T = T'.$$

Démontrons cette dernière formule.

$$(\delta' * T)\,(\varphi) = T_x\{\delta'_\xi\,[\varphi(x+\xi)]\} = T_x(-\varphi'(x)) = -T(\varphi') = T'(\varphi).$$

La remarquable formule (26) montre que la dérivation est, au même titre que l'intégration, une opération de composition. Cela nous permet de ranger dans un même type, le type de composition, les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et les équations intégrales de l'analyse harmonique. La formule donne la méthode de dérivation d'un produit de composition : on dérive l'un quelconque des facteurs. Par exemple,

$$\text{(27)} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(S * T) = \left(\frac{\partial\delta}{\partial x} * \frac{\partial\delta}{\partial y}\right) * (S * T) = \left(\frac{\partial\delta}{\partial x} * S\right) * \left(\frac{\partial\delta}{\partial y} * T\right) = \frac{\partial S}{\partial x} * \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Une telle formule est bien connue ; mais elle exige habituellement des conditions restrictives, qui sont ici inutiles. Remarquons en particulier que $\delta' * Y(x) = Y' = \delta$, donc on aura :

$$\text{(28)} \quad \frac{d}{dx}(Y * T) = Y * T' = T.$$

(Cette formule est valable si $T$ est nulle en dehors d'un intervalle fini, ou plus généralement si elle tend vers 0 assez vite pour $x$ tendant vers $-\infty$).

Une application intéressante de la formule (26) est la formule de POISSON généralisée. La fonction $1/r\ (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ dans l'espace à 3 dimensions est harmonique, sauf à l'origine. On vérifie aisément que l'on a $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta$ (masse $-4\pi$ placée à l'origine). Ce qu'on appelle le potentiel, au point $(x, y, z)$, de la distribution de masses de densité $\rho$ est la quantité

$$\text{(29)} \quad U_\rho\,(x, y, z) = \iiint \rho(\xi, \eta, \zeta)\,[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-1/2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

ou

$$U_\rho = \rho * \left(\frac{1}{r}\right).$$

Nous pouvons alors plus généralement définir le potentiel d'une distribution quelconque $T$ par la formule

(30) $$U_T = T * \left(\frac{1}{r}\right).$$

Alors

$$\Delta U_T = \Delta\delta * U_T = \Delta\delta * \left(T * \frac{1}{r}\right) = \left(\Delta\delta * \frac{1}{r}\right) * T$$
$$= \left(\Delta \frac{1}{r}\right) * T = -4\pi\delta * T = -4\pi T.$$

C'est la formule classique de Poisson, mais elle est vraie ici pour le potentiel de n'importe quelle distribution, alors qu'habituellement elle n'est vraie que pour des distributions suffisamment régulières ; de plus, sa démonstration est devenue très facile.

### Transformation de Fourier

Considérons la série trigonométrique

(31) $$\sum_n a_n \exp(2i\pi n x),$$

où, pour $|n|$ tendant vers $\infty$, $|a_n| = 0(|n|^k)$, $k > 0$ convenable. Alors la série

(32) $$\sum_n \frac{a_n}{n^{k+2}} \exp(2i\pi n x)$$

converge absolument. Mais la série donnée (31) s'en déduit, à un facteur près, par $k + 2$ dérivations successives ; elle est donc aussi convergente dans $(\mathcal{D}')$. Ainsi, toute série trigonométrique à coefficients lentement croissants converge vers une distribution périodique.

Réciproquement, toute distribution périodique $T$ a des coefficients de Fourier, qu'on peut calculer par des formules tout à fait analogues aux formules habituelles ; la série de Fourier ayant ces coefficients converge, dans $(\mathcal{D}')$, vers $T$. Ainsi la distinction pénible entre séries trigonométriques et séries de Fourier est ici absolument inutile.

Telles sont les bases de l'analyse harmonique en théorie des distributions. De la même manière, l'intégrale de Fourier

(33) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\exp(2i\pi\omega x)\,d\omega = \lim_{A,B\to+\infty}\int_{-A}^{+B}$$

converge dans l'espace des distributions de la variable $x$, pourvu que $f(\omega)$ croisse lentement à l'infini. ($|f(\omega)| = 0(|\omega|^k)$, $k>0$). Toutes les formules utilisées avec succès en calcul symbolique et en mécanique ondulatoire, mais parfaitement incorrectes du point de vue mathématique usuel, deviennent ici très correctes ; de plus, on a un baromètre exact pour vérifier leur correction. Ainsi, on a la formule :

(34) $$\int_0^{+\infty} \cos\omega x\,d\omega = \pi\delta\ ;$$

cela signifie que $\int_0^A \cos\omega x\,d\omega = \frac{\sin Ax}{x}$ converge pour $A \to +\infty$ vers la masse $\pi$ placée à l'origine, dans l'espace des distributions de la variable $x$ ; ou encore que, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, on aura :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Ax}{x}\varphi(x)\,dx = \pi\varphi(0),$$

ce qui est classique.

Il nous est impossible de donner ici tout le formalisme de la transformation de Fourier, mais il est très simple et très maniable.

