Laurent Schwartz

# Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques

*Ann. of Math. (2)*, 48 (1947), p. 857-929.

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 48, No. 4, October, 1947

# THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

PAR LAURENT SCHWARTZ

(Received October 15, 1946)

## TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION

C'est M. Delsarte[1] qui a introduit la notion de fonction moyenne-périodique. Il a ainsi désigné toute fonction $f(x)$ complexe continue de la variable réelle $x$, vérifiant au moins une équation intégrale

$$(1) \qquad \int k(x-t)f(t)\,dt = 0 \quad \text{ou} \quad \int f(x-t)k(t)\,dt = 0 \qquad .$$

$k$ étant une fonction $\not\equiv 0$ à noyau compact[2] (c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle fini $(a, b)$). L'équation (1) peut s'écrire en utilisant la notation du produit de composition[3]

$$(2) \qquad k * f = 0.$$

Il existe une infinité d'exponentielles qui sont, en général, solutions de (1):

$$\int k(t) \exp (r(x-t))\,dt = 0$$

si

$$\int k(t) \exp (-rt)\,dt = 0.$$

Les valeurs correspondantes de $r$ sont les racines de l'indicatrice (fonction caractéristique dans la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants)

$$(3) \qquad K(r) = \int k(t) \exp (-rt)\,dt,$$

$K(r)$ est une fonction analytique, les racines forment donc une suite discrète. Il y a lieu aussi de rechercher les exponentielles-monômes $x^{p-1} \exp (rx)$ qui sont solutions de l'équation intégrale; cela revient à chercher si $r$ est racine multiple de $K(r)$.

Dans la théorie classique des équations différentielles linéaires à coefficients constants, toute solution est une combinaison linéaire des exponentielles-monômes qui sont solutions de l'équation. Est-ce encore vrai pour toute équation intégrale du type (2)? Effectivement, toute solution de (2) admet un développement en série suivant les exponentielles-monômes solutions de (2), développement convergent si $f$ est assez régulière et si $k$ elle-même satisfait à

[1] Delsarte [1]. Ayant une fois pour toutes renvoyé à ce mémoire je ne séparerai désormais plus ses résultats des miens.

[2] Le noyau d'une fonction, d'une mesure, d'une distribution, est le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel elle est nulle; c'est donc un ensemble fermé. Ici $(a, b)$ est le plus petit intervalle contenant le noyau.

[3] Le produit de composition de 2 fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est défini par la formule $h(x) = f * g = \int f(x-t)\,g(t)\,dt$. Voir préliminaires, 4°.

certaines conditions; les unes sont des conditions de régularité ($k$ est une fonction à variation bornée sans partie singulière), les autres au contraire des conditions de *discontinuité*: $k$, qui est à noyau compact, est discontinue aux extrêmités du noyau, autrement dit $k(a) \neq 0$, $k(b) \neq 0$. Tels sont les résultats de M. Delsarte. Les démonstrations utilisent la théorie des fonctions analytiques, et sont assez compliquées; mais il ne semble pas qu'on puisse les simplifier avec les méthodes actuelles.

Les résultats de M. Delsarte sont entièrement à l'origine de ce mémoire. J'ai essayé d'appliquer les théorèmes que j'avais démontrés sur les sommes d'exponentielles (Schwartz [2]) à l'étude de l'équation (2) dans le cas général. On arrive alors à des conclusions curieuses: les conditions posees par M. Delsarte relativement à $k$, qui paraissent assez normales lorsqu'on s'attaque aux équations intégrales usuelles, sont trés *restrictives* si l'on considere leur influence sur les racines caractéristiques de $K(r)$! Elles entraînent en particulier qu'il n'y en ait qu'un nombre fini dans tout angle ne contenant aucun demi-axe purement imaginaire, et d'autre part qu'elles soient assez règulièrement distribuées, ce qui n'est plus du tout vrai dans le cas général. La condition de discontinuité de $k$ est la plus restrictive; plus $k$ est régulier, plus le problème est difficile; c'est lorsque $k$ est une fonction indéfiniment dérivable (donc nulle avec toutes ses dérivées aux extrêmités du noyau) que se produisent les phénomènes les plus compliqués.

La conclusion générale à laquelle on aboutit est la suivante: si dans (2) on prend pour $k$ une mesure ou même une distribution[4] quelconque à noyau compact, toute solution $f$ admet un développement en série suivant les exponentielles-monômes solutions de (2), convergent par le procédé des groupements de termes et des facteurs exponentiels d'Abel (comme les développements en série d'exponentielles imaginaires que j'avais étudiés dans Schwartz [2]) uniformément sur tout compact.

Mais je me suis aperçu d'une autre circonstance très intéressante qui résulte des formules de composition que j'ai utilisées (voir §11 de ce mémoire). Les coefficients du développement de *$f$ dépendent de $f$ seulement* et non de l'équation intégrale (2) que l'on considère. Il est donc important de trouver une définition *intrinsèque* d'une fonction moyenne-périodique $f$ et de trouver son développement sans faire intervenir les équations intégrales dont elle est solution. C'est sous cet angle nouveau que j'ai traité la question ici:

*Une fonction moyenne-périodique $f(x)$ est une fonction telle que l'on ne puisse pas approcher, uniformément sur tout compact, toute fonction continue, avec les combinaisons linéaires des translatées $f(x - h)$ de $f(x)$.*

L'ensemble $\mathcal{T}f$ des fonctions que l'on peut approcher est donc plus petit que l'ensemble de toutes les fonctions continues. Si $f$ est solution de (2), $\mathcal{T}f$ ne contient que des solutions de (2); si $f$ est périodique, $\mathcal{T}f$ ne contient que des fonctions périodiques.

[4] Voir préliminaires, 5°.

Les exponentielles-monômes du développement de $f$ ne sont autres que celles qui appartiennent à $\mathcal{T}f$.

*Ainsi toute fonction moyenne-périodique est la somme d'une série formée avec les exponentielles-monomes qui sont limites de combinaisons des translatées de la fonction.* C'est là le théorème fondamental démontré dans le présent mémoire.

Les Préliminaires indiquent rapidement les notions qui seront indispensables. Le Chapitre I traite de la moyenne-périodicité en général (avec une définition plus générale encore que celle qui est donnée plus haut). Le Chapitre II étudie la moyenne-périodicité dans les groupes; il se borne à rappeler des résultats de M. M. Wiener, Beurling, Godement, et à les faire rentrer dans le cadre de la théorie générale ici exposée. Le Chapitre III traite des fonctions moyenne-périodiques d'une variable réelle.

Le §20 traite des théorèmes correlatifs de ceux-ci obtenus par dualité. Ils constituent une étude de l'algèbre topologique des mesures à noyaux compacts (le produit de 2 mesures $\mu$, $\nu$ étant leur produit de composition $\mu * \nu$); on montre que tout idéal fermé est caractérisé par une décomposition en facteurs premiers, en tout point analogue à celle des idéaux de polynomes à une variable et qui la généralise.

Le Chapitre IV traite des fonctions analytiques moyenne-périodiques d'une variable complexe.

Les resultats essentiels de ce mémoire ont paru dans une note aux Comptes-rendus de l'Académie des Siences [Schwartz [5]).

## Préliminaires

Les notions qui seront utilisées dans ce mémoire seront de natures diverses.

$1^0$—Des notions de topologie générale (ensemble ouvert, fermé, convergence, continuité, dans un espace topologique quelconque). La terminologie employée est celle de N. Bourbaki [1].

$2^0$—Des notions d'analyse fonctionnelle (espaces vectoriels topologiques de dimension infinie). J'utilise des théorèmes classiques, qu'on trouvera dans Banach [1], Kaczmarz-Steinhaus [1], Stone [1]. Le résumé le plus moderne figure dans Dieudonné [1]. J'ai donné moi-même dans des précédents mémoires (Schwartz [1] et [2], préliminaires) la plupart des définitions et propriétés que j'utilise ici.

Je rappellerai simplement ceci:

un systéme de vecteurs $e_\nu$ d'un espace vectoriel topologique $\mathfrak{E}$ est dit *total* si l'espace vectoriel engendré par le système est dense dans $\mathfrak{E}$;

un système de vecteurs $e_\nu$ est dit *libre* si aucun n'est adhérent au sous-espace vectoriel engendré par les autres. Tout vecteur $e$ adhérent au sous-espace vectoriel engendré par tous les vecteurs a alors un développement *formel* unique

$$e \backsim S_\nu c_\nu e_\nu \tag{4}$$

Les signes $\backsim$ et $S$ au lieu de $=$ et $\Sigma$ indiquent qu'il ne s'agit que d'une somme formelle. $c_k$ est une forme linéaire continue de $e$, et l'on a

$$c_k(e_j) = \delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j \\ 1 & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

Les prolongements à tout l'espace $\mathfrak{S}$ de ces formes linéaires continues définissent dans le dual $\mathfrak{S}'$ un système biorthogonal normal associé au système $e_\nu$.

Un système à la fois total et libre s'appelle une base.

3⁰—Des notions relatives à la transformation de Fourier, notamment sur les fonctions entières de type exponentiel, transformées de Fourier des mesures à noyau compact. Dans Titchmarsh [1], Bochner [1], Wiener [2], Paley-Wiener [1], Carleman[1] [1], on trouvera tous les renseignements nécessaires, ainsi que dans les préliminaires de Schwartz [1], [2]. Je rappellersi seuelement ici le théorème de Paley-Wiener:

Pour qu'une fonction $F(\lambda)$ soit transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ de carré sommable à noyau compact[5] il faut et il suffit qu'elle soit analytique entiére, de type exponentiel, de carré sommable sur l'axe réel des $\lambda$.

4⁰—Des notions de la théorie générale des groupes topologiques, de l'intégration dans les groupes localement compacts, du *produit de composition* (Faltung). Le produit de composition joue un rôle essentiel dans ce qui va suivre; en particulier la *régularisation*, opération qui fait correspondre à toute mesure $\mu$ sa *régularisée* $\mu * \rho$ qui est une fonction continue si $\rho$ est une fonction continue (lorsque $\rho$ varie, en restant $\geqq 0$, nulle en dehors de voisinages de plus en plus petits de l'unité du groupe, $\int \rho(x)\, dx$ gardant la valeur 1, $\mu * \rho$ converge vers $\mu$ dans la topologie faible des mesures). Le livre d'André Weil [1] contient largement les outils nécessaires; un court article de H. Carten [1] sur une autre question, celle des potentiels, contient un résumé de ces questions essentielles.

5⁰—Des notions sur une théorie des "distributions," généralisant les fonctions et les mesures, que j'ai mise sur pied l'année dernière, et qui n'est pas encore publiée sous forme compléte. Un très court résumé, contenant le *strict indispensable*, a paru aux Anales de la Faculté des Sciences de Grenoble (Schwartz [4]).

Dans cette théorie, la dérivation et le produit de composition ont un rôle primordial; toute distribution (en particulier toute mesure ou toute fonction) est indéfiniment dérivable, et composable avec toute distribution à noyau compact. Cela introduit de remarquables simplifications dans les démonstrations, notamment dans la théorie de la moyenne-périodicité. J'ai ici utilisé le moins possible les distributions, pour être plus clair. Mais sans aucun doute, c'est dans le domaine des distributions que la moyenne-périodicité a le plus d'interêt, c'est la considération des distributions moyenne-périodiques qui est la plus féconde; quand on résout l'équation intégrale

$$s * f = 0$$

[5] Voir note[3].

(oú $s$, à noyau compact, est donnée, $f$ inconnue) le cas le plus général est celui oú $s$ est une distribution quelconque, et oú l'inconnue $f$ elle-même est une distribution; ce cas général englobe alors des équations intégrales et des équations différentielles).

Je vais ici donner seulement des indications sur une question qui n'a pas été traitée dans Schwartz [4], celle de la transformation de Fourier. Si $s$ est une distribution à noyau compact, sa transformée de Fourier est définie par

$$S(\lambda) = s(\exp(-2i\pi\lambda x)). \tag{5}$$

On démontre que toute distribution à noyau compact est une somme finie de dérivées de mesures à noyaux compacts:

$$s = \sum_l \mu_l^{(\alpha_l)}.$$

La transformée de Fourier de $\mu_l$ est $M_l(\lambda)$, fonction analytique entière de type exponentiel, bornée pour $\lambda$ réel. La transformée de Fourier de la dérivée $\mu_l^{(\alpha_l)}$ est $(2i\pi\lambda)^{\alpha_l} M_l(\lambda)$, d'oú

$$S(\lambda) = \sum_l (2i\pi\lambda)^{\alpha_l} M_l(\lambda).$$

$S(\lambda)$ est donc une fonction analytique entière de type exponentiel, "à croissance lente" sur l'axe réel, ce qui signifie que pour $\lambda$ réel $\to \pm\infty$

$$S(\lambda) = 0(|\lambda|^p), p \text{ entier convenable.} \tag{6}$$

Réciproquement, soit $S(\lambda)$ une fonction analytique entiére de type exponentiel, à croissance lente sur l'axe réel. Si elle n'a qu'un nombre fini de racines, elle est de la forme

$$S(\lambda) = [\sum_j a_j(2i\pi\lambda)^j] \exp(-2i\pi\lambda a)$$

$a$ réel, la somme $\Sigma$ ayant un nombre fini de termes. Elle est alors la transformée de Fourier de la distribution obtenue en translatant de la longueur $a$ la distribution ponctuelle

$$\sum a_j \left(\frac{d}{dx}\right)^j.$$

Si $S(\lambda)$ a une infinité de racines, on peut la mettre sous la forme d'un produit d'un polynôme par une fonction entiére de type exponentiel, de carré sommable sur l'axe réel:

$$S(\lambda) = (\sum a_j(2i\pi\lambda)^j)F(\lambda).$$

Alors $F(\lambda)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$, fonction de carré sommable à noyau compact, d'apres Paley-Wiener (voir-ce-dessus), et $S(\lambda)$ est la transformée de Fourier de

$$\left(\sum a_j \left(\frac{d}{dx}\right)^j\right) * f.$$

On peut donc dire ceci:

THÉORÈME 1. *Pour que $S(\lambda)$ soit la transformée de Fourier d'une distribution à noyau compact, il faut et il suffit qu'elle soit analytique entière de type exponentiel, à croissante lente pour $\lambda$ réel.*

Le même théorème est vrai pour plusieurs variables quoique plus délicat à démontrer.

Les démonstrations utilisées dans ce mémoire sont autant que possible, indépendantes d'autres travaux. Mais dans certains cas, il m'a été indispensable de me borner à compléter ou modifier des démonstrations longues et délicates de SCHWARTZ [2], pour ne pas être obligé de les retranscrire intégralement. Pour suivre tous les détails du présent mémoire, il sera beaucoup plus facile de consulter les travaux antérieurs que j'ai indiqués.

## CHAPITRE PREMIER

### §1. Variété invariante.—Ensemble moyenne-périodique.

Soit $\mathfrak{E}$ un espace vectoriel topologique sur le corps des complexes, dont e désignera l'élément générique. $\mathcal{T}$ sera un ensemble d'applications linéaires continues $T$ de $\mathfrak{E}$ dans lui-même. Chacune de ces transformations $T$ fera donc correspondre à tout élément e de $\mathfrak{E}$ un nouvel élément $Te$ de telle sorte que

$$\begin{cases} T(e + f) = Te + Tf \\ T(\lambda e) = \lambda(Te), \ \lambda \text{ nombre complexe quelconque} \\ \text{Si } e \to 0, \ Te \to 0. \end{cases}$$

D'autre part, pour nous borner au seul cas intéressant, nous supposerons toujours que si $S$ et $T$ sont deux transformations appartenant à l'ensemble $\mathcal{T}$, il en est de même de $ST$ et que la transformation identique appartient à $\mathcal{T}$.

Pour $e$ fixe, lorsque $T$ parcourt $\mathcal{T}$, les transformés $Te$ engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}$ dont nous désignerons l'adhérence par $\mathcal{T}e$; $\mathcal{T}e$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{E}$ contenant tous les $Te$. Chaque élément de $\mathcal{T}e$ est donc limite de combinaisons linéaires finies $\sum c_i T_i e$ ($T_i \in \mathcal{T}$, $c_i$ nombres complexes) de transformées de $e$, et réciproquement.

Plus généralement, si $A$ est un ensemble quelconque d'éléments de $\mathfrak{E}$, $\mathcal{T}A$ sera le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{E}$ contenant tous les transformés $Te$ des éléments $e$ de $A$; chaque élément de $\mathcal{T}A$ est donc limite de combinaisons linéaires finies $\sum c_i T_i e_i$ ($c_i$ nombres complexes, $T_i \in \mathcal{T}$, $e_i \in A$) et réciproquement. En vertu de l'hypothèse faite plus haut sur l'ensemble $\mathcal{T}$ de transformations, $\mathcal{T}(\mathcal{T}A)$ est identique à $\mathcal{T}A$. Nous pouvons dire que $\mathcal{T}A$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{E}$ *invariant* par toutes les transformations $T$ (c'est-à-dire appliqué en lui-même par chacune d'elles) et que c'est le sous-espace le plus général possédant cette propriété, puisque si $V$ est un sous-espace vectoriel fermé invariant par toutes les transformations $T$, $\mathcal{T}V$ est identique à $V$. Nous nous proposons une étude de ces $\mathcal{T}A$ que nous appellerons par abréviation *variétés* *invariantes*; $A$ sera un ensemble originel[6] de $\mathcal{T}A$ ($e$ un élement originel de $\mathcal{T}e$) et $\mathcal{T}A$ est la plus petite variété invariante contenant $A$. Il y a lieu de rechercher dans chaque variété invariante le nombre minimum d'éléments constituant un ensemble originel.

