Laurent Schwartz

Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts

C. R. Acad. Sci. Paris, 227 (1948), p. 424-426.

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts.* Note (*) de M. **Laurent Schwartz**, transmise par M. Jacques Hadamard.

Notations. — X^n, Y^n seront deux groupes abéliens en dualité (notés additivement), isomorphes à l'espace réel à n dimensions R^n. Dans X^n, x a pour coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$; l'élément de volume sera $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$. Pour $x \in X^n$, $y \in Y^n$, on posera

$$x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Si $u(x)$ est une fonction complexe assez régulière sur X^n, sa transformée de Fourier est une fonction $v(y)$ sur Y^n, avec

$$v(y) = \int u(x) \exp.(-2i\pi x.y)\, dx, \qquad v = \mathcal{F}u,$$

$$u(x) = \int v(y) \exp.(+2i\pi x.y)\, dy, \qquad u = \overline{\mathcal{F}}v.$$

On peut étendre ces formules au cas où U et V sont des *distributions sphériques* (ou à croissance lente à l'infini) (1).

Position du problème. — Un ensemble de fonctions $f(x)$ sur X^n sera dit *invariant* s'il ne peut contenir une fonction $f(x)$ sans contenir aussi toutes ses translatées $f(x-h)$.

1° *Problème de M. N. Wiener.* — $\mathfrak{A}^1$ étant un sous-espace vectoriel fermé invariant de l'espace de Banach L^1 des fonctions sommables sur X^n, son *co-spectre* A (2) est l'ensemble (nécessairement fermé) des points a de Y^n où s'annulent à la fois toutes les images de Fourier $\mathcal{F}f$ des fonctions $f \in \mathfrak{A}^1$. M. N. Wiener a montré (3) que si A est vide, $\mathfrak{A}^1 = L^1$.

Problème. — $\mathfrak{A}^1$ est-il l'ensemble de toutes les fonctions $f \in L^1$ dont l'image $\mathcal{F}f$ s'annule sur A?

2° *Problème de M. A. Beurling.* — $\mathfrak{A}^\infty$ étant un sous-espace vectoriel fermé invariant de l'espace L^∞ des fonctions mesurables bornées sur X^n muni de la topologie faible (L^∞ dual de L^1), son *spectre* A (2) est l'ensemble (fermé) des

(*) Séance du 12 juillet 1948.

(1) Article à paraître prochainement aux Annales de la Faculté des Sciences de Grenoble : *Théorie des distributions et transformation de Fourier.*

(2) Le spectre ou co-spectre d'une fonction est celui du sous-espace fermé invariant qu'elle engendre.

(3) Wiener, *Tauberian theorems* (*Annals of Mathematics*, 33, 1932, p. 1 à 100).

points a de Y^n tels que l'exponentielle exp. $(2i\pi a x)$ appartienne à $\mathfrak{A}^\infty$. M. Beurling a montré [4] que si A est vide, $\mathfrak{A}^\infty = \{0\}$.

Problème. — $\mathfrak{A}^\infty$ est-il l'adhérence de l'ensemble des combinaisons linéaires des exponentielles définies par son spectre ? [5]

Ces deux problèmes sont équivalents (par dualité). La présente Note a pour but de montrer que la réponse est *négative* lorsque la dimension n de l'espace X^n est $\geqq 3$.

Démonstration par la théorie des distributions. — Soit μ la mesure définie dans Y^n par la répartition homogène d'une masse $+1$ sur la sphère S d'équation $|y| = 1$. Appelons V la distribution dérivée partielle $\partial\mu/\partial y_1$ (couche sphérique de doublets).

V *ne peut pas être approchée par des mesures* V_j *portées par* S.

Sans quoi on devrait avoir, pour toute fonction $\psi(y)$ indéfiniment dérivable à support compact, $\lim V_j(\psi) = V(\psi)$; or si ψ s'annule sur S et si sa dérivée partielle $\partial\psi/\partial y_1$ est, sur S, partout $\geqq 0$ et en au moins un point > 0, on a $V_j(\psi) = 0$, pour toute mesure V_j portée par S, et $V(\psi) = \int(-\partial\psi/\partial y_1)\,d\mu(y) < 0$.