### Transformation de Laplace

Le calcul symbolique a pour objet l'étude systématique du produit de composition des fonctions nulles pour $x<0$. Dans ce cas le produit de composition a toujours un sens. sans aucune hypothèse relative au comportement à l'infini. Il en est de même pour les distributions nulles pour $x < 0$ (qu'il faut toujours considérer comme des distributions définies sur toute la droite, mais nulles pour $x<0$). L'étude de ce produit de composition est facilitée par la transformation de Laplace, qui transforme le produit de composition en produit ordinaire. Pour les distributions comme pour les fonctions, on peut définir une image de Laplace, toutes les fois que la distribution ne croît pas trop vite pour $x \to +\infty$. On pourra écrire :

(35) $$f(x) \sqsupset F(p),$$

avec

$$F(p) = \int_0^{+\infty}\exp(-px)\,f(x)\,dx = f(\exp(-px))\ ;$$

en utilisant la lettre $u$ pour désigner une distribution et $U$ pour son image, on aura alors :

(36) $u \sqsupset U(p)$, avec $U(p) = u(\exp(-px))$.

Ainsi

(37) $$\delta'[\exp(-px)] = p\ ;$$

donc

$$\delta' \sqsupset p$$

ce qui est une formule bien connue, mais que les symbolistes n'utilisent d'habitude qu'avec la conscience peu tranquille. Les règles essentielles du calcul symbolique subsistent, mais sans aucune des restrictions usuelles.

(38) Si $u \sqsupset U(p)$, alors $u' \sqsupset pU(p)$ ;

(39) Si $u \sqsupset U(p)$, alors $xu \sqsupset U'(p)$ ;

(40) Si $u \sqsupset U(p)$ et $v \sqsupset V(p)$,

alors : $u * v \sqsupset U(p)\,V(p)$.

Dans toutes ces formules, $u$ et $v$ sont des distributions nulles pour $x<0$, $U(p)$ et $V(p)$ des fonctions analytiques de la variable complexe $p$.

Donnons un exemple de calcul symbolique avec distributions. Considérons l'équation intégrale du type de composition :

(41) $$\int_0^x \cos(x-t)\,f(t)\,dt = A(x),$$

$f(x)$ étant la fonction inconnue, $A(x)$ un second membre donné. On peut la généraliser en supposant que l'on cherche une distribution inconnue $T$, nulle pour $x < 0$, et vérifiant

$$Y \cos x * T = A, \tag{42}$$

le second membre $A$ étant lui-même une distribution donnée, nulle pour $x<0$. On cherche d'abord la « solution élémentaire », correspondant au second membre $A = \delta$, mesure de DIRAC. Cette solution $e$ vérifiera donc

$$Y \cos x * e = \delta. \tag{43}$$

Effectuons une transformation de LAPLACE :

$$Y \cos x \sqsupset p/(p^2+1)\,; \quad e \sqsupset E(p)\,; \quad \delta \sqsupset 1.$$

Alors (43) devient :

$$E(p)\, p/(p^2+1) = 1, \tag{44}$$

ou
$$E(p) = (p^2+1)/p = p + 1/p.$$

Or $p + 1/p$ n'est pas la transformée de LAPLACE d'une fonction ; et elle ne figure pas dans les tables usuelles. Mais on trouve immédiatement :

$$e = \delta' + Y. \tag{45}$$

D'ailleurs, on peut vérifier directement que

$$Y \cos x * (\delta' + Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Y \cos x) + Y \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = (-Y \sin x + \delta) + Y \sin x = \delta. \tag{46}$$

Considérons alors l'équation donnée (42) avec un second membre quelconque, et composons les deux membres avec $e$ ; il vient :

$(Y \cos x * T) * e = T * (Y \cos x * e) = T = A * e$ ; d'où la seule solution possible de cette équation :

$$T = A * e = A * (\delta' + Y) = A' + A * Y. \tag{47}$$

C'est d'ailleurs bien une solution du problème, car si l'on compose les deux membres de l'égalité $T = A * e$, avec $Y \cos x$, on obtient :

$$\begin{aligned} T * Y \cos x &= (A * e) * Y \cos x \\ &= A * (Y \cos x * e) = A * \delta = A, \end{aligned}$$

c. q. f. d.

Si, en particulier, $A$ est une fonction $A(x)$, on aura :

$$T = A' + Y \int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t,$$

étant entendu que la dérivée $A'$ est la *distribution* dérivée. Le fait que la solution élémentaire ne soit pas une fonction se marque par le fait que, si le second membre est une fonction $A(x)$, la solution $T$ n'est une fonction que si $A(x)$ est continue et dérivable. Si, au contraire, $A(x)$ présente une discontinuité $+1$ à l'origine ($A(+0) = +1$), $A'$ contiendra la masse $+1$ à l'origine. Naturellement, une pareille équation n'embarrasse nullement un électricien qui ne se sert pas des distributions (j'ai d'ailleurs choisi volontairement un exemple simple) ; mais le maniement systématique des distributions permet d'évoluer avec beaucoup plus d'aisance et moins de chances de commettre des erreurs. Il y a lieu de remarquer que, compliquée d'apparence, la théorie est en réalité très simple et ne demande que peu de connaissances mathématiques.

*Manuscrit reçu le 12 janvier 1948.*

Imprimé par A. TAFFIN-LEFORT, à Lille (France). — *Published in France.*