Une partie $A$ de $\mathfrak{E}$ sera dite *moyenne-périodique* si $\mathcal{T}A$ est distincte de l'espace entier $\mathfrak{E}$; toute partie de $A$ est alors elle-même moyenne-périodique, en particulier tout élément $e$ de $A$ est moyenne-périodique, $\mathcal{T}e$ étant distincte de l'espace entier. Il existe toujours une partie $A$ non vide qui est moyenne-périodique: la variété (0) réduite à l'élément origine (0) de $\mathfrak{E}$. S'il n'en existe pas d'autre, cela signifie qu'il n'y a pas de variété invariante "non triviale," distincte de (0) et de l'espace entier $\mathfrak{E}$; on dit alors que l'ensemble de transformation $\mathcal{T}$ est *irréductible* ou *simple*.

Une variété invariante est dite *maximale* si elle est distincte de $\mathfrak{E}$ et si elle n'est contenue dans aucune autre variété invariante qu'elle-même ou $\mathfrak{E}$; une variété invariante est minimale si elle est distincte de la variété (0) et ne contient aucune autre variété invariante qu'elle-même et (0). Si $\mathcal{T}$ est irréductible, $\mathfrak{E}$ est minimale, (0) est maximale. Sur toute variété invariante distincte de (0) $\mathcal{T}$ définit un ensemble de transformations; pour que cet ensemble soit irréductible, il faut et il suffit que la variété soit minimale. Si $V$ est une variété invariante distincte de $\mathfrak{E}$, chaque transformation $T$ définit une transformation linéaire continue de l'espace topologique quotient $\mathfrak{E}/V$ dans lui-même (car les éléments d'une même classe de $\mathfrak{E}$ modulo $V$ ont pour transformés par $T$ les éléments d'une même classe); pour que $\mathcal{T}$ soit irréductible sur $\mathfrak{E}/V$, il faut et il suffit que $V$ soit maximale.

La notion d'élément moyenne-périodique a été introduite pår M. Delsarte,[7] dans un cas particulier, à partir de la théorie des équations intégrales.

Nous montrerons plus loin[8] que sa définition est équivalente à la suivante: une fonction moyenne-périodique $f(x)$ est une fonction telle qu'on ne puisse pas approcher uniformément sur tout intervalle fini toute fonction continue par des combinaisons linéaires finies des "translatées" $f(x - h)$ de $f(x)$. Si donc nous appelons $\mathfrak{E}$ l'espace vectoriel des fonctions continues complexes d'une variable réelle, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout intervalle fini (des $f_i$ seront dites converger vers $f$ si les $f_i(x)$ convergent vers $f(x)$ uniformément sur tout intervalle fini); si d'autre part nous appelons $\mathcal{T}$ le groupe des translations $T_h$

$$T_h f(x) = f(x - h), \tag{7}$$

un élément moyenne-périodique de $\mathfrak{E}$, par rapport au groupe de transformations $\mathcal{T}$, est une fonction moyenne-périodique au sens de M. Delsarte.

Voice le genre de problèmes auxquels nous nous attacherons dans ce mémoire:

---

[6] Ne pas confrondre ensemble total et ensemble originel. Voir préliminaires, 2°.

[7] DELSARTE [1].

[8] Formule (14).

$1^0$. Rechercher toutes les variétés invariantes. Pour chacune d'elles trouver le nombre minimum d'éléments originels. Existe-t-il das variétés invariantes minimales, maximales, et lesquelles?

$2^0$. Existe-t-il des variétés invariantes de dimension finie $p$? de dimension 1 en particulier? Un élément originel d'une variété invariante de dimension $p$ sera dit moyenne-périodique d'ordre $p$.

$3^0$. Y a-t-il dans toute variété invariante des éléments moyenne-périodiques d'ordre 1, d'ordre fini? Ces éléments forment-ils un systéme total dans toute variété invariante? Toute variété invariante est-elle somme[9] des variétés invariantes minimales qu'elle contient?

Il est évidemment impossible de donner des réponses à ces questions, valables dans tous les cas. Aussi allons-nous particulariser le problème, en supposant que $\mathcal{T}$ est un groupe, et que $\mathfrak{E}$ est isomorphe à un espace vectoriel de fonctions définies sur le groupe.

## §2. Cas d'un groupe de transformations.

Donnons d'abord quelques remarques générales valables lorsque $\mathcal{T}$ est un groupe. Allors toute transformation $T \epsilon \mathcal{T}$ est un automorphisme de $\mathfrak{E}$, c'est-à-dire une transformation biunivoque et bicontinue de $\mathfrak{E}$ sur lui-même; la transformation inverse $T^{-1}$ existe et $T^{-1} \epsilon \mathcal{T}$. Alors, si $V$ est une variété invariante, $T$ définit dans $V$ un automorphisme. C'est en effet une application biunivoque et bicontinue de $V$ *dans* elle-même; et l'image de $V$ est $V$ tout entière car si $e \epsilon V$, $e = T(T^{-1}e)$, $T^{-1}e$ étant bien un élément de $V$ puisque $V$ est invariante. Lorsque $\mathcal{T}$ est un groupe il y a une nouvelle manière d'obtenir les variétés invariantes. Soit $F$ un sous-espace vectoriel fermé quelconque. L'intersection $\mathcal{I}F$ de toutes les transformées $TF$ est un sous-espace vectoriel ferme. Il est aisé de voir que $\mathcal{I}F$ est une variété invariante. En effet si $e \epsilon \mathcal{I}F$, on a $e \epsilon TF$ quel que soit $T \epsilon \mathcal{T}$; alors $Se \epsilon STF$. En posant $T = S^{-1}T'$ on voit que $Se \epsilon T'F$ quel que soit $T' \epsilon \mathcal{T}$, donc $Se \epsilon \mathcal{I}F$; ce que prouve bien que toute transformation $S$ de $\mathcal{T}$ transforme $\mathcal{I}F$ dans elle-même. $\mathcal{I}F$ est la plus grande variété invariante contenue dans $F$. $S$ définit, comme il est dit plus haut, un automorphisme de $\mathcal{I}F$, $S\mathcal{I}F = \mathcal{I}F$, et par suite, $\mathcal{I}(\mathcal{I}F) = \mathcal{I}F$. On peut d'ailleurs obtenir par ce procédé toute variété invariante car si $V$ est une telle variété, $SV = V$ quelle que soit $S \epsilon \mathcal{T}$, donc $V = \mathcal{I}V$.

Le procédé $\mathcal{T}A$ et le procédé $\mathcal{I}F$ pour définit une variété invariante sont "corrélatifs."

Corrélativement à la notion d'ensemble moyene-périodique $A$ on pourra considérer les variétés fermées $F$ telles que $\mathcal{I}F \neq (0)$. Corrélativement aux 3 questions posées au §1 on pourra poser les questions suivantes:

$1^0$—Pour toute variété invariante $V$, trouver des espaces vectoriels fermés $F$ aussi "grands" que possible tels que $\mathcal{I}F = V$.

---

[9] La variété somme d'une famille de variétés sera la plus petite variété fermée qui les contient.

2°—Existe-t-il des variétés invariantes de co-dimension[10] finie $p$? des hyperplans invariants en particulier?

3°—Toute variété invariante est-elle contenue dans des variétés invariantes de co-dimension finie? est-elle l'intersection des variétés invariantes de co-dimension finie qui la contiennent? des variétés invariantes maximales qui la contiennent?

La corrélation entre les deux catégories de problèmes est mise en évidence par la dualité entre espaces vectoriels. Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux espaces vectoriels en dualité réciproque, appelons $(e', e)$ le produit scalaire qui établit la dualité. A toute transformation continue $T$ de $\mathcal{E}$ dans lui-même on peut associer sa transposée $T'$[11], transformation continue de $\mathcal{E}'$ dans lui-même, définie par l'égalité fonctionnelle

$$(T'e' \cdot e) = (e' \cdot Te) \tag{8}$$

valable pour tout couple $e' \in \mathcal{E}'$, $e \in \mathcal{E}$.

Si donc $\mathcal{T}$ est un ensemble de transformations de $\mathcal{E}$, son transposé $\mathcal{T}'$ sera un ensemble de transformations dans $\mathcal{E}'$. Il sera utile d'étudier en même temps $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ d'une part, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{T}'$ d'autre part. Soit $V$ une variété invariante de $\mathcal{E}$, $V'$ son orthogonale. $V'$ est une variété invariante de $\mathcal{E}'$. Pour le voir, il suffit de montrer que, quel que soit $e' \in V'$, $T' \in \mathcal{T}'$, on a $T'e' \in V'$, ou encore $(T'e' \cdot e) = 0$ quel que soit $e \in V$; mais cela revient à $e' \cdot Te = 0$, qui est bien exact puisque $e' \in V'$, $Te \in V$. En vertu de la dualité réciproque, toute variété invariante $V'$ de $\mathcal{E}'$ est l'orthogonale d'une variété invariante $V$ de $\mathcal{E}$. Si on a défini $V$ par $\mathcal{T}A$, son orthogonale $V'$ pourra être définie par $\mathcal{G}'A'$, $A'$ étant la variété orthogonale à $A$. A tout problème dans $(\mathcal{E}, \mathcal{T})$ correspond bien ainsi un probléme corrélatif dans $(\mathcal{E}', \mathcal{T}')$. Par exemple:

Si $V$ est une variété invariante qui est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les éléments moyenne-périodiques d'ordre fini qu'elle contient, son orthogonale $V'$ est une variété invariante qui est l'intersection des variétés invariantes de co-dimension finie qui la contiennent et réciproquement.

Si $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel topologique quelconque, $\mathcal{E}'$ son dual topologique, la dualité entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ n'est pas nécessairement réciproque. Dans ce cas on pourra se contenter des "topologies faibles"[12] associées de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, ce qui ne modifiera rien aux recherches que l'on veut faire dans $(\mathcal{E}, \mathcal{T})$; car les transformations $T$, fortement continues sont aussi faiblement continues, et une variété fortement fermée de $\mathcal{E}$ est aussi faiblement fermée et réciproquement.

Il y a un cas général oú l'on peut répondre à toutes les questions posées dans ce paragraphe: celui oú $\mathcal{T}$ est définie par une représentation d'un groupe compact. Supposons plus généralement que $\mathcal{T}$ soit un groupe quelconque de transformations, $\mathcal{E}$ complet à base dénombrable de voisinages, et que tout élément de $\mathcal{E}$

---

[10] Un sous-espace vectoriel $V$ est de co-dimension $p$ s'il possède un sous-espace vectoriel supplémentaire de dimension $p$. Si $p = 1$, $V$ est un hyperplan.

[11] Voir DIEUDONNÉ, [1], page 118.

[12] Voir DIEUDONNÉ, [1], page 112.

soit "presque-périodique" par rapport à $\mathcal{T}$, autrement dit que, quel que soit $e \in \mathcal{E}$, l'ensemble des $Te$, $T \in \mathcal{T}$, ait une adhérence compacte. On connaît alors toutes les variétés invariantes minimales, qui sont de dimension finie (et de dimension 1 si $\mathcal{T}$ est un groupe abélien); toute variété invariante est somme libre des variétés invariantes minimales qu'elle contient. Toutes les variétés invariantes maximales sont de co-dimesion finie (de co-dimension 1 si $\mathcal{T}$ est un groupe abélien), toute variété invariante est intersection des variétés invariantes maximales qui la contiennent. Ces résultats sont une conséquence facile de la théorie de Peter-Weyl des groupes compacts et constituent la théorie générale de la presque-périodicité.[13]

Dans les paragraphes qui suivent, nous étudierons un cas de groupe abélien non compact. Des difficultés nouvelles surgissent alors, que nous verrons en cours de route.

## CHAPITRE DEUXIEME

### §3. Espaces $L^p$ sur un groupe abélien localement compact. Cas $p = 2$.

Soit $G$ un groupe topologique abélien localement compact noté additivement, $dx$ l'élément de mesure de Haar[14]; $L^pG$ sera l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes sur $G$, de puissance $p$-iéme sommable par rapport à la mesure de Haar, avec la norme

$$||f||_p = \left(\int |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

(pour $p = \infty$ $L^\infty G$ est l'espace des fonctions mesurables bornées, $||f||_\infty$ étant le maximum vrai de $|f|$).

$L^pG$ est un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de fonctions sur $G$. Chaque élément $h$ de $G$ définit sur $\mathcal{E}$ une transformation $T_h$, une translation

$$T_hf = f_h(x) = f(x - h) \tag{7}$$

qui est une transformation conservant la norme.

Les transformations $T_h$ forment un groupe $\mathcal{T}$ isomorphe à $G$ de transformations sur $\mathcal{E}$. C'est pour de tels couples $(\mathcal{E}, \mathcal{T}) = (L^pG, G)$ que la question de moyenne périodicitée s'est posée d'abord.

La théorie ne présente aucune difficulté lorsque $p = 2$, $\mathcal{E}$ est l'espace de Hilbert $L^2G$ que nous identifierons avec son dual, en utilisant le produit scalaire et l'orthogonalité dans $L^2G$. Nous allons exposer complétement la question, bien qu'elle soit classique, pour monter dans le détail ce qui se produit et permettre de comprendre plus facilement la suite.

Soit $V$ un variété invariante de $L^2G$, $V'$ la variété orthogonale supplémentaire dans $L^2G$. Si $f \in L^2G$, appartient à $V$, et $\varphi \in L^2G$ à $V'$, on a

$$\int \bar{f}(x)\varphi(x) \, dx = 0. \tag{8}$$

---

[13] Bibliographie dans WEIL [1]. Ce que nous énonçons ici se trouve sous une forme voisine dans BOCHNER et VON NEUMANN [1].

[14] WEIL [1], Chapitre II.

Mais on a aussi $f(x - h) \in V$ quel que soit $h$, puisque $V$ est une variété invariante, donc

$$\int \bar{f}(x - h)\varphi(x)\, dx = 0 \qquad \text{quel que soit } h,$$

ou, en utilsant le produit de composition[15]

$$\check{\bar{f}} * \varphi = 0 \tag{9}$$

$\check{\bar{f}}$ étant la fonction $\bar{f}(-x)$.

Mais la transposée de la transformation

$$f \rightarrow T_h f = f(x - h)$$

est la transformation

$$\varphi \rightarrow T'_h \varphi = \varphi(x + h)$$

puisque

$$\int f(x)\varphi(x + h)\, dx = \int \bar{f}(x - h)\varphi(x)\, dx$$

on a donc aussi $\varphi(x + h) \in V'$, et (9) est équivalent à

$$f * \check{\varphi} = 0 \tag{9'}$$

D'ailleurs chacune des variétés est l'orthogonale de l'autre; $V'$ est l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in L^2$ qui vérifient (9) pour toute $f \in V$, et $V$ l'ensemble des $f \in L^2$ qui vérifient (9) pour toute $\varphi \in V'$.

Utilisons la transformation de Fourier qui permet de remplacer le produit de composition par le produit[16] de multiplication ordinaire. Désignons par $(x, \lambda)$ la fonction établissant la dualité entre $G$ et son groupe dual $G'$. Si $G$ est le groupe additif des nombres réels il en est de même de $G'$ et

$$(x, \lambda) = \exp(2i\pi\lambda x), \qquad \lambda \text{ réel.}$$

Si $F(\lambda)$ et $\Phi(\lambda)$ sont les transformées de Fourier de $f(x) \in V$ et $\varphi(x) \in V'$ définies respectivement par

$$F(\lambda) = \int \overline{(x, \lambda)} f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \Phi(\lambda) = \int \overline{(x, \lambda)} \varphi(x)\, dx, \quad \lambda \text{ parcourant } G'$$

$$F(\lambda) \in L^2 G'; \qquad \Phi(\lambda) \in L^2 G'$$

$$\overline{F(\lambda)}\Phi(\lambda) = 0 \qquad \text{(presque partout).} \tag{10}$$

---

[15] WEIL [1], Chapitre III.
[16] WEIL [1], page 111.

Soit $\Lambda_F$ l'ensemble (défini à un ensemble de mesure nulle près) des $\lambda$ pour lesquels $F(\lambda) \neq 0$. $\Lambda_F$ sera "l'ensemble spectral ou spectre[17]" de $f$; $f(x - h)$ a aussi le même spectre quel que soit $h$; de même soit $\Lambda'_\Phi$ le spectre de $\varphi$. Pour que (10) soit vérifiée il faut et il suffit que l'intersection de $\Lambda_F$ et $\Lambda'_\Phi$ soit de mesure nulle. Pour que $\varphi \in L^2G$ soit $\in V'$ il faut et il suffit que $\Lambda'_\Phi$ et $\Lambda_F$ n'aient en commun qu'un ensemble de mesure nulle quelle que soit $f \in V$. Bornons-nous au cas oú $G'$ est réunion dénombrable d'ensembles de mesures finies de sorte qu'il existe une fonction $\Psi(\lambda) \in L^2G'$ qui ne s'annule en aucun point.[18] Elle est transformée de Fourier de $\psi(x) \in L^2G$, et comme $V$ et $V'$ dans $L^2G$ sont 2 variétés orthogonales supplémentaires on peut écrire

$$\psi(x) = f_0(x) + \varphi_0(x), \quad f_0(x) \in V, \quad \varphi_0(x) \in V'.$$

Soient $\Lambda_0$ et $\Lambda'_0$ les spectres de $f_0$ et $\varphi_0$.

L'intersection de $\Lambda_0$ et $\Lambda'_0$ est vide (à un ensemble de mesure nulle près), mais comme $\Psi(\lambda) = F_0(\lambda) + \Phi_0(\lambda)$ et que $\Psi(\lambda)$ ne s'annule pas, leur réunion est tout l'ensemble $G'$ (à un ensemble de mesure nulle près); $\Lambda_0$ et $\Lambda'_0$ sont complémentaires.