La mesure μ est l'image de Fourier $\mathcal{F}m$ de la fonction $m(x) = \overline{\mathcal{F}}\mu$

$$m(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi|x|}\right)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|x|) \qquad (\text{J} = \text{fonction de Bessel}).$$

Alors $V = \mathcal{F}U$, $U(x) = -2i\pi x_1 m(x)$.

La fonction $U(x)$, continue, est bornée, donc $\in L^\infty$, si $n \geqq 3$. Car, pour $|x|$ infiniment grand, $J_{(n-2)/2}(2\pi|x|) = O(1/\sqrt{|x|})$; $|m(x)| = O(1/|x|^{(n-1)/2})$ et $|U(x)| = O(1/|x|^{(n-3)/2})$. $U(x)$ a pour spectre le support S de son image de Fourier V; cependant elle ne peut pas être limite (dans l'espace des distributions sphériques sur X^n ni *a fortiori* dans L^∞) de fonctions U_j dont les images de Fourier V_j soient des mesures portées par S; elle n'est donc pas limite de combinaisons des exponentielles définies par son spectre. C. Q. F. D.

Démonstration élémentaire équivalente. — Dans L^1, appelons $\mathcal{B}^1$ l'espace vectoriel invariant des fonctions $\varphi(x)$ indéfiniment dérivables à support compact, dont l'image $\mathcal{F}\varphi = \psi(y)$ est nulle sur la sphère S de Y^n, et $\mathcal{C}^1$ le sous-espace invariant de $\mathcal{B}_1$ formé des fonctions φ pour lesquelles $\partial\psi/\partial y_1$ est nulle sur S. Les adhérences $\overline{\mathcal{B}^1}$ et $\overline{\mathcal{C}^1}$ de $\mathcal{B}^1$ et $\mathcal{C}^1$ ont pour co-spectre commun S. Cependant pour $n \geqq 3$, $\overline{\mathcal{B}^1}$ et $\overline{\mathcal{C}^1}$ sont distincts.

---

(4) BEURLING *Un théorème sur les fonctions uniformément bornées et continues sur l'axe réel* (*Acta Mathematica*, 77, 1945, p. 127-136). Le théorème démontré est plus fort que celui qui est indiqué ici.

(5) La réponse est affirmative si la frontière de A est dénombrable, comme me l'a indiqué M. Beurling dans une conversation particulière, ou comme il résulte d'un théorème de M. DITKIN, *Uchenye Zapiski Moskov Gos. Univ.* (*Mathematika*, 30, 1939, p. 83-130).

En effet, $U(x)$ étant la fonction définie plus haut, et $\varphi(x) \in \overline{\mathcal{B}^1}$, $\mathcal{F}\varphi = \psi$, on a

$$\int \varphi(x) U(-x)\, dx = \int [2i\pi x_1 \varphi(x)]\, m(-x)\, dx = \int (-\partial\psi/\partial y_1)\, d\mu(y)$$

(égalité de Parseval).

Or cette quantité est nulle si $\varphi \in \overline{\mathcal{C}^1}$, et < 0 pour des $\varphi \in \mathcal{B}^1$, telles que $\partial\psi/\partial y_1$ soit, sur S, partout $\geqq 0$ et, en au moins un point, > 0. C. Q. F. D.

Pour $n \leqq 2$, $U(x)$ n'est plus bornée, $\overline{\mathcal{B}^1}$ et $\overline{\mathcal{C}^1}$ sont identiques. Il est probable que la réponse aux questions posées devient affirmative.

Les distributions permettent une théorie achevée d'analyse et synthèse spectrales que je publierai prochainement.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **227**, p. 424-426, séance du 18 août 1948.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
130468-48 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.