Mais nous avons vu que pour toute $\varphi \in V'$, $\Lambda'_\Phi$ ne coupe pas $\Lambda_0$ (à un ensemble de mesure nulle près), donc $\Lambda'_\Phi \subset \Lambda'_0$ àun ensemble de mesure nulle près; de même pour toute $f \in V$, $\Lambda_F \subset \Lambda_0$ à un ensemble de mesure nulle près.

Réciproquement si $f \in L^2G$ est une fonction dont le spectre est contenu dans $\Lambda_0$ à un ensemble de mesure nulle près, on voit bien que $\Lambda_F \cap \Lambda'_\Phi = \phi$ à un ensemble de mesure nulle près, quelle que soit $\varphi \in V'$, donc $f \in V$.

*Ainsi chaque variété invariante $V$ de $L^2G$ est caractérisée par un ensemble $\Lambda$ de $G'$ qu'on appellera "ensemble spectral" ou "spectre" de $V$ et qui est défini à un ensemble de mesure nulle près; $V$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in L^2G$ dont la transformée de Fourier $F(\lambda)$ est presque partout nulle sur le complémentaire $\Lambda'$ de $\Lambda$. $\Lambda'$ est le spectre de la variété invariante $V'$ orthogonale supplémentaire. Le spectre de l'une des variétés s'appelle aussi co-spectre de l'autre.*

On remarquera alors les propriétés suivantes:

1°—Si tout ensemble réduit à un point dans $G'$ est de mesure nulle, il n'y a ni variété invariante maximale ni variété invariante minimale, distincte de (0) ou $\mathcal{E}$.

On voit en effet aisément que cela revient à dire que si $\Lambda$ est un ensemble de mesure $> 0$ de $G'$, on peut trouver un ensemble contenu dans $\Lambda$ et de mesure strictement plus petite.

2° On peut trouver, pour toute variété invariante $V$ un élement originel $f$ tel que $\mathcal{I}f = V$, et aussi un hyperplan $H$ tel que $\mathcal{I}H = V$.[19] Soit en effet

[17] L'ensemble spectral de $f$ n'est pas le noyau de $F(\lambda)$ (qui est toujours un ensemble fermé). Si $\Lambda_0$ et $\Lambda'_0$ sont denses, leurs adhérences, identiques a $G'$, ne seraient pas complémentaires.

[18] C'est seulement pour simplifier, le résultat est général.

[19] L'hypothèse restrictive dont il est parlé, note 18, est ici indispensable.

$\Lambda$ le spectre de $V$, $\Lambda'$ celui de la variété orthogonale $V'$. Soit $F(\lambda) \in L^2G$, une fonction nulle sur $\Lambda'$, $\neq 0$ partou sur $\Lambda$. Elle est transformée de Fourier de $f \in L^2G$; $f$ est un élément originel de $V$ car le spectre de $\mathcal{T}f$ qui est $\Lambda_F$ est identique au spectre $\Lambda$ de $V$.

Pour $V'$ on peut ausi trouver un élément originel $\varphi$; alors si $H$ est l'hyperplan orthogonal à $\varphi$, $\mathcal{T}\varphi = V'$ est équivalent par dualité à $\mathcal{G}H = V$.

$3^0$—Pour que $f \in L^2G$ soit moyene-périodique, il faut et il suffit que sa transformée de Fourier $F(\lambda)$ s'annule sur un ensemble de mesure $> 0$ de $G'$. Pour qu'un ensemble $A$ de fonctions $f_\iota$ de $L^2G$ soit moyenne-périodique, il faut et il suffit que les transformées de Fourier $F_\iota(\lambda)$ s'annulent toutes sur un même ensemble de mesure $> 0$ de $G'$.

## §4. Espace $L^1G$.

Passons maintenant au cas de $p = 1$, $\mathcal{E} = L^1G$, $G$ étant toujours un groupe abélien localement compact. Le dual de $L^1G$ est $L^\infty G$. Pour $f \in L^1$ et $\varphi \in L^\infty$ nous écrirons le produit scalaire sous la forme

$$f\cdot\varphi = \int \check{f}(x)\varphi(x)\, dx = \int f(x)\check{\varphi}(x)\, dx,$$

$\check{f}(x)$ et $\check{\varphi}(x)$ désignant $f(-x)$ et $\varphi(-x)$.[20]

Si $V$ est une variété invariante de $L^1G$, $V'$ la variété orthogonale dans $L^\infty G$, $f \in V$, $\varphi \in V'$ on a cette fois la formule

$$f * \varphi = 0. \tag{11}$$

Il existe cependant une différence importante avec le cas $p = 2$: la dualité n'est pas réciproque entre $L^1G$ et $L^\infty G$. Si l'on part d'une variété invariante $V$ de $L^1G$, les fonctions $\varphi \in V'$ sont bien toutes les fonctions de $L^\infty G$ qui vérifient (11) quelle que soit $f \in V$, et réciproquement les fonctions $f \in V$ sont toutes les fonctions de $L^1G$ qui vérifient (11) quelle que soit $\varphi = V'$; mais si $V'$ est une variété invariante de $L^\infty G$, $V$ sa variété orthogonale dans $L^1G$, l'orthogonale de $V$ dans $L^\infty G$ est une nouvelle variété $V''$ qui contient $V'$ mais ne lui est pas en général identique, de sorte que les $f \in V$ seront bien toutes les fonctions de $L^1G$ qui vérifient (11) quelle que soit $\varphi \in V'$, mais les $\varphi \in V'$ ne sont qu'une partie des fonctions de $L^\infty G$ qui vérifient (11) quelle que soit $f \in V$. Pour conserver la réciprocité entre les deux espaces, il faut introduire dans $L^\infty G$ la "topologie faible" définie en considération $L^\infty G$ comme dual de $L^1G$; autrement dit la réciprocité n'est valable que si l'on parte d'une variété $V'$ faiblement fermée dans $L^\infty G$.

---

[20] Nous aurions le choix entre 3 définitions possibles du produit scalaire: $\int f\varphi\, dx$, $\int f\check{\varphi}\, dx$, $\int f\bar{\varphi}\, dx$; dans la formule de composition (14) on aurait respectivement $f*\check{\varphi}$, $f*\varphi$, $f*\bar{\varphi}$. La formule de composition jouant dans tout le mémoire un rôle essentiel, nous avons voulu avoir l'expression la plus simple soit $f*\varphi$; d'oú notre définition du produit scalaire.

Il existe d'autre part une grande difficulté qui ne se présentait pas dans le cas $p = 2$: une fonction $\varphi \in L^\infty G$ n'a pas de transformée de Fourier en général. Si $G$ est le groupe additif $R^n$ puissance n-ième du groupe additif $R$ des nombres réels, on peut bien définir,[21] une "distribution" transformée de fourier $\Phi(\lambda)$, mais le maniement en est beaucoup plus difficile que celui d'une fonction, et cela ne résoud pas de toute façon le cas de $G$ quelconque. Les premiers résultats dans ce domaine ont été donnés par M. N. Wiener,[22] relatifs au groupe additif $R$ des nombres réels. D'autres auteurs ont modifié cette démonstration; M. Wiener avait raissonné dans $L^1R$, M. A. Beurling[23] a introduit un raissonnement dans $L^\infty R$ qui redonne en même temps les résultats de M. Wiener; enfin récemment M. R. Godement,[24] en s'appuyant sur la théorie des anneaux normés de M. Gelfand,[25] a étendu les théorèmes de Wiener et Buerling à un groupe quelconque $G$ abélien localement compact.

Soit $V$ une variété invariante de $L^1G$. Une fonction $f \in V$ a une transformée de Fourier $F(\lambda)$, *continue sur* $G'$ (et "nulle à l'infini" d'après un théorème de Lebesgue). L'ensemble $\Lambda_F$ des points de $G'$ oú $F(\lambda) \neq 0$ sera appelé le spectre de $f$, c'est un *ensemble ouvert*; contrairement à ce qui se passait dans le cas $p = 2$, il est très bien défini, et non pas seulement à un ensemble de mesure nulle près. La rèunion $\Lambda$ des $\Lambda_F$ correspondant à tous les $f \in V$ est un ensemble ouvert $\Lambda$ qui sera le spectre de $V$. Quant au spectre de $V'$, on ne peut pas le définir par la transformation de Fourier, puisque $\varphi \in V'$ n'a pas en général de transformée de Fourier.

Le spectre $\Lambda'$ de $V'$ sera par définition le complémentaire de $\Lambda$ donc un ensemble fermé de $G'$. Le théorème général de Wiener-Godement peut s'énoncer ainsi:

THÈORÉME 2. *Si $V'$ n'est pas réduite à* (0), *son spectre $\Lambda'$ n'est pas vide, et réciproquement.*[26]

On peut donc encore l'énoncer de la façon suivante: si $V$ est distincte de $\mathfrak{S} = L^1G$, il existe au moins un point $\lambda \in G'$ sur lequel s'annulent les transformées de Fourier de toutes les fonctions $f \in V$. Alors pour qu'une fonction $f \in L^1G$ soit moyenne-périodique, il faut et il suffit que sa transformée de Fourier $F(\lambda)$ s'annule en au moins un point. Pour qu'un ensemble $A$ de fonctions $f_\iota(x) \in L^1G$ soit moyenne-périodique,il faut et il suffit que les transformées de Fourier $F_\iota(\lambda)$ s'annulent en au moins un point commun.

Ces théorèmes attirent lesremarques suivantes:

$1^0$—Il y a dans $L^1G$ des variétés invariantes maximales: ce sont des hyperplans dont le spectre est dans $G'$ le complémentaire d'un point. L'hyperplan

[21] La théorie de la transformation de Fourier des distributions sera publiée dans un mémoire ultérieur.

[22] WIENER [1], ou [2] Chapitre II. Carleman [1] page 71.

[23] BEURLING [1].

[24] GODEMENT [1].

[25] GELFAND [1]

[26] Il est bien évident que si $V$ n'est pas réduite à (0), $\Lambda$ n'est pas vide et réciproquement.

invariant le plus général est formé de toutes les fonctions $f \in L^1G$ dont la transformée de Fourier s'annule en un point donné $\lambda$ de $G'$.

2°—Le théorème 2 exprime que toute variété invariante distincte de $\mathcal{E}$ est contenue dans au moins un hyperplan invariant.

3°—Si $G'$ n'est pas discret il n'y a pas dans $L^1G$ de variété invariante minimale. Car $\Lambda$ étant un ouvert quelconque de $G'$ il existe des ouverts strictement plus petits.

4°—*On ne sait pas* si une variété $V$ est caractérisée par son spectre $\Lambda$. Autrement dit on ne sait pas si $V$ est l'ensemble de *toutes* les $f \in L^1G$ dont la transformée de Fourier s'annule sur le cospectre $\Lambda'$. Ou encore *on ne sait pas* à l'heure actuelle (même lorsque $G$ est le groupe $R$ des nombres réels) si toute variété invariante est l'intersection des hyperplans invariants qui la contiennent.

Il existe dans $L^1G$ une structure d'anneau ("anneau normé" de Gelfand[27]) où le produit est le produit de composition.

Si $h = f * h$ on a

$$h \in L^1G, \; \| h \|_{L^1} \leqq \| f \|_{L^1} \, \| G \|_{L^1} .$$

On démontre immédiatement[28] que si $f \in L^1G$, $\mathcal{J}f$ est aussi l'adhérence de tous les produits $f * \rho$, $\rho \in L^1G$ quelconque.

Une variété invariante $V$ est donc tout simplement un *idéal fermé* quelconque de l'anneau. Un hyperplan invariant est l'idéal fermé maximal ou idéal fermé "premier" le plus général; le théorème de Wiener-Godement exprime que tout idéal fermé est contenu dans au moins au idéal fermé premier.

## §5. Espace $L^\infty G$.

Il est maintenant possible de passer de l'étude de $L^1G$ à celle de $L^\infty G$ muni de la topologie faible. L'élément $\lambda$ de $G'$ définit sur $G$ un "caractère" $(x, \lambda)$, qui est une fonction sur $G$, $\in L^\infty G$. A quelle condition le caractère $(x, \lambda)$ est-il $\in V'$?

Il faut et il suffit, pour cela, qu'il soit orthogonal à $V$, c'est-à-dire que

$$(12) \qquad \int (-x, \lambda) f(x)\, dx = \int \overline{(x, \lambda)} f(x)\, dx = 0 \quad \text{quelle que soit } f \in V.$$

Mais le premier membre de (12) n'est autre que la valeur au point $\lambda$ de $G'$ de la transformée de Fourier $F(\lambda)$ de $f$; donc $(x, \lambda) \in V'$ si les transformées de Fourier de toutes les fonctions $f \in V'$ s'annulent au point $\lambda$, c'est-à-dire si $\lambda \in \Lambda'$. Ainsi le spectre $\Lambda'$ d'une variété invariante faiblement fermée de $L^\infty G$ indique exactement tous les caractères de $G$ qui appartiennent à $V'$.

Le théorème de Wiener-Godement donne dans $L^\infty G$ celui de Beurling-Godement:

THÉORÈME 3: *Dans toute variété invariante faiblement fermée $V'$ de $L^\infty G$, distincte de* (0), *existe au moins un caractère de $G$.*

[27] Voir, note [25].

[28] Voir plus loin, §6.

En particulier si $\varphi \in L^\infty G$ est $\neq 0$, il existe au moins un caractére qui est limite faible des combinaisons linéaires des translatées $\varphi(x - h)$ de $\varphi$.

Les remarques corrélatives de celles du §4 sont les suivantes:

1°—Il y a fans $L^\infty G$ faible des variétés invariantes minimales: elles n'ont qu'une dimension et sont engendrées par un caractère de $G$.

2°—Le théorème 3 exprime que toute variété invariante contient au moins une variété invariante minimale.

3°—Si $G'$ n'est pas discret, il n'y a pas de variété invariante maximale.

4°—*On ne sait pas* si une variété invariante est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par tous les caractères qu'elle contient.

Ajoutons que, comme on le voit aisément, pour que $\varphi \in L^\infty$ soit moyenne-périodique il faut et il suffit que son spectre ne soit pas $G'$ tout entier.

Nous n'avons pas pu définir le spectre $\Lambda'$ de $\varphi \in L^\infty G$ par la transformée de Fourier de $\varphi$, qu'on ne peut pas définir en général. Cependant si $G = G'$ est le groupe $R^n$, la théorie des "distributions" permet de définir une *distribution* $\Phi(\lambda)$ transformée de Fourier de $\varphi$. On démontre [29] que $\Lambda_\Phi$ est encore en quelque sorte l'ensemble sur lequel $\Phi \neq 0$: c'est tout simplement le "noyau" de la distribution $\Phi$, ensemble nécessairement fermé.

Le produit de composition de deux fonctions de $L^\infty G$ n'a pas de sens en général; $L^\infty G$ n'a pas de structure d'anneau. L'étude faite par M. M. Godement-Beurling dans $L^\infty G$ considère une topologie intermédiaire entre la forte et la faible. Nous n'insisterons pas ici.

En dehors des cas $p = 2$, $p = 1$, $p = \infty$, on n'a pratiquement aucun renseignement.

## §6. Nouveaux espaces fonctionnels sur un groupe.

Le but essentiel du présent mémoire est d'examiner les problèmes posés dans les pages précédentes, dans d'autres espaces vectoriels de fonctions sur un groupe.

$\mathcal{E}_c$ sera l'espace vectoriel des fonctions continues sur un groupe $G$ abélien localement compact, avec la topologie suivante: des $f_\iota \in \mathcal{E}_c$ convergent vers $f \in \mathcal{E}_c$ si les fonctions $f_\iota(x)$ convergent vers la fonction $f(x)$ uniformément sur tout compact. $\mathcal{E}_c$ n'est pas normé, c'est un espace vectoriel topologique localement convexe.[30] Un système fondamental de voisinages de la fonction 0 est défini de la façon suivante:

$K$ étant un compact arbitraire de $G$, $\epsilon$ un nombre $> 0$, $U(K, \epsilon)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues bornées en module par $\epsilon$ sur $K$.

Le dual $\mathcal{E}'_c$ de $\mathcal{E}_c$ est l'espace vectoriel de toutes les mesures $\mu$ sur $G$ à noyau compact. La forme bilinéaire ou produit scalaire qui définit la dualité entre $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}'_c$ est:

$$\mu \cdot f = \int f \, d\check{\mu} = \int \check{f} \, d\mu. \tag{13}$$

[29] La démonstration sera publiée ultérieurement dans un mémoire sur la théorie générale des distributions.

[30] Voir DIEUDONNÉ [1] page 110.

Si en effet $\mathcal{L}(f)$ est une forme linéaire continue il existe un voisinage $U(K, \epsilon)$ tel que $f \in U(K, \epsilon)$ entraîne $|\mathcal{L}(f)| \leqq 1$. Alors si $f$ est nul sur $K$, $\mathcal{L}(f) = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{L}(f)$ ne dépend que des valeurs de $f$ sur $K$. Elle en dépend linéairement et continuement, donc il existe une mesure $\check{\mu}$ portée par $K$ telle que

$$\mathcal{L}(f) = \int f \, d\check{\mu}.$$

Pour que la dualité entre $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}'_c$ soit réciproque, il faudra munir $\mathcal{E}'_c$ de la topologie faible: des mesures $\mu_i$ convergeront vers la mesure $\mu$, si, quelle que soit la fonction continue $f$, $\mu_i \cdot f$ converge vers $\mu \cdot f$.

Si $V$ et $V'$ sont deux variétés invariantes orthogonales dans $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}'_c$, on aura

$$\int f(x - h) \, d\check{\mu}(x) = 0 \qquad \text{quel que soit } h$$

pour $f \in V$, $\mu \in V'$ arbitraires, ou

$$f * \mu = 0 \tag{14}$$

le produit de composition $f * \mu$ ayant toujours un sens lorsque $\mu$ est à noyau compact.

Ici encore $V$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{E}_c$ qui vérifient (14) quelle que soit $\mu \in V'$, $V'$ est l'ensemble des $\mu \in \mathcal{E}'_c$ qui vérifient (14) quelle que soit $f \in V$.

Soit $\rho$ une mesure à noyau compact. Si $f \in V$, on a $\mu * f = 0$ quelle que soit $\mu \in V'$, donc aussi $\mu * (f * \rho) = 0$, ce qui prouve que $f * \rho \in V$. Autrement dit toutes les "composées" d'une fonction de $V$ appartiennent à $V$. En particulier quelle que soit $f \in \mathcal{E}_c$, les composées de $f$ appartiennent à $\mathcal{T}f$; on peut même voir que $\mathcal{T}f$ est l'adhérence de l'ensemble des composées $f * \rho$ de $f$ avec des fonctions continues $\rho$ à noyaux compacts. Car si les $\rho_i$ sont des fonctions continues $\geqq 0$, dont les noyaux sont dans des voisinages "de plus en plus petits" de 0, et que $\int \rho_i(x)dx = +1$, les $f * \rho_i$ convergent vers $f$ uniformément sur tout compact, et les $f * \rho_i(x - h)$ vers $f(x - h)$. En particulier si $G$ est le groupe $R^n$, on peut aussi prendre pour $\rho$ des fonctions indéfiniment dérivables à noyaux compacts, alors $f * \rho$ est indéfiniment dérivable: dans toute variété invariante, les fonctions indéfiniment dérivables sont denses.

Mêmes propriétés dans $\mathcal{E}'_c$. Si $\mu \in V'$, $\mu * \rho \in V'$. Mais si $\rho$ est une fonction continue, $\mu * \rho$ est aussi une fonction continue.

On voit donc que dans toute variété invariante $V'$ les fonctions continues sont denses; si $G = R^n$, dans toute variété invariante $V'$ les fonctions indéfiniment dérivables à noyaux compacts sont denses.

Remarquons que $\mathcal{E}'_c$ est un anneau, car on peut définir le produit $\mu * \nu \in \mathcal{E}'_c$ de $\mu \in \mathcal{E}'_c$ par $\nu \in \mathcal{E}'_c$. Une variété invariante $V'$ n'est pas autre chose, d'aprés ce qui vient d'être dit, que l'idéal fermé le plus général.

On conçoit que la transformation de Fourier joue encore ici un grand rôle et permette de définir des spectres de $V$ et de $V'$. Mais des propriétés tout à fait nouvelles vont intervenir, dont le cas du groupe $G = R$ (groupe additif des nombres reels) va donner une idée. Le cas de $G = R$ est le seul que nous ayons pu traiter complètement. Les résultats ne peuvent pas s'étendre sans modification aux autres groupes, même aux groupes $R^n$, $n > 1$; cependant on voit facilement quelle forme ils prennent dans $R^n$ et dans n'importe quel groupe abélien localement compact; mais je n'ai pas pu les démontrer et le groupe $R$ est le seul pour lequel j'aie pu répondre aux questions posées. Le lecteur pourra constater que les démonstrations utilisent la technique de la théorie des fonctions analytiques. Il en était ainsi initialement des théorèmes de Wiener et Beurling,[31] ce qui empêchait de les étendre à d'autres groupes que $R$; la démonstration de M. Godement écarte la théorie des fonctions analytiques et généralise aux groupes abéliens localement compacts quelconques. Il y aurait lieu ici de faire le même progrès; mais cela semble incomparablement plus difficile, la théorie des fonctions analytiques semble directement liée au problème posé.

Nous supposons donc désormais dans tout de Chapitre III que $G$ est le groupe additif topologique $R$ des nombres réels. Les espaces étudiés seront toujours $\mathcal{E}_c$ ou $\mathcal{E}'_c$ ; pour simplifier nous les appellerons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

## Chapitre Troisieme

### §7. Variétés invariantes de dimension finie dans $\mathcal{E}$.

Il existe manifestement dans $\mathcal{E}$ des fonctions moyenne-périodiques d'ordre 1. Si $f(x)$ est l'une d'elles, on a

$$f(x - h) = \chi(-h)f(x). \tag{15}$$

On voit immédiatement que $\chi(h + h') = \chi(h)\chi(h')$. D'autre part $f(x - h)$ est un élément de $\mathcal{E}$ qui dépend continument de $h$, donc $\chi(h)$ est une fonction continue de $h$. Comme $\chi(0) = 1$, il est bien connu que $\chi(h)$ est une exponentielle $\chi(h) = \exp(rh)$, $r$ nombre complexe quelconque.

L'égalité (15) pour $x = 0$ montre alors que

$$f(-h) = \chi(-h)f(0) \qquad \text{ou}$$

$$f(x) = A \exp(rx). \tag{16}$$

On voit ici l'intervention essentielle des fonctions analytiques. Les exponentielles qu'il faut considèrer ne sont pas seulement les caractères $\exp(2i\pi\lambda x)$ bornés pour $x \in R$, mais des caractéres quelconques, bornés ou non; $r$ parcourt tout le *plan complexe*.

Si $r_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ sont $n$ nombres complexes distincts, la fonction

$$f(x) = \sum A_k \exp(r_k \cdot x)$$

est moyenne-périodique d'ordre $\leqq n$: on peut même voir facilement que si tous les $A_k$ sont $\neq 0$ elle est exactement moyenne-périodique d'ordre $n$, $\mathcal{T}f$ étant

[31] Voir §4.

l'espace de dimension $n$ ayant pour base l'ensemble d'éléments exp $(r_k x)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

Mais il existe d'autres fonctions moyenne-périodiques d'ordre fini que celles-là. Considérons en effet

$$f(x) = x^{p-1} \exp(rx), p \text{ entier}, \geqq 1, r \text{ complexe}. \tag{17}$$

On voit immédiatement que $f(x)$ est moyenne-périodique d'ordre $p$ et que $\mathcal{T}f$ est l'espace de dimension $p$ ayant pour base l'ensemble d'élémente $x^j \exp(rx)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, p - 1)$. En effet, parmi les limites des combinaisons linéaires des translatées de $x^{p-1}$, figurent toutes ses dérivées, donc les monômes $x^j$, $j \leqq p - 1$.

Une fonction telle que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} P_k(x) \exp\cdot(r_k x) \tag{18}$$

oú $\sum$ est une somme d'un nombre fini de termes, les $r_k$ étant des nombres complexes distincts quelconques, les $P_k(x)$ des polynomes de degrés respectifs $p_k - 1$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, est une fonction moyenne-périodique d'ordre $\leqq \sum_{k=1}^{k=n} p_k$; on peut même montrer qu'elle est exactement moyenne-périodique d'ordre $\sum_{k=1}^{k=n} p_k$, $\mathcal{T}f$ étant l'espace ayant pour base l'ensemble des éléments $x^j \exp(r_k x)$ $(k = 1, 2, \cdots n; j \text{ entier} \leqq p_j > 1)$. Pour le voir il suffit de montrer que $\mathcal{T}f$ contient chaque fonction $x^j \exp(r_k x)$ car $\mathcal{T}f$ est évidemment contenu dans l'espace engendré par ces fonctions. On peut le voir par des méthodes très élémentaires de déterminants, nous ne le ferons pas ici, car nous verrons dans la suite des propriétés beaucoup plus générales.[32]

Qu'appellera-t-on le "spectre" d'une fonction telle que $f(x)$, définie par (18)? Si l'on se reporte au cas d'une fonction $\varphi$ de $L^\infty G$, nous avions appelé spectre l'ensemble des $\lambda \in G'$ telles que $(x, \lambda) \in \mathcal{T}\varphi$ (voir §5). Ici le spectre de $f$ serait alors l'ensemble des $\lambda$ tels que $\exp(2i\pi\lambda x) \in \mathcal{T}f$, donc les $\lambda_k = r_k/2i\pi$: *il y a lieu de prendre un spectre complexe*, car les $r_k$ n'étant pas nécessairement des imaginaires purs, les $\lambda_k$ ne sont pas nécessairement réels. Mais ce n'est pas tout. $\mathcal{T}f$ n'est pas caractérisée seulement par les nombres complexes $r_k$, mais par l'ensemble des $r_k$ et des entiers $p_k$.

Nous dirons alors que le spectre de la variété invariante $\mathcal{T}f$ se compose des éléments, en nombre fini, $\lambda_k$, *chacun compté avec l'ordre de multiplicité* $p_k$. Justifions cette notion. La variété $V$ invariante ayant un spectre à éléments "simples" obtenu en remplaçant chaque $r_k$ par $p_k$ nombres complexes distincts $r_k^{(0)}, r_k^{(1)}, r_k^{(2)} \cdots r_k^{(p_k-1)}$ est formée de l'ensemble des fonctions

$$\sum A_{k,j} \exp(r_k^{(j)} x).$$

A la limite, lorsque chaque système des $r_k^{(j)}$ $(j = 0, 1, \cdots p_{k-1})$ tend vers la valeur unique $r_k$, la variété $V$ tend vers la variété $\mathcal{T}f$ (démonstration classique

[32] Voir Théorème 8.

de la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants). $\mathcal{T}f$ est don bien naturellement une variété dont le spectre est à "éléments multiples," $\lambda_k$ multiple d'ordre $p_k$. Le spectre de $\mathcal{T}f$ ne peut pas se définir par la transformée de Fourier de $f$ qui n'existe pas en général.

Soit maintenant $V$ une variété invariante quelconque de $\mathcal{E}$. Nous distinguerons:

a) l'ensemble spectral $[\Lambda]$, ensemble des $\lambda$ (complexes) tels que $\exp(2i\pi\lambda x) \in V$.

b) le spectre $\Lambda$, ensemble de points multiples, $\lambda_k \in [\Lambda]$ étant multiple d'ordre $p_k$ dans $\Lambda$ si les $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$ appartiennent à $V$ pour $j \leqq p_l - 1$ et non pour $j = p_l$. Nous écrirons symboliquement

$$\lambda_k \in_{p_k} \Lambda$$

$\Lambda$ est défini par l'ensemble des couples $\lambda_k$, $p_k$. On dit qu'un spectre $\lambda'$ contient un spectre $\Lambda$ (ou est plus grand qu'un spectre $\Lambda$) et on écrit $\Lambda' \supset \Lambda$ ou $\Lambda' \geqq \Lambda$ si

$$\lambda_k \in_{p_k} \Lambda.$$

entraîne

$$\lambda_k \in_{pk} \Lambda', \; p_k' \geqq p_k .$$

On en déduit immédiatement la notion d'intersection ou borne inférieure, de réunion ou borne supérieure d'une famille de spectres.

Considérons maintenant la variété $V'$ orthogonale à $V$. Chaque $\mu \in V'$ a une transformée de Fourier

$$M(\lambda) = \int \exp(-2i\pi\lambda x)\, d\mu(x). \tag{19}$$

Ici encore il est naturel de considérer les valeurs complexes de $\lambda$, car $M(\lambda)$ est une fonction analytique entière, du fait que $\mu$ est à noyau compact. $\mu$ étant $\in V'$ tous les éléments de $V$ lui sont orthogonaux. Donc

$$\int (2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)\, d\check{\mu}(x) = 0 \tag{20}$$

quels que soient $\lambda_k \in [\Lambda] \cdots$, et $j \leqq p_k - 1$.

En faisant $j = 0$ on trouve

$$M(\lambda_k) = 0.$$

Avec $j$ quelconque, (20) s'écrit

$$M^{(j)}(\lambda_k) = 0 \tag{21}$$

$M^{(j)}(\lambda)$ étant la dérivée d'ordre $j$ de $M(\lambda)$. On voit alors que si $\mu \in V'$ chaque $\lambda_k$ est racine multiple d'ordre $\geqq p_l$ de la transformée de Fourier $M(\lambda)$ de $\mu$. Réciproquement si $\lambda_k$ est racine multiple d'order $\geqq p_k$ de toutes les $M(\lambda)$ transformées de Fourier des $\mu \in V'$ chaque exponentielle monôme $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$, $j \leqq p_k - 1$, est orthogonale à $V'$ donc appartient à $V$.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ peuvent ainsi être comparés respectivement à $L^\infty$ et $L^1$. Pour une variété invariante de $L^\infty$ nous avons appelé spectre l'ensemble des $\lambda$ (réels) tels que $\exp(2i\pi\lambda x)$ appartienne à la variété; c'est aussi l'ensemble des zéros communs aux transformées de Fourier (continues) des fonctions (sommables) de la variété orthogonale dans $L^1$. Ici le spectre de $V \subset \mathcal{E}$ est l'ensemble des $\lambda_k$ (complexes) tels que $\exp(2i\pi\lambda_k x)$ appartiene à $V$, $\lambda_k$ étant compté avec l'ordre de multiplicité $p_k$ si $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$ appartient à $V$ pour $j \leqq p_k - 1$ et non pour $j = p_k$; c'est aussi l'ensemble des zéros communs aux transformées de Fourier (analytiques) des mesures (à noyau compact) $\mu$ de la variété orthogonale dans $\mathcal{E}'$, chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité. Nous démontrerons dans la suite que les seules variétés invariantes $V$ de dimension finie de $\mathcal{E}$ sont celles que nous avons trouvées, à spectres finis.[33]

$[\Lambda]$ ensemble spectral de $V$ sera aussi appelé ensemble co-spectral de $V'$; $\Lambda$ sera le spectre de $V$, le co-spectre de $V'$. Le co-spectre de $\mathcal{F}\mu$, si $\mu \in \mathcal{E}'$ sera aussi appelé, par abus de langage co-spectre de $\mu$ ou co-spectre de $M(\lambda)$.

Si $V = \mathcal{E}$, son spectre est composé de tous les nombres complexes chacun multiple d'ordre infini. On dit que c'est le "spectre plein."

Si $V = (0)$, son spectre est vide.

Dans tout autre cas, soit $\Lambda$ le spectre de $V$. Les $\lambda_k \in [\Lambda]$ sont une partie des racines d'une quelconque $M(\lambda)$ transformée de Fourier de $\mu \in V'$. Comme $M(\lambda)$ est analytique, les $\lambda_k$ forment une suite discrète, chaque ordre de multiplicité $p_k$ est fini; nous dirons que $\Lambda$ est un spectre discret. On démontre dans ce cas (voir §9) que les $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$, $j \leqq p_k - 1$, $\lambda_k \in [\Lambda]$, forment un système libre dans $\mathcal{E}$.

Le théorème fondamental que nous démontrerons dans ce mémoire est le suivant:

THÉORÈME 4. *Le spectre $\Lambda$ caractèrise les variétés invariantes orthogonales $V$ et $V'$.*

Il en résultera un théorème analogue à celui de Wiener-Beurling démontré pour $L^\infty G$ et $L^1 G$: dans toute variété invariante $V \neq (0)$ de $\mathcal{E}$ existe au moins une exponentielle $\exp(rx)$; toutes les mesures $\mu \in \mathcal{E}'$ d'une variété invariante $V' \neq \mathcal{E}'$ ont des transformées de Fourier $M(\lambda)$ qui ont au moins un zéro complexe commun. Mais naturellement le théorème va beaucoup plus loin, puisque, comme nous l'avons vu aux §4 et 5 on ne sait pas, dans $L^\infty$ et $L^1$, si une variété est caractérisée par son spectre.

Soit $V_0$ l'espace vectoriel fermé le plus petit contenant tous les $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$, $\lambda_k \in_{p_k} \Lambda$, $j \leqq p_j - 1$. $V_0$ est une variété invariante $\subset V$ et de même spectre $\hat{\lambda}$. C'est la plus variété invariante ayant pour spectre $\Lambda$. Le théorème 4 est équivalent à celui-ci: *$V$ est identique à $V_0$*.

Comme les $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$ forment une base de $V_0$ le théorème peut être mis sous la forme:[34]

[33] Voir Théorème 5.

[34] Pour $V = \mathcal{E}$ le mot base serait inexact, le système de toutes les exponentielles monômes qui est total, n'est pas libre.

THÉORÈME 5. *Toute variété invariante $V \neq \mathcal{E}$ admet une base formée des exponentielles monômes $x^j \exp(r_k x)$ qu'elle contient.*

Cela nous redonnera une expression générale de toutes les fonctions $g \in V$ par un développement en série formel suivant les exponentielles monômes de $V$.

Si le théorème est vrai pour toute variété invariante $V$, il l'est aussi pour toute variété $\mathcal{T}f$ engendrée par une fonction moyenne-périodique $f$ quelconque. Réciproquement s'il est vrai pour toute variété $\mathcal{T}f$ il l'est pour toute variété invariante $V$; car pour démontrer le théorème pour $V$, il faut montrer que toute $f \in V$ est limite de combinaisons linéaires d'exponentielles-monômes de $V$, ce qui sera vrai si elle est limite de combinaisons linéaires des exponentielles-monomes de $\mathcal{T}f \subset V$.

Nous aurons donc simplement à démontrer ceci dans la suite.

THÉORÈME 6. *Toute fonction moyenne-périodique $f \in \mathcal{E}$ est limite de combinaisons linéaires des exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$.*

## §8. Les fonctions moyenne-périodiques de $\mathcal{E}$. Propriétés générales des spectres.

Pour qu'une fonction $f \in \mathcal{E}$ soit moyene-périodique il faut et il suffit que la variété orthogonale à $\mathcal{T}f$ soit $\neq (0)$, donc qu'il existe au moins une mesure $\mu \in \mathcal{E}'$, c'est-à-dire à noyau compact et $\neq 0$ vérifiant

$$\mu * f = 0. \tag{14}$$

C'est bien la définition donnée par M. Delsarte.[35] En prenant pour $\mu$ un système de 2 masses apposées en 2 points distincts on voit que $f$ est alors périodique: toute fonction périodique est moyenne-périodique, ce qui était prévisible.

Il existe des fonctions $f$ qui ne sont pas moyenne-périodiques, par exemple une fonction $f$ de carré sommable $\neq 0$. Car elle a une transformée de Fourier $F(\lambda)$ de carré sommable sur l'axe réel des $\lambda$. Alors (14) s'écrit

$$M(\lambda)F(\lambda) = 0$$

Ce qui est impossible si $F(\lambda)$ n'est pas presque partout nulle puisque $M(\lambda)$ n'a qu'une suite discrète de zéros.

Pour la même raison une fonction continue $f \in L^p$, $p \leqq 2$ n'est pas moyenne-périodique si elle est $\neq 0$. Nous montrerons (voir §18, 1°) qu'il en est encore ainsi pour $p$ fini quelconque $\geqq 1$. Nous verrons aussi qu'une fonction $f \neq 0$ tendant vers 0 pour $x \to \pm \infty$ n'est pas moyenne-périodique. De même $\exp(x^2)$ n'est pas moyenne-périodique. Car $\mathcal{T}f$ contient toutes ses dérivées, donc les produits de $\exp(x^2)$ par tous les polynomes; or ces fonctions sont denses dans $\mathcal{E}$. Une fonction telle que $\exp(2i\pi a x)$, $a$ réel, est moyenne-périodique et bornée (mais elle n'a pas de limite pour $x \to \pm \infty$).

Une fonction telle que $\exp(ax)$, $a$ réel est moyenne-périodique non bornée, et ce sera le cas général.

---

[35] DELSARTE [1]

On voit par ces exemples, comme on pouvait le prévoir, que le mot de "moyenne-périodique" doit être précisé par l'espace dans lequel on considère la fonction. Une fonction continue sommable $f(x)$ dont la transformée de Fourier (continue) a au moins un zéro (réel) est moyenne-périodique dans $L^1$, d'après Wiener, mais ne l'est pas dans $\mathcal{E}$. Avec les combinaisons linéaires de ses translatées, on ne peut pas approcher dans $L^1$ toute fonction continue sommable mais on peut approcher toute fonction continue uniformément sur tout compact.

Comme nous l'avons vu au §7, la transformée de Fourier $M(\lambda)$ de $\mu \in \mathcal{E}'$ est une fonction analytique entière de la variable complexe $\lambda$. Elle est de plus, de type exponentiel $\leqq 2\pi A$ si $\mu$ est contenue dans l'intervalle $(-A, +A)$, et bornée sur tout l'axe réel des $\lambda$ ou même dans toute "bande horizontale." Rappelons l'inégalité:

$$|M(\sigma + i\tau)| \leqq \left(\int |d\mu|\right) \exp(2\pi A |\tau|). \tag{22}$$

La décroissance de $M(\sigma + i\tau)$ pour $\sigma \to \pm\infty$ dépend de la régularité de $\mu$. On sait en effet que si $\mu$ est une fonction, $M(\sigma + i\tau)$ converge vers 0 pour $\sigma \to \pm\infty$, uniformément dans toute bande horizontale $|\tau| \leqq \tau_0$ ; si c'est une fonction $p$ fois continuement dérivable, $|\sigma|^p M(\sigma + i\tau)$ converge lui aussi vers 0 pour $\sigma \to \pm\infty$, uniformément dans toute bande horizontale; si $\mu$ est une fonction indéfiniment dérivable,[36] à noyau compact, $M(\sigma + i\tau)$ pourra êtra appelée a "décroissance rapide, à l'$\infty$, dans toute bande horizontale" puisque $|\sigma|^p M(\sigma + i\tau)$ convergera vers 0 pour $\sigma \to \pm\infty$, quel que soit $p$.

Le co-spectre d'une $M(\lambda) \neq 0$ n'est pas du tout quelconque. Il est d'abord discret, comme nous l'avons vu. Ensuite il a une "densité" finie.[37] Autrement dit le nombre des éléments du spectre de module $\leqq r$ (chacun compté autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité) est équivalent à $kr$, $k > 0$, pour $r \to \infty$. On sait aussi que les $\lambda_k$ s'accumulent "*surtout*" au voisinage angulaire immédiat de l'axe réel. L'ensemble de ceux qui sont extérieurs à un angle entourant l'axe réel rend finie la somme $\sum p_k/|\lambda_k|$. Mais tout cela ne constitute pas une caractérisation du spectre d'une mesure $\mu \in \mathcal{E}'$ et nous ne connaissons pas de caractérisation simple d'un tel spectre.

Si $V$ est une variété invariante $\neq \mathcal{E}$, son spectre est le co-spectre de $V'$, donc contenu dans le co-spectre d'une mesure $\mu$ de $V'$, $\neq 0$, dont nous venons de voir certaines propriétés. Réciproquement soit $\Lambda_\mu$ le co-spectre de $\mu \neq 0$. Si $\Lambda$ est contenu dans $\Lambda_\mu$, $\Lambda$ est le spectre d'une variété invariante. Car les

---

[36] Attention, nous employons ici le langage de la théorie des distributions! $\mu$, mesure, est une fonction $f$ si, quel que soit $\varphi$ continue à noyau compact, $\int \varphi\, d\mu = \int \varphi f\, dx$. $\mu$ est indéfiniment dérivable si c'est une fonction indéfiniment dérivable à noyau compact: ses dérivées sont nulles aux extrémités du noyau.

[37] SCHWARTZ [2] page 121–122

exponentielles monômes orthogonales à $\mu$ forment un système non total, donc libre[38]; alors la variété invariante ayant pour éléments originels les exponentielles-monômes définies par $\Lambda$ ne peut contenir aucune autre exponentielle-monôme, son spectre est $\Lambda$.

Cela nous permet déjà de voir certaines propriétés importantes. Si $\Lambda$ est un ensemble de points multiples ($\lambda_k$, multiple d'ordre $p_k$), qui n'est contenu dans le co-spectre d'aucune fonction $M(\lambda) \neq 0$, toute variété $V$ fermée qui contient toutes les exponentielles-monômes $(2i\pi x)^{p_k-1}$ exp $(2i\pi\lambda_k x)$ est l'espace entier $\mathcal{E}$. Si $f$ est une fonction continue quelconque, l'ensemble des exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$ est très raréfié (spectre discret, de densité maxima finie, s'accumulant angulairement surtout au voisinage de l'axe réel) ou bien il se compose de toutes les exponentielles-monômes ($\mathcal{T}f = \mathcal{E}$). Cela prouve qu'une série quelconque d'exponentielles n'est pas nécessairement moyenne-périodique. Par exemple si $f$ est la fonction *presque-périodique*

$$f(x) = \sum a_n \exp (2i\pi\lambda_n x) \tag{23}$$

les $\lambda_n$ étant réels, de densité infinie on sait que les combinaisons linéaires de ses translatées peuvent approcher uniformément sur tout l'axe réel (donc sur tout compact) toutes les les exponentielles exp $(2i\pi\lambda_n x)$; mais celles-ci forment un système total dans $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{T}f = \mathcal{E}$ et $f$ n'est pas moyenne-périodique dans $\mathcal{E}$. (Par contre dans l'espace $C$ formé des fonctions continues bornées avec la topologie de la convergence uniforme sur tout l'axe réel, une telle fonctions presque périodique est moyenne-périodique et $\mathcal{T}f$ ne contient dans $C$ d'autres exponentielles que celles du développement (23); ce qui prouve une fois de plus qu'il faut bien spécifier dans quel espace fonctionnel une fonction est moyenne-périodique).

## §9. Indépendance des exponentielles-monômes d'une variété invariante $\neq \mathcal{E}$.

THÉORÈME 7. *L'ensemble des exponentielles-monômes contenues dans une variété invariante* $V \neq \mathcal{E}$ *est libre.*

Remarquons bien que cela ne signifie nullement que tout système *non total* d'exponentielles-monômes soit libre. Ainsi les $x^{2p}$ ($p = 0, 1, 2, \cdots$) forment bien un système non total; le plus petit sous-espace vectoriel fermé $U$ de $\mathcal{E}$ qui les contienne est en effet l'espace vectoriel des fonctions paires, donc $\neq \mathcal{E}$. Or ce système est non-libre: toute fonction $x^{2p}$ ($p \neq 0$) est en effet limite uniforme sur tout compact de combinaisons linéaires des autres.

Mais la variété $U$ des fonctions paires n'est pas une variété invariante; et la variété invariante $V = \mathcal{T}U$ n'est autre que l'espace entier $\mathcal{E}$, ce qui explique que le système des $x^{2p}$ soit non libre.

Nous avons vu §7, que si $(2i\pi x)^{p-1}$ exp $(2i\pi\lambda x) \in V$, variété invariante, il en est de même de $(2i\pi x)^j$ exp $(2i\pi\lambda x)$, $j \leqq p - 1$. Nous avons donc à démontrer ceci: *si* $\lambda$ *est un spectre, d'éléments* $\lambda_k$ *multiples respectivement d'ordres* $p_k$, *le système des* $(2i\pi x)^j$ exp $(2i\pi\lambda_k x)$, $\leqq p - 1$, *est libre.*

---

[38] Voir Théorème 7

Il suffira naturellement de démontrer le théorème en supposant que $\Lambda$ est le co-spectre $\Lambda_M$ d'une mesure $\mu \neq 0$. Soit $V$ la variété de $\mathcal{E}$ orthogonale à $\mu$. Nous montrerons que, quels que soit $\lambda_l \in [\Lambda_M]$, $j \leqq p_k - 1$, il existe une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}$, définie par une mesure $\mu_{l,j} \in \mathcal{E}'$, qui est orthogonale à toutes les exponentielles-monômes de $V$, sauf $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$. Cela prouvera bien qu'aucune exponentielle monôme de $V$ n'est adhérente au sous-espace vectoriel engendré par les autres.

La démonstration est une généralisation immédiate de celle que j'ai donnée dans un précédent mémoire,[39] relative au cas où tous les $\lambda_k$ sont réels et simples ($p_k = 1$).

Nous devrons choisir $\mu_{k,j} \in \mathcal{E}'$ de façon à vérifier

$$(24) \qquad \mu_{k,j}[(2i\pi x)^l \exp(2i\pi\lambda_\nu x)] = \delta_{k,j}^{\nu,l}, \text{ pour } \lambda_\nu \in [\Lambda_\mu], \ l \leqq p_\nu - 1$$

le symbole $\delta_{k,j}^{\nu,l}$ représentant 0, sauf pour $\nu = k$, $l = j$ auquel cas il représente 1.

Soit $M_{k,j}(\lambda)$ la transformée de Fourier de $\mu_{k,j}$ et $M_{k,j}^{(l)}(\lambda)$ sa dérivée d'ordre $l$. D'après les formules (20) et (21), (24) est équivalent à

$$(25) \qquad M_{k,j}^{(l)}(\lambda_\nu) = \delta_{k,j}^{\nu,l}.$$

Donc $M_{k,j}(\lambda)$ admet chaque $\lambda_\nu \neq \lambda_k$ comme zéro multiple d'ordre $p_\nu$, comme $M(\lambda)$ elle-même.

Par contre pour $\lambda = \lambda_k$, ses dérivées d'ordre $0, 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots p_k - 1$ sont nulles comme celles de $M(\lambda)$, tandis que sa dérivés d'ordre $j$ vaut $+1$

Au voisinage de $\lambda = \lambda_k$, on peut écrire

$$(26) \qquad M_{k,j}(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_k)^j}{j!} + O(\lambda - \lambda_k)^{p_k}$$

le symbole 0 ayant la signification classique: $O(a)$ est une quantité dont le quotient par $a$ reste borné en module.

La fonction $M_{k,j}(\lambda)/M(\lambda)$ est holomorphe pour toute valeur de $\lambda$, sauf $\lambda = \lambda_k$ ; au voisinage de $\lambda = \lambda_k$, on peut écrire

$$(27) \qquad \frac{M_{k,j}(\lambda)}{M(\lambda)} = \frac{1}{M(\lambda)} \frac{(\lambda - \lambda_k)^j}{j!} + O(1).$$

Il y a lieu d'introduire ici une notation qui sera très employée dans la suite. Si $E(\lambda)$ est une fonction méromorphe, ayant $\alpha$ pour pôle, nous appellerons $\{E(\lambda)\}_\alpha$ la "partie singulière" de $E(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = \alpha$, c'est-à-dire la fraction rationnelle (polynôme en $1/(\lambda - \alpha)$) ayant pour unique pôle $\alpha$, nulle à l'$\infty$, et telle que $E(\lambda) - \{E(\lambda)\}_\alpha$ soit holomorphe pour $\lambda = \alpha$. La formule (27) revient à dire que la partie singulière de $M_{k,j}(\lambda)/M(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = \lambda_k$ est la même que celle de $(\lambda - \lambda_k)^j/(j!M(\lambda))$.

La difference

$$\frac{M_{k,j}(\lambda)}{M(\lambda)} - \left\{\frac{1}{M(\lambda)} \frac{(\lambda - \lambda_k)^j}{j!}\right\}_{\lambda_k}$$

[39] SCHWARTZ [2] page 133, Théorème 6.

est une fonction entière; reciproquement, s'il en est ainsi, on a bien (25). Et dire que la fonction précédente est entière, c'est dire que la fonction

$$M_{k,j}(\lambda) - M(\lambda)\left\{\frac{1}{M(\lambda)}\frac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!}\right\}_{\lambda_k} \tag{28}$$

est une fonction entière multiple de $M(\lambda)$.

Nous avons ainsi ramené le problème de la recherche de $\mu_{k,j}$ à un problème plus simple: trouver $\mu_{k,j}$ telle que si $M_{k,j}(\lambda)$ est sa transformée de Fourier, la fonction (28) soit une fonction entière multiple de $M(\lambda)$. *Or on peut la prendre nulle*: cela revient à prendre

$$M_{k,j}(\lambda) = M(\lambda)\left\{\frac{1}{M(\lambda)}\frac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!}\right\}_{\lambda_k} \tag{29}$$

ce qui sera possible si la fonction $M_{k,j}(\lambda)$ ainsi définie est bien la transformée de Fourier de $\mu_{k,j} \in \mathcal{E}'$. Or c'est evident. Dans (29), la partie singulière admet pour unique pôle $\lambda_k$, multiple d'ordre $p_k - j \leqq p_k$; le produit par $M(\lambda)$ est une fonction entière. Comme, pour $\lambda$ infiniment grand, une partie singulière est infiniment petite au moins de l'ordre 1, $M_{k,j}(\lambda)$ est de type exponentiel comme $M(\lambda)$ et majorée par elle. D'autre part, pour $|\lambda| \to \infty$,

$$|M_{k,j}(\lambda)| = |M(\lambda)| \times O(1/|\lambda|),$$

et comme $M(\lambda)$ est bornée pour $\lambda$ réel, $M_{k,j}(\lambda)$ est de carré sommable sur l'axe réel. Donc d'après le théorème bien connu de Paley-Wiener,[40] $M_{k,j}(\lambda)$ est transformée de Fourier, non seulement d'une mesure, mais même d'une fonction de carré sommable $\mu_{k,j}$ à noyau compact, c.q.f.d. Le noyau de $\mu_{k,j}$ est, comme on le voit aisément, contenu dans le plus petit intervalle $(a, b)$ contenant le noyau de $\mu$.

Dans le cas particulier où $p_k = 1$, on aurait, avec $j = 0$

$$\left\{\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k} = \frac{1}{M'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}$$

et

$$M_{k,0}(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{M'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}$$

C'est bien la formule utilisée[41] déjà dans ce cas.

## §10. Le développement formel.

Si $f$ est alors une fonction quelconque moyenne-périodique de $\mathcal{E}$, les exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$ définies par le spectre $\Lambda_f$ de $f$ forment un système libre; elles engendrent une variété invariante $V_0 \subset \mathcal{T}f$. Les exponentielles-monômes

[40] Voir preliminaires 3, et PALEY-WIENER [1] page 12.
[41] SCHWARTZ [2], page 133, formule (2f).

forment une *base* de $V_0$. D'après ce que nous avons vu d'une façon générale pour les systèmes libres,[42] toute fonction $g \in V_0$ admet un *développement formel*

$$(30) \qquad \begin{cases} g \sim S_{\nu,l}\, d_{\nu,l}(2i\pi x)^l \exp\,(2i\pi\lambda_\nu x) \\ \lambda_\nu \epsilon_{p_\nu} \Lambda_f, \qquad l \leqq p_\nu - 1 \end{cases}$$

Nous rappelons encore une fois que nous avons mis le symbole $\sim$ et non $=$, $S$ et non $\sum$ parce qu'il ne s'agit que d'une somme *formelle*. Cela signifie seulement que c'est une somme véritable lorsqu'elle ne contient qu'un nombre fini de termes, et que chaque $d_{k,j}$ est une forme linéaire continue de $g$; cette forme linéaire continue vaut 1 si $g$ est $(2i\pi x)^j \exp\,(2i\pi\lambda_k x)$ et vaut 0 si $g$ est l'une quelconque des autres exponentielles-monômes de $V_0$. Rappelons qu'il est *trés possible*, *a priori*, que tous les $d_{\nu,l}$ soient nuls même si $g \neq 0$. Soit $\mu$ l'une quelconque des mesures $\in V'$, variété orthogonale à $\mathcal{T}f$. La mesure $\mu_{k,j}$ définie plus haut associée à $\mu$ et à l'exponentielle-monome $(2i\pi x)^j \exp\,(2i\pi\lambda_k x)$ possède alors, en tant que forme linéaire sur $V_0$ les même propriétés que la forme linéaire $d_{k,j}$. Il existe une infinité de telles formes linéaires sur $\mathcal{E}$, mais toutes coïncident sur $V_0$, on peut écrire, quelle que soit la mesure $\mu \in V'$ dont on est parti

$$\mu_{k,j} \cdot (g) = \int g(x)\; d\check{\mu}_{k,j}(x) = d_{k,j}\,.$$

Nous ne savons pas si un développement analogue à (30) existe aussi pour $f$ elle-même, car nous ignorons si $f \in V_0$ ; $f \in V_0$ signifie que $\mathcal{T}f = V_0$ et c'est en cela que consiste justement le théorème fondamental 6 qui est l'objet essentiel du présent mémoire. Le système des $\mu_{\nu,l} \in \mathcal{E}'$ est un systéme biorthogonal normal associé au système des exponentielles-monômes de $V_0$.

Naturellement la quantité

$$\mu_{k,j}(g) = \int g(x)\; d\check{\mu}_{k,j}(x)$$

a toujours un sens quelle que soit $g \in \mathcal{E}$, en particulier si $g = f$; mais en général si $g \notin V_0$, le nombre trouvé dépend non seulement de $g$ mais de la mesure $\mu \in V'$ qui a servi de point de départ; il n'a aucune signification intrinséque relative à $g$.

C'est néanmoins à partir de ce calcul formel que toute la théorie pourra être faite:

$f$ étant une fonction moyenne-périodique de $\mathcal{E}$,
$\mu$ une mesure $\in \mathcal{E}'$ orthogonale à $\mathcal{T}f$
(donc telle que $\mu * f) = 0$,
$\Lambda_M$ étant le co-spectre de $\mu$,
$\lambda_k \epsilon_{p_k} \Lambda_M$, $\quad j \leqq p_l - 1$, $\quad \mu_{k,j}$ défini par (29)
on posera $c_{l,j} = \int f(x) d\check{\mu}_{k,j}(x)$
et on étudiera le développement formel

$$(31) \qquad f \sim S_{\nu,l}\, c_{\nu,l}\, (2i\pi x)^l \exp\, 2i\pi\lambda_\nu x).$$

[42] Préliminaires, 2°; et SCHWARTZ [1] page 11.

Ce développement va dépendre, a priori, non seulement de $f$, mais de $\mu$.[43] Les exponentielles-monômes qui y interviennent sont non seulement celles de $\mathcal{T}f$, mais toutes celles qui sont orthogonales à $\mu$. Il se peut, a priori, que tous les coefficients soient nuls, ce qui s'écrira $f \sim 0$, sans que cela entraîne $f = 0$; les coefficients pourraient même très bien, a priori, être tous nuls pour une fonction $f$ donnée et une certaine mesure $\mu$ orthogonale à $\mathcal{T}f$, sans l'être pour la même fonction $f$ et une autre mesure $\nu \neq \mu$. Une fois pour toutes dans le développement nous n'inscrirons que les coefficients $\neq 0$.

### §11. Développement formel par les produits de composition.

Nous montrerons d'abord que le développement formel trouvé pour $f$ est *unique*, c'est-à-dire indépendant de la mesure $\mu$ choisie, orthogonale à $\mathcal{T}f$. Pour cela nous serons amenés à donner aux coefficients $c_{\nu,l}$ une autre forme plus maniable.

Reprenons la formule, analogue à (19)

$$\int \exp(-2i\pi\lambda t)\, d\mu_{k,l}(t) = M_{k,l}(\lambda).$$

Effectuons un produit de composition:

$$\mu_{k,0} * \exp(2i\pi\lambda x) = \int \exp[2i\pi\lambda(x-t)]\, d\mu_{k,0}(t)$$

$$= \exp(2i\pi\lambda x) \int \exp(-2i\pi\lambda t)\, d\mu_{k,0}(t)$$

et finalement

$$\mu_{k,0} * (\exp 2i\pi\lambda x) = (\exp 2i\pi\lambda x) M_{k,0}(\lambda). \tag{32}$$

Dérivons $l$ fois par rapport à $\lambda$:

$$\left\{\begin{aligned} \mu_{k,0} * \frac{d^l}{d\lambda^l} \exp(2i\pi\lambda x) &= \mu_{k,0} * (2i\pi x)^l \exp(2i\pi\lambda x) \\ &= \frac{d^l}{d\lambda^l}[\exp(2i\pi\lambda x) M_{k,0}(\lambda)]. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Cela nous montre certaines propriétés:

1°– Soit $\lambda_\nu \in [\Lambda_M]$, $\lambda_\nu \neq \lambda_l$ ; $M_{l,0}(\lambda)$ s'annule pour $\lambda = \lambda_\nu$ ainsi que ses dérivées jusqu'a l'ordre $p_\nu - 1$.

Alors, pour $\lambda_\nu \in \lambda_M$, $\lambda_\nu \neq \lambda_l$, $l \leqq p_\nu - 1$

$$\mu_{l,0} * (2i\pi x)^l \exp(2i\pi\lambda_\nu x) = 0.$$

2° Pour $\lambda = \lambda_l$ ; $M_{l,0} = M(\lambda) \left\{\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_l}$ prend la valeur 1, toutes ses dérivées

---

[43] Ce n'est même pas tout A partir d'une même mesure $\mu$, on peut trouver une infinité de mesures ayant les mêmes propriétés que $\mu_{k,l}$ ; nous avons seulement pris la plus simple (formule (29)) en annulant (28) Les autres auraient donné pour $g \in V_0$ le même développement formel, mais peut être pas, a priori, pour $f$.

d'ordres 1, 2, $\cdots$, $p_k - 1$ étant nulles. Alors, pour $l \leqq p_k - 1$,

$$\frac{d^l}{d\lambda^l}\,[\exp\,(2i\pi\lambda x) M_{k,0}(\lambda)]$$

prend pour $\lambda = \lambda_k$, la valeur

$$(2i\pi x)^l \exp\,(2i\pi\lambda_k x).$$

D'oú

$$\mu_{k,0} * (2i\pi x)^l \exp\,(2i\pi\lambda_k x) = (2i\pi x)^l \exp\,(2i\pi\lambda_k x).$$

On peut, si l'on veut, résumer les 2 formules ci-dessus en une seule

$$(34)\quad \begin{cases} \mu_{k,0} * (2i\pi x)^l \exp\,(2i\pi\lambda_\nu x) = \delta_k^\nu (2i\pi x)^l \exp\,(2i\pi\lambda_\nu x) \\ \lambda_\nu \epsilon_{p_\nu} \Lambda_M\,, \qquad l \leqq p_\nu - 1; \qquad \delta_k^\nu = \begin{cases} 0 \text{ si } \nu \neq k \\ 1 \text{ si } \nu = k \end{cases} \end{cases}$$

Soit alors $g$ une somme finie d'exponentielles-monômes orthogonales à $\mu$:

$$\begin{cases} g = \sum P_\nu(x) \exp\,(2i\pi_\nu x), \qquad \lambda_\nu \in [\Lambda_M] \\ P_\nu(x) = \sum_{l=0}^{l=p_\nu-1} d_{\nu,l}\,(2i\pi x)^l. \end{cases}$$

La formule (34) donc immédiatement

$$(35)\qquad \mu_{k,0} * g = P_k(x) \exp\,(2i\pi\lambda_k x).$$

Cette formule est fondamentale dans toute la suite. Elle montre qu'on peut obtenir d'un seul coup l'ensemble des termes du développement de $g$ contenant en facteur l'exponentielle $\exp\,(2i\pi\lambda_k x)$ par le produit de composition $\mu_{k,0} * g$. On reçonnait là le procédé classique dans la théorie des développements de Fourier ou des développements suivant les coefficients des représentations unitaires sur un groupe compact (théorie de Peter-Weyl[44]): les termes du développement ont des coefficients définis par des produits scalaires, et s'expriment eux-mêmes par des produits de composition avec les caractères. Cette formule montre de plus que l'on connaît le développement de $g$ dès que l'on connaît $g$ sur un intervalle dont la longueur égale la dimension du noyau de $\mu$.

La formule (35) reste évidemment valable pour toute fonction $g \in V_0$ ; car les 2 membres dépendent continuement de $g$ variant dans $V_0 \subset \mathcal{E}$ (les coefficients $c_{k,l}$ étant comme nous l'avons vu des formes linéaires continues de $g \in V_0$) et comme ils sont égaux sur un ensemble dense dans $V_0$, ils sont égaux sur $V_0$. Les $c_{\nu,l}$ sont alors les coefficients du développement *formel* (30) de $g$.

Et maintenant, est-ce encore vrai pour $f$? Ce n'est nullement certain, puisque nous ne savons pas si $f \in V_0$.

*Nous allons démontrer que néanmoins cette formule* (35) *reste vraie, si l'on remplace $g$ par $f$.*

---

[44] Weil [1] Chapitre V.

Montrons d'abord que

$$\mu_{k,0} * f \tag{36}$$

est bien une fonction de la forme

$$\mu_{k,0} * f = P_k(x) \exp(2i\pi\lambda_k x) \tag{37}$$

$P_k(x)$ étant un polynôme de degré $\leqq p_k - 1$.

Rappelons que $M_{k,0}(\lambda) = M(\lambda) \left\{\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}$ ; alors $(\lambda - \lambda_k)^{p_k} M_{k,0}(\lambda)$ est le produit de $M(\lambda)$ par un polynôme $Q(\lambda)$:

$$M_{k,0}(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^{p_k} = Q(\lambda)M(\lambda). \tag{38}$$

Utilisons une propriété classique de la transformation de Fourier. Si $U(\lambda)$ est la transformée de Fourier de $u$, $\lambda U(\lambda)$ est la transformée de Fourier de $u'/2i\pi$, $u'$ étant la dérivée de $u$. Cette propriété est vraie même si $u$ n'a pas de dérivée au sens usuel, à condition d'employer la langage des "distributions".[45]

Alors $M_{k,0}(\lambda)(\lambda - \lambda)^{p_k}$ est la transformée de Fourier de $\left(\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\right)\right)^{p_k} \mu_{k,0}$, la double parenthèse indiquant qu'il s'agit d'une puissance symbolique de dérivation; on peut aussi écrire cette expression comme un produit de composition avec une distribution à noyau ponctuel réduit à l'origine:

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k \epsilon\right)^{*p_k} * \mu_{k,0}$$

$\epsilon$ étant la masse $+1$ à l'origine (distribution de Dirac), $* p_k$ en exposant indiquant une puissance de composition.

De même $Q(\lambda)$, polynôme, est le transformé de Fourier d'une distribution $q$ ayant son noyau à l'origine (la composition avec $q$ étant encore une opération de dérivation); on a alors, d'après (38)

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k \epsilon\right)^{*p_k} * \mu_{k,0} = q * \mu.$$

Composons avec $f$:

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k \epsilon\right)^{*p_k} * (\mu_{k,0} * f) = q * (\mu * f) = 0$$

en vertu de (14) de sorte que la fonction

$$z = \mu_{k,0} * f \tag{36}$$

est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\right)^{p_k} z = 0.$$

[45] Préliminaires, 5°.

On voit bien alors, d'après la théorie élémentaire des équations différentielles linéaires à coefficients constants, que $z$ est le produit de $\exp(2i\pi\lambda_k x)$ par un polynôme $p_k(x)$ de degré $\leqq p_k - 1$.[46]

Montrons maintenant que

$$P_k(x) = \sum_{k=0}^{l=p_k-1} c_{k,l}(2i\pi x)^l.$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^j \left(\frac{d^jP_k(x)}{dx^j}\right)_{x=0} = c_{k,j} = \int f(x)\, d\check{\mu}_{k,j}(x) = (f * \mu_{k,j})_{x=0}.$$

Plus généralement nous montrerons

$$\text{(39)} \qquad \frac{1}{j!}\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^j \left(\frac{d^jP_k(x)}{dx^j}\right) \exp(2i\pi\lambda_k x) = f * \mu_{k,j}.$$

Partons de (37) et composons les 2 membres avec $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\epsilon\right)^{*j}$. Remarquons que d'une façon générale

$$\text{(40)} \qquad \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\epsilon\right) * P(x)\exp(2i\pi\lambda_k x) = \frac{1}{2i\pi}\frac{dP}{dx}\exp(2i\pi\lambda_k x)$$

quelle que soit la fonction ou même la distribution $P(x)$. On obtient donc

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\epsilon\right)^{*j} * \mu_{k,0} * f = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^j \left(\frac{d^jP_k(x)}{dx^j}\right)\exp(2i\pi\lambda_k x).$$

Il reste donc à montrer que

$$\text{(41)} \qquad \frac{1}{j!}\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\epsilon\right)^{*j} * \mu_{k,0} * f = \mu_{k,j} * f.$$

Utilisons la transformation de Fourier

$$\text{(29)} \qquad M_{k,j}(\lambda) = M(\lambda)\left\{\frac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!}\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}.$$

Mais

$$\left\{\frac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!}\frac{1}{M(\lambda)}\right\}$$

diffère d'un polynome en $\lambda$,

$$R(\lambda), \quad \text{de} \quad \frac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!}\left\{\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}.$$

[46] Cette propriéte, vraie lorsqu'on cherche une fonction-solution, est encore vraie lorsqu'on cherche une distribution-solution. Il n'y a pas d'autres solutions que les solutions usuelles, exponentielles-polynômes.

Alors

$$M_{k,j}(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_k)^j}{j!} M(\lambda) \left\{\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k} + R(\lambda)M(\lambda)$$
$$= \frac{(\lambda - \lambda_k)^j}{j!} M_{k,0}(\lambda) + R(\lambda)M(\lambda).$$

$R(\lambda)$ est la transformée de Fourier d'une distribution ponctuelle $r$ concentrée à l'origine.

$$\mu_{k,j} = \frac{1}{j!}\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k \epsilon\right)^{*j} * \mu_{k,0} + r * \mu.$$

La différence entre les 2 membres de (41) est donc bien nulle puisqu'elle vaut $r * (\mu * f)$, c.q.f.d.

## §12. Unicité du développement formel.

La formule (37) généralisation de (35) va nous permettre maintenant de montrer que le développement formel de $f$ est lié intrinsèquement à $f$, indépendant de la mesure $\mu$ orthogonale à $\mathcal{T}f$ qui a servi de point de départ.

Précisons. Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures orthogonales à $\mathcal{T}f$. Les co-spectres $\Lambda_M$ et $\Lambda_N$ sont peut être, à priori, sans élément commun (si le spectre $\Lambda_f$ de $f$ est vide, par exemple). Alors qu'entendons-nous quand nous disons que le développement formel de $f$ est le même à partir de $\mu$ et $\nu$?

Soit $\lambda_k$ un élément multiple d'ordre $p_k$ dans $\Lambda_M$, $q_k$ dans $\Lambda_N$, donc d'ordre $\leqq r_k$ dans $\Lambda_f$ (si $r_k$ est la borne inférieure de $p_k$, $q_k$); nous allons montrer que le coefficient de $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$, $j \leqq r_k - 1$, est le même que l'on parte de $\mu$ ou de $\nu$; pour $r_k - 1 < j \leqq p_k - 1$, le coefficient déterminé à partir de $\mu$ est nul; pour $r_k - 1 < j \leqq q_k - 1$, le coefficient déterminé à partir de $\nu$ est nul. La chose restera vraie si l'un des 2 entiers $p_k$, $q_k$ est nul; par exemple si $\lambda_k \in [\Lambda_M]$ et $\notin [\Lambda_N]$, tous les coefficients correspondants, déterminés à partir de $\mu$, sont nuls. Pour résumer: si dans le développement formel on n'écrit que les coefficients $\neq 0$, on trouve les mêmes dans les 2 cas.

Pour $\lambda_k$ élément d'ordre $p_k$ de $\Lambda_M$, $q_k$ de $\Lambda_N$ (l'un des deux nombres $p_k$, $q_k$ pouvant être nul), on trouve dans les développements formels des ensembles de termes qu'on peut écrire

$$P_{k,(\mu)}(x) \exp(2i\pi\lambda_k x),$$
$$P_{k,(\nu)}(x) \exp(2i\pi\lambda_k x)$$

et dont nous voulons démontrer l'identité

$$P_{k,(\mu)}(x) \exp(2i\pi\lambda_k x) = \mu_{k,0} * f$$
$$P_{k,(\nu)}(x) \exp(2i\pi\lambda_k x) = \nu_{k,0} * f.$$

Nous allons montrer que

(42) $$\mu_{k,0} * f = \nu_{k,0} * f = \mu_{k,0} * \nu_{k,0} * f$$

en montrant que la première de ces quantitès est égale à la troisième.[47] Nous supposerons que $p_k \neq 0$ et même que $\mu_{k,0} * f \neq 0$ sans quoi c'est évident.

On peut appliquer les résultats indiqués formule (39)

$$(39) \qquad \mu_{k,j} * f = \frac{1}{j!} \frac{1}{(2i\pi)^j} \frac{d^j P_{k,(\mu)}(x)}{dx^j} \exp (2i\pi\lambda_k x).$$

Ainsi parmi les composés de $f$, donc dans l'espace vectoriel $\mathcal{T}f$, se trouvent les produits de exp $(2i\pi\lambda_k x)$ par $P_{l,(\mu)}(x)$ et par toutes ses dérivées. Si $d$ est le degré de $P_{k,(\mu)}(x)$, on peut obtenir, avec les combinaisons linéaires de $P_{k,(\mu)}(x)$ et de ses dérivées, tous les monômes $1, x, \cdots x^d$; donc

$$(43) \qquad (2i\pi x)^l \exp (2i\pi\lambda_k x) \in \mathcal{T}f \text{ pour } l \leqq d.$$

Donc les exponentielles monômes définies par (43), appartenant à $Tf$, sont orthogonales à $\nu$, ce qui prouve que $\lambda_l$ est au moins multiple d'ordre $d$ dans le co-spectre $\Lambda_N$.

Alors $\mu_{k,0} * f = P_{k,(\mu)}(x) \exp (2i\pi\lambda_l x)$ est une exponentielle polynôme formée d'exponentielles monômes orthogonales à $\nu$; on peut lui appliquer la formule (35) avec la mesure $\nu$ ce qui donne

$$\mu_{k,0} * f = P_{k,(\mu)}(x) \exp (2i\pi\lambda_k x) = \nu_{k,0} * P_{k,(\mu)}(x) \exp (2i\pi\lambda_k x) = \nu_{k,0} * \mu_{k,0} * f$$

c.q.f.d.

## §13. Les exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$.

Les résultats trouvés au §12 sont essentiels. Pour étudier le développement formel de $f$, nous pouvons utiliser n'importe quelle mesure $\mu$ orthogonale à $\mathcal{T}f$. En particulier celles des exponentielles-monômes qui interviennent dans le développement formel avec des coefficients $\neq 0$ sont liées intrinsèquement à $f$, indépendamment de $\mu$: ce ne sont autres que celles qui appartiennent à $\mathcal{T}f$. Plus précisément:

Théorème 8. *Pour que $x^j \exp (2i\pi\lambda_k x) \in \mathcal{T}f$, il faut et il suffit qu'il y ait, dans le développement formel de $f$, au moins une exponentielle monôme*

$$x^{p_k - 1} \exp (2i\pi\lambda_k x), \qquad p_k - 1 \geqq j,$$

*ayant un coefficient $\neq 0$.*

En réalité, $x^j \exp (2i\pi\lambda_k x)$ peut donc appartenir à $\mathcal{T}f$ même si elle a un coefficient nul dans le développement formel de $f$: l'important est qu'il y ait, avec un coefficient $\neq 0$, une exponentielle monême de degré au moins égal, $x^{p_k - 1}$ exp $(2i\pi\lambda_k x)$. La démonstration est maintenant immédiate: Supposons que dans le développment formel de $f$, $p_l - 1$ soit le degré le plus éléve d'une exponentielle-monôme formée sur exp $(2i\pi\lambda_l x)$. Nous poserons comme précédement, $\mu \neq 0$ étant orthogonale à $\mathcal{T}f$ et $\lambda_k \epsilon_{q_l} \Lambda_M$, $q_l \geqq p_l$

$$\mu_{k,0} * f = P_l(x) \exp (2i\pi\lambda_k x),$$

[47] Calcul valable même si $p_k = 0$. Car alors $\mu_{k,0} = 0$.

degré de $P_k = p_k - 1$ (Pour $p_k = 0$, $p_k(x) \equiv 0$).

$1^0$—Pour $g \in \mathcal{T}f$, (donc orthogonale à $\mu$), posons

$$\mu_{k,0} * g = Q_k(x) \exp(2i\pi\lambda_k x).$$

Le polynôme $Q_k(x)$ dépend linéairement et *continuement* de $g$. Or pour $g = f$, il est de degré $\leqq p_k - 1$; il en est de même pour $g = f(x - h)$, pour toute combinaison linéaire finie de translatées de $f$, et même pour toute composée $f * \rho$. Car

$$\mu_{k,0} * (f * \rho) = \rho * (\mu_{k,0} * f) = \rho * P_k(x) \exp(2i\pi\lambda_k x)$$

qui est bien le produit de $\exp(2i\pi\lambda_k x)$ par un polynôme de degré $\leqq p_k - 1$. Les fonctions $f * \rho$ étant denses dans $\mathcal{T}f$, le degré de $Q_k$ est $\leqq p_k - 1$ pour toute $g \in \mathcal{T}f$. Alors $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x) \in \mathcal{T}f$ entraîne bien $j \leqq p_k - 1$. Si $p_k = 0$, $\exp(2i\pi\lambda_k x) \notin \mathcal{T}f$ (même si $q_k > 0$).

$2^0$—Réciproquement si $j \leqq p_k - 1$, $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$ appartient à $\mathcal{T}f$.[48]

La démonstration a été faite (avec $p_k - 1 = d$) (formule (43)).

REMARQUE. Le développement formel de $f$ étant lié intrinsèquement à $f$, on peut non seulement déterminer directement, comme nous venons de le voir, les exponentielles-monômes de ce développement, mais même leurs coefficients. Nous ne ferons le calcul que dans le cas où $\lambda_k$ est élément simple du spectre de $f$. Pour $g \in \mathcal{T}f$, le coefficient de $\exp(2i\pi\lambda_k x)$ est une forme linéaire continue de $g$. Si pour $f$, ce coefficient est $c_k$, pour $f(x - h)$ il est $c_k \exp(-2i\pi\lambda_k h)$ et pour la combinaison linéaire $\sum a_\nu f(x - h_\nu)$ il est $c_k \sum a_\nu \exp(-2i\pi\lambda_k h_\nu)$. Si donc on connaît des combinaisons linéaires de translatées de $f$ qui convergent vers $\exp(2i\pi\lambda_k x)$, on doit avoir

$$\lim c_k \sum a_\nu \exp(-2\pi\lambda_k h_\nu) = 1$$

ou

$$c_k = \lim \frac{1}{\sum a_\nu \exp(-2\pi\lambda_k h_\nu)}. \tag{44}$$

On peut donc construire le développement formel de la façon suivante: *les exponentielles monômes de ce développement sont celles qui sont limites de combinaisons linéaires des translatées de f; le coefficient de chaque exponentielle-monôme se calcule si l'on connaît des combinaisons linéaires de translatées de f qui convergent vers cette exponentielle-monôme.*

### §14. Coefficients d'une composée de $f$.

Toute composée $f * \rho$ de $f$ appartient à $\mathcal{T}f$, elle est donc moyenne-périodique et admet un développement formel. Soit $\mu \neq 0$ orthogonale à $\mathcal{T}f$.

$$P_l(x) \exp(2i\pi\lambda_l x) = \mu_{l,0} * f$$

$$Q_l(x) \exp(2i\pi\lambda_l x) = \mu_{l,0} * (f * \rho).$$

[48] Voir note [32].

D'oú comme nous l'avons vu plus aut

$$Q_k(x) \exp (2i\pi\lambda_k x) = \rho * P_k(x) \exp (2i\pi\lambda_k x).$$

Reprenons les formules (33)

$$\rho * (2i\pi x)^l \exp (2i\pi\lambda_k x) = \left[\frac{d^l}{d\lambda^l} (R(\lambda) \exp (2i\pi\lambda x))\right]_{\lambda=\lambda_k}$$

$R(\lambda)$ étant la transformée de Fourier de $\rho$.

Si donc nous posons $P_k(x) = \sum c_{k,l}(2i\pi x)^l$, on aura

$$Q_k(x) \exp (2i\pi\lambda_k x) = \left[\sum c_{k,l} \frac{d^l}{d\lambda^l} (R(\lambda) \exp (2i\pi\lambda x))\right]_{\lambda=\lambda_k} \tag{45}$$

Prenons un cas particulier: $p_k = 1, l = 0$.

$$f \sim c_k \exp (2i\pi\lambda_k x) + \cdots.$$

Alors

$$f * \rho \sim c_k R(\lambda_k) \exp (2i\pi\lambda_k x) + \cdots.$$

La formule (45) montre que si le co-spectre $\Lambda_R$ de $\rho$ *contient* le spectre $\Lambda_f$ de $f$, $f * \rho$ a tous les coefficients de son développement formel nuls. Mais rien ne nous dit encore qu'elle soit nulle.

On peut chercher le développement formel de $f * \epsilon_h = f(x - h)$ ($\epsilon_h$ désignant toujours la masse $+1$ au point $h$); il suffit de remplacer $x$ par $x - h$ dans le développement formel. De même la formule

$$\frac{d}{dx} * (\mu_{k,0} * f) = \mu_{k,0} * \left(\frac{d}{dx} * f\right)$$

prouve que les développements formels peuvent se dériver terme à terme. Ils peuvent aussi s'intégrer indéfiniment terme à terme, à condition d'introduire d'abord une constante, puis un polynôme arbitraire; toutes les primitives d'une fonction moyenne-périodique sont moyenne-périodiques.

On peut généraliser. Toute solution d'une équation intégrale avec 2è membre

$$\mu * f = A$$

oú le 2è membre est moyenne-périodique, est elle-même moyene-périodique. En effet il existe $\nu \in \mathcal{E}'$ telle que $\nu * A = 0$ donc $(\nu * \mu) * f = 0$. Le développement de $f$ s'obtient à partir de coefficients indéterminés qu'on porte dans l'équation intégrale, en utilisant (45) (sous-réserve, naturellement, de l'existence de la solution $f$).

## §15. Démonstration du théorème fondamental.

Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental 6. Montrons d'abord qu'il est conséquence du théorème suivant:

THÉORÈME 9. *Toute fonction moyenne-périodique dont le développement formel* *a tous ses coefficients nuls, est elle-même nulle. Par conséquent 2 fonctions qui ont le même développement formel coïncident, le développement formel est caractéristique de f.*

Supposons en effet démontré ce théorème. Alors soit $f$ moyenne-périodique, $V_0$ l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$. Pour prouver que $f \in V_0$, il faut montrer que toute mesure $\rho \in \mathcal{E}'$ orthogonale à $V_0$ est orthogonale à $f$. Dire que $\rho$ est orthogonale à $V_0$, c'est dire que le co-spectre $\Lambda_R$ de $\rho$ contient le spectre $\Lambda_f$ de $f$; alors d'après ce qui st dit ci-dessus (formule (45)), $\rho * f$ a tous ses coefficients formels nuls; si le Théorème 9 est supposé démontré, $\rho * f = 0$ et par suite $\int f d\check{\rho} = 0$, c.q.f.d.

Démontrons maintenant le Théorème 9. Soit $\mu \neq 0$ une mesure orthogonale à $f$ fonction moyenne-périodique quelconque; nous pouvons supposer que $\mu$ est une fonction indéfiniment dérivable à noyau compact, car si elle ne l'est pas on peut la remplacer par une régularisée $\mu * \rho$.

La démonstration du Théorème 9 pourrait résulter des démonstrations que j'ai données dans mon mémoire sur les exponentielles imaginaires.[49] Mais ces démonstrations sont très compliquées, sans espoir de généralisation possible au groupe $R^n$. Nous en reparlerons plus loin. Nous allons donner ici une démonstration qui, quoique peut-être non susceptible de généralisation, est tout de même beaucoup plus élémentaire. Reprenons la formule (45) et cherchons le développement formel de

$$(-2i\pi x\mu) * f. \tag{46}$$

La transformée de Fourier de $-2i\pi x\mu$ est $M'(\lambda)$, dérivée de $M(\lambda)$. On a alors,

$$\left[\frac{d^l}{d\lambda^l}\left(M'(\lambda)\exp(2i\pi\lambda x)\right)\right]_{\lambda=\lambda_k} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad l < p_k - 1 \\ M^{(p_k)}(\lambda_l)\exp(2i\pi\lambda_k x) \\ \text{si} \quad l = p_l - 1 \end{cases}$$

On a alors, *formellement*

$$(-2i\pi x\mu) * f \sim S_\nu c_{\nu,\,p_\nu - 1} M^{(p_\nu)}(\lambda_\nu)\exp(2i\pi\lambda_\nu x) \tag{47}$$

En observant cette formule, on aperçoit son énorme intérêt:

1°—Le 2ᵉ membre ne contient plus d'exponentielles-monômes; mais seulement des exponentielles pures.

2°—La série formelle du 2ᵉ membre a beaucoup plus de chances d'être convergente que la série formelle de $f$ elle-même. Voyons le en nous bornant au cas où tous les $\lambda_\nu$ sont des éléments simples du spectre. Alors $c_{\nu,0} = c_\nu = \mu_{\nu,0} * f = \mu_\nu * f$. Mais $\mu_\nu$ a pour transformée de Fourier

$$M_\nu = \frac{M(\lambda)}{(\lambda - \lambda_\nu)M'(\lambda_\nu)} \quad \text{(voir §9)}.$$

[49] Schwartz [2].

On voit donc que les $c_\nu$ ont d'autant plus de chance d'être grands que les $M'(\lambda_\nu)$ sont petits. Et effectivement s'il y a des groupes de $\lambda_\nu$ très resserrés, $M'(\lambda_\nu)$ devient très petit, et $c_\nu$ très grand: la série formelle de $f$ ne peut alors converger que par *groupements de termes*. Mais les coefficients formels de (47) sont les $c_\nu M'(\lambda_\nu)$: ils ont toutes les chances de ne plus introduire aucune difficulté. On peut démontrer effectivement ceci:

THÉORÈME 10. *Si $f$ est plusieurs fois différentiable et $\mu$ quelconque,*[50] *la série formelle de* (47) *est effectivement convergente, uniformément sur tout compact, vers* $(-2i\pi x\mu) * f$.

Si $f$ est une fonction continue quelconque, la convergence uniforme sur tout compact est aussi assurée en supposant $\mu$ assez régulière: il nous suffira de nous borner à ce cas, en supposant que $\mu$, comme il est dit plus haut, est une fonction indéfiniment dérivable. La démonstration du Théorème 10 est la clef de celle du Théorème 9. Supposons-le en effet démontré.

L'équivalence (47) est alors une égalite vraie, $\sim$ peut se remplacer par $=$, $S$ par $\Sigma$.

Cela nous prouvera que, si $f$ a tous ses coefficients formels nuls, elle vérifiera non seulement $\mu * f = 0$, mais encore

$$x\mu * f = 0. \tag{48}$$

Mais rien n'empêche de continuer, $f$ est une fonction moyenne-périodique solution de (48) et à coefficients formels tous nuls; elle vérifiera donc aussi

$$x^2\mu * f = 0$$

et plus généralement

$$P(x)\mu * f = 0, \tag{49}$$

$P(x)$ polynôme quelconque. Soit $\alpha$ un poit tel que $\mu(\alpha) \neq 0$. On peut prendre une suite de polynômes $P_\iota(x)$, $\geqq 0$ sur le noyau $[a, b]$ de $\mu$, convergeant uniformément vers 0 sur $[a, b]$ en dehors de tout voisinage du point $\alpha$, et vérifiant $\int_a^b P_\iota(x)dx = 1/\mu(\alpha)$.

Les fonctions $P_\iota(x)\mu$ convergent alors, das l'espace des distributions, vers $\epsilon_\alpha$ distribution formée d'une masse $+ 1$ au point $\alpha$.

De (49) on tire alors

$$\epsilon_\alpha * f = 0, \qquad \text{ou } f(x - \alpha) \equiv 0,$$

équivalent à $f = 0$, c.q.f.d.

Finalement toute la démonstration repose sur celle de la vraie convergence dans (47.)

[50] Je n'ai pas cherché les meilleures conditions possibles, inutiles ici. Il suffit que $f$ soit 3 fois différentiable.

Ecrivons autrement le terme général de la série. Appliquons la formule (39) pour $j = p_k - 1$:

$$\mu_{k,p_k-1} * f = \frac{1}{(p_k - 1)!} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{p_k - 1} P_k^{(p_k-1)}(x) \exp(2i\pi\lambda_k x) = c_{k,p_k-1} \exp(2i\pi\lambda_k x).$$

L'égalité (47) peut donc s'écrire

$$\sum M^{(p_\nu)}(\lambda_\nu)(\mu_{\nu,p_\nu-1} * f) = -2i\pi x\mu * f. \tag{50}$$

Pour la démontrer il surffiait de montrer que l'on a

$$-2i\pi x\mu = \sum M^{(p_\nu)}(\lambda_\nu)\mu_{\nu,p_\nu-1} ;$$

puisque toutes les fonctions qui interviennent dans cette égalité ont le même noyau compact, la convergence uniforme du 2[e] membre donne le droit de composer avec $f$ terme à terme, ce qui démontrerait le théorème.

Mais cette égalité est fausse. Mais si l'on peut trouver une suite de distributions $\rho_1, \cdots, \rho_k, \cdots$ et une distribution $\rho$ à noyaux ponctuels concentrés à l'origine tels que

$$-2i\pi x\mu + \rho * \mu = \sum_\nu [M^{(p_\nu)}(\lambda_\nu)\mu_{\nu,p_\nu-1} + \rho_\nu * \mu] \tag{51}$$

la série du 2[e] membre étant uniformément convergente, le Théorème sera démontré; car lorsqu'on compose avec $f$ pour obtenir (50), $\rho * \mu * f$ et $\rho_\nu * \mu * f$, qui sont nuls, disparaissent.

Prenons les transformés de Fourier des 2 membres. En appelant $R(\lambda)$, $\cdots$, $R_\nu(\lambda)$, $\cdots$ les *polynômes* transformés de $\rho \cdots \rho_\nu, \cdots$ on obtient l'égalité à démontrer

$$M'(\lambda) + R(\lambda)M(\lambda) = \sum_\nu [M^{(p_\nu)}(\lambda_\nu)M_{\nu,p_\nu-1}(\lambda) + R_\nu(\lambda)M(\lambda)]. \tag{52}$$

Pour assurer la convergence uniforme du 2[e] membre de (51) il suffira de la convergence du 2[e] membre de (52) sur $L^1$ de l'axe réel des $\lambda$. D'après (29), en faisant $j = p_k - 1$, on a

$$M_{k,p_k-1}(\lambda) = M(\lambda) \left\{\frac{(\lambda - \lambda_k)^{p_k - 1}}{(p_k - 1)!} \frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}$$
$$= \frac{M(\lambda)}{M^{(p_k)}(\lambda_k)} \frac{p_k}{\lambda - \lambda_k}$$

et (52) s'écrit

$$M'(\lambda) + R(\lambda)M(\lambda) = \sum_\nu \left[M(\lambda) \frac{p_\nu}{\lambda - \lambda_\nu} + R_\nu(\lambda)M(\lambda)\right]. \tag{53}$$

Nous tomb ons, à peu de chose frès, sur une formule classique de la théorie des fonctions méromorphes. $M(\lambda)$, fonction entière d'ordre 1 s'exprime par un produit canonique de Weierstrass-Hadamard:

$$M(\lambda) = \lambda^\alpha \exp(A\lambda + B) \prod_{\substack{\lambda_\nu \in \{\lambda_M\} \\ \lambda_\nu \neq 0}} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)\right]^{p_\nu}.$$

En prenant la dérivée logarithmique

$$\frac{M'(\lambda)}{M(\lambda)} = \frac{\alpha}{\lambda} + A + \sum_{\lambda_\nu \neq 0} p_\nu \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_\nu}\right)$$

la somme du 2ᵉ membre étant convergente uniformément sur tout compact du plan complexe, ne contenant aucun des $\lambda_\nu$. Naturellement $\alpha$ n'est $\neq 0$ que si $0 \in [\lambda_M]$, $\alpha$ est l'ordre de 0 dans le co-spectre $\Lambda_M$.

$$M'(\lambda) = \alpha \frac{M(\lambda)}{\lambda} + AM(\lambda) + \sum_{\lambda_\nu \neq 0} p_\nu \left(\frac{M(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} + \frac{M(\lambda)}{\lambda_\nu}\right). \tag{54}$$

La série du 2ᵉ membre est cette fois convergente uniformément sur tout compact du plan complexe, sans exception; ceci grâce à la convergence de $\sum p_\nu/|\lambda_\nu|^2$.

L'égalité connue (54) n'est autre que l'égalité à démontrer (53) si l'on prend $R(\lambda) = -A$, $R_\nu(\lambda) = p_\nu/\lambda_\nu$.

Néanmoins (53) n'est pas démontrée, car la série du 2ᵉ membre de (54) doit converger, non seulement uniformément sur tout compact complexe des $\lambda$, mais dans $L^1$ de l'axe réel des $\lambda$.

Remplaçons (54) par

$$\begin{aligned} M'(\lambda) - AM(\lambda) + \lambda M(\lambda) \sum_{\lambda_\nu \neq 0} (p_\nu/\lambda_\nu^2) \\ = \alpha \frac{M(\lambda)}{\lambda} + \sum_{\lambda_\nu \neq 0} \left(\frac{p_\nu M(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} + M(\lambda) \frac{p_\nu}{\nu_\nu} + \lambda M(\lambda) \frac{p_\nu}{\lambda_\nu^2}\right) \end{aligned} \tag{55}$$

(55) est évidemment une conséquence de (54); encore une fois elle est équivalente à l'égalité à démontrer (53) en prenant

$$R(\lambda) = -A + \lambda \sum p_\nu/\lambda_\nu^2 \quad \text{et} \quad R_\nu(\lambda) = \frac{p_\nu}{\lambda_\nu} + \lambda \frac{p_\nu}{\lambda_\nu^2}.$$

Mais nous allons pouvoir démontrer que la série du 2ᵉ membre de (55) converge dans $L^1$ de l'axe réel des $\lambda$. Son terme général est

$$p_\nu M(\lambda) \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_\nu} + \frac{\lambda}{\lambda_\nu^2}\right) = M(\lambda) \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2} \frac{p_\nu}{\lambda - \lambda_\nu}. \tag{56}$$

Sur un compact en $\lambda$, la série converge comme $\sum 1/|\lambda_\nu|^3$. Majorons le terme général (56)

a) ou bien $|\lambda - \lambda_\nu| \geqq 1$, alors il est majoré par $|M(\lambda)|\,|p_\nu|\,|\lambda/\lambda_\nu|^2$. Pour $\lambda$ fixe réel, la somme des modules de tous les termes pour lesquels $|\lambda - \lambda_\nu| \geqq 1$ est majorée par

$$|M(\lambda)|\,|\lambda|^2 \sum p_\nu/|\lambda_\nu|^2 = A\,|\lambda|^2\,|M(\lambda)|$$

b) ou bien $|\lambda - \lambda_\nu| < 1$. Si nous appelons $D(\lambda)$ le maximum de $|M'(\lambda)|$ dans le cercle de centre $\lambda$ et de rayon 1, on a

$$\left|\frac{M(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu}\right| \leqq D(\lambda),$$

le terme général (56) est alors majoré par

$$p_\nu \left| \frac{\lambda}{\lambda_\nu} \right|^2 D(\lambda).$$

Si nous laissons de côte les $\lambda_\nu$ en nombre fini pour lesquels $|\lambda_\nu| \leqq 2$, on aura pour tous les autres $|\lambda/\lambda_\nu| \leqq 2$ si $|\lambda - \lambda_\nu| < 1$, ce qui majore le terme général par $2p_\nu D(\lambda)$.

Pour $\lambda$ fixe réel, la somme des modules de tous les termes pour lesquels $|\lambda - \lambda_\nu| < 1$ est majorée par $(\sum p_\nu)D(\lambda)$.

La somme $\sum p_\nu$ étendue à tous ces termes est au plus égale à $N(|\lambda| + 1)$, $N(r)$ étant le nombre des zéros de $M(\lambda)$ de modules $\leqq r$, comptés chacun autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité.

D'où la majoration finale de la somme des modules de ces termes:

$$N(|\lambda| + 1)D(\lambda).$$

Pour montrer que la série du 2$^e$ membre de (55), qui converge uniformément sur tout compact, converge dans $L^1$, il suffit de montrer que la somme de la série des modules est sommable sur tout l'axe réel.

Montrons donc que la fonction $\geqq 0$ de $\lambda$

$$A|\lambda|^2 |M(\lambda)| + N(|\lambda| + 1)D(\lambda)$$

est sommable.

D'après l'hypothèse faite sur $\mu$ (fonction indéfiniment dérivable), $M(\lambda)$ et $M'(\lambda)$ convergent vers 0 plus vite que toute puissance de $1/|\lambda|$ lorsque $\lambda$ s'éloigne indéfiniment dans une bande horizontale du plan complexe (voir §8). Donc, pour $\lambda$ réel $\to \pm\infty$,

$$|M(\lambda)| = O(1/|\lambda|^4)$$
$$D(\lambda) = O(1/|\lambda|^3).$$

Et comme les $\lambda_\nu$ ont une densité finie,

$$N(|\lambda| + 1) = O(|\lambda|)$$

de sorte que

$$A|\lambda|^2 |M(\lambda)| + N(|\lambda| + 1)D(\lambda) = O(1/|\lambda|^2),$$

Ce qui prouve que cette fonction est sommable, c.q.f.d.

Ainsi nous avons démontré le théorème fondamental annoncé §7 (Théorème 6), avec toutes les conséquences qui en résultent.

## §16. Convergence du développement formel.

Le développement formel de chaque fonction moyenne-périodique $f$ a été construit à partir d'une mesure $\mu \neq 0$ orthogonale à $\mathcal{T}_f$, d'une façon très particulière (en annulant la fonction (28)). Nous avons ensuite montré que le développement trouvé était indépendant de $\mu$, pourvu qu'à partir de chaque mesure $\mu$ on le détermine toujours de la même manière, en annulant (28). Mais maintenant que nous avons démontré que $f \in V_0$ (§15), nous savons que le développement est absolument unique, et lié intrinsèquement à $f$; toutes les méthodes pour l'obtenir donneront toujours le même. *C'est le développement associé à un élément d'un espace vectoriel à l'aide de ses coordonnées suivant une base.*[51]

Mais nous ne savons toujours rien de la *convergence* du développement formel. Cela n'a, il est vrai, qu'une importance secondaire pour la plupart des questions théoriques qu'on est amené à traiter sur $f$; nous savons que $f$ est limite de combinaisons linéaires finies $\sum_{\nu, l} (c_{\nu, l})_\alpha (2i\pi x)^l \exp(2i\pi\lambda_\nu x)$ dépendant d'un indice $\alpha$ et que, de plus, $\lim_\alpha (c_{\nu,l})_\alpha = c_{\nu,l}$ pour toutes valeurs de $\nu$, $l$; c'est cela qui est l'*essentiel*. Mais la nature de la convergence du développement formel présente tout de même un certain intérêt. J'ai étudié dans un précédent mémoire[52] les systèmes d'exponentielles $\exp(2i\pi\lambda_\nu x)$ *non totaux* sur un intervalle fini $(a, b)$ de longueur 2L. J'ai montré que pour toute fonction $f(x)$, continue sur cet intervalle $(a, b)$, et limite uniforme de combinaisons linéaires de ces exponentielles, le développement formel de $f$ suivant le système libre des exponentielles était uniformément convergent sur tout compact de $]a, b[$ par la méthode des *groupements de termes* et des *facteurs exponentiels d'Abel*:[53]

$$(57) \qquad \begin{cases} f(x) \sim \underset{\nu}{S}\, c_\nu \exp(2i\pi\lambda_\nu x) \\ f(x) = \lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} \sum\limits_n \Big( \sum\limits_{\lambda_\nu \in G_n} c_\nu \exp(2i\pi\lambda_\nu x) \exp(-2\pi \mid \lambda_\nu \mid y) \Big). \end{cases}$$

On multiplie donc chaque terme $c_\nu \exp(2i\pi\lambda_\nu x)$ par le "facteur de convergence d'Abel" $\exp(-2\pi \mid \lambda_\nu \mid y)$; on réunit les éléments $\lambda_\nu$ "très serrés" en un même groupement $G_n$ ; la somme des groupements $G_n$ est *absolument* convergente pour $y > 0$ vers une fonction harmonique $f(x, y)$ dont la limite (uniforme pour $a + \eta \leqq x \leqq b - \eta$, $\eta > 0$ quelconque) quand $y \to 0$ est $f(x)$.

Ces formules n'ont été démontrées que pour un système non total d'exponentielles $\exp(2i\pi\lambda_\nu x)$, correspondant à des $\lambda_\nu$ réels. Voyons si cette condition était essentielle. La non-totalité du système d'exponentielles résulte de l'existence d'une mesure $\mu \neq 0$, dont le noyau est de longueur $\leqq 2L$, et qui est orthogonale à toutes les exponentielles:

$$\int \exp(2i\pi\lambda_\nu x)\, d\check{\mu}(x) = 0$$

ce qui revient à dire que la transformée de Fourier $M(\lambda)$ de $\mu$ s'annule pour tous les $\lambda_\nu$ : Ce sont les propriétés de $M(\lambda)$ qui ont servi dans la démonstration.

[51] Préliminaires, 2°.
[52] SCHWARTZ [2].
[53] SCHWARTZ [2] pages 146 et 155. Les rôles de $x$ et $y$ sont ici intervertis et les $\lambda_\nu$ changés de signe.

Or elles peuvent être utilisées aussi bien si les $\lambda_\nu$ sont des nombres complexes quelconques; le lecteur pourra de lui-même vérifier qu'il n'y a qu'à changer quelques points:

$1^0$—Nous avons dû supposer que $M(\lambda)$ était réelle pour $\lambda$ réel, autrement dit vérifiait $\bar{M}(\bar{\lambda}) = M(\lambda)$.[54] Cela revient à supposer que $\mu$ a la symétrie hermitienne, $\check{\bar{\mu}} = \mu$ en appelant $\check{\bar{\mu}}$ la mesure $\bar{\mu}$. Il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi en général. J'ignore si cette condition est indispensable. Mais cela n'a ici aucune importance, car la longuer $2L$ n'aura, pour notre théorie actuelle, aucune importance. Or si les $\lambda_\nu$ sont racines de $M(\lambda)$, les $\lambda_\nu$ et $\bar{\lambda}_\nu$ sont racines de $M(\lambda)\bar{M}(\bar{\lambda})$, transformée de Fourier de la mesure hermitienne $\mu * \check{\bar{\mu}}$. Et si une fonction moyenne-périodique $f$ vérifie $\mu * f = 0$, elle vérifie aussi $(\mu * \check{\bar{\mu}}) * f = 0$. Nous supposerons donc désormais que $\mu$ est hermitienne, de noyau contenu dans l'intervalle $(-L, +L)$. Naturellement les résultats sont valables, par translation sur tout intervalle de longueur $2L$.

$2^0$—Le facteur exponentiel $\exp(-2\pi \mid \lambda_\nu \mid y)$, $y > 0$, est égal à $\exp(\mp 2\pi\lambda_\nu y)$, le signe $-$ étant pris pour $\lambda_\nu > 0$, et le signe $+$ pour $\lambda_\nu < 0$. Cela revient à dire que l'on remplace $\exp(2i\pi\lambda_\nu x)$ par $\exp(2i\pi\lambda_\nu(x \pm iy))$.

C'est sous cette forme que le facteur exponentiel va subsister pour des $\lambda_\nu$ complexes: non pas comme $\exp(-2\pi \mid \lambda_\nu \mid y)$, mais comme $\exp(\mp 2\pi\lambda_\nu y)$, le signe $-$ ou $+$ dépendant des valeurs de $\lambda_\nu$.

De la sorte la somme des termes correspndant au signe $-$ est une fonction analytique de $x + iy$ pour $y > 0$; la somme des termes correspondant au signe $+$ est une fonction analytique de $x - iy$ pour $y > 0$, et la somme de toute la série une fonction harmonique de $x$ et $y$.

Quand prendra-t-on le signe $-$, quand le signe $+$? Posons $\lambda_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ L'idée naturelle sera de prendre $-$ si $\sigma_\nu > 0$, $+$ si $\sigma_\nu < 0$, (et de ne pas mettre. de facteur de sommation si $\sigma_\nu = 0$). Mais supposons qu'il existe des groupes de $\lambda_\nu$ "très serrés," en nombre infini, qui soient "coupés en deux" par l'axe des $\tau$: dans chacun de ces groupes, il y aura des $\lambda_\nu$ à partie réelle $\sigma_\nu > 0$, et d'autres à partie réelle $\sigma_\nu < 0$. Alors le choix des signes indiqués plus haut aboutirait à séparer les $\lambda_\nu$ d'un groupe et empêcherait la convergence.

Nous serons amenés à partager les $\lambda_\nu$ en 2 secteurs. Le premier sera un secteur angulaire $S_1$ entourant l'axe $0 - \sigma$ réel $\geqq 0$ défini par exemple, pour si $\lambda = \rho \exp(i\theta)$ par $-\alpha \leqq \theta \leqq \beta$

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ 0 < \beta < \pi \end{cases}.$$

Le deuxième sera un secteur angulaire $S_2$ entourant l'axe $0\ \sigma'$ réel $\leqq 0$, défini par

$$\beta \leqq \theta \leqq 2\pi - \alpha.$$

Lorsque $\lambda_\nu$ est dans le secteur $S_1$, on prendra le facteur exponentiel $\exp(-2\pi\lambda_\nu y)$, dans le secteur $S_2$, $\exp(+2\pi\lambda_\nu y)$. $S_1$ et $S_2$ seront 2 secteurs complémentaires

[54] SCHWARTZ [2], page 130 en haut et page 141 en bas.

quelconques astreints seulement à une condition: les demi-droites limites de ces secteurs $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, ne coupent en 2 qu'un nombre fini de groupements $G_n$, et même plus précisément, on a la relation:

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\log |M(\rho \exp(i\theta))|}{\rho} = 2\pi L |\sin \theta|, \qquad \text{pour} \begin{cases} \theta = \alpha \\ \theta = \beta \end{cases}. \tag{58}$$

Cette relation n'est autre que la formule $(1, y)$ page 123 du mémoire cité. Elle est vérifiée pour presque toutes les valeurs de $\theta$; on peut donc pour $\alpha$ et $\beta$, choisir presque toutes les valeurs possibles. On peut donc dire que le choix indiqué plus haut, signe $+$ pour $\sigma_\nu < 0$, $-$ pour $\sigma_\nu > 0$, est presque toujours possible. Remarquons d'ailleurs que les facteurs de sommation d'Abel ne sont nécessaires que pour les $\lambda_\nu$ angulairement voisins de l'axe réel des $\lambda$ qui sont, il est vrai, la majorité. Si $S$ est un secteur angulaire ne contenant ni l'axe des $\sigma$ ni l'axe des $\sigma'$, tel que

$$\gamma \leqq \theta \leqq \delta, \qquad 0 < \gamma < \delta < \pi,$$

à condition que (58) soit vérifiée pour $\theta = \gamma$ et $\theta = \delta$, les termes pour lesquels $\lambda_\nu \in S$ forment une série absolument et uniformément convergente par groupements de termes, mais sans facteurs exponentiels d'Abel, et la somme est une fonction analytique. Si par exemple, tous les $\lambda_\nu$ sont de la forme $i\tau_\nu$, $\tau_\nu > 0$, la série formelle de $f$ est convergente par groupements de termes et représente une fonction analytique de $x$ pour $x$ complexe de partie réelle $> -L$. C'est le résultat essentiel de ma thése.[55] D'ailleurs il est bien évident qu'en prenant des $\lambda_\nu$ complexes quelconques, on retrouve comme cas particuliers à la fois le cas des exponentielles réelles ($\lambda_\nu = i\tau_\nu$) et celui des exponentielles purement imaginaires ($\lambda_\nu = \sigma_\nu$).

Une fois ces modifications faites, la convergence par groupements de termes et facteurs exponentiels d'Abel a lieu même si les $\lambda_\nu$ sont complexes. Mais nous pouvons encore généraliser en étudiant les $\lambda_\nu$ "multiples"; à un $\lambda_\nu$ multiple d'ordre $p_\nu$ correspondront les exponeentielles-monômes $(2i\pi x)^l \exp(2i\pi\lambda_\nu x)$, $l \leqq p_\nu - 1$, et $\lambda_\nu$ sera racine multiple d'ordre $p_\nu$ de $M(\lambda)$.

Il s'agira alors d'un système d'exponentielles-monômes non total dans un intervalle de longueur $2L$. Les groupements de termes seront évidents, toutes les exponentielles-monômes correspondant à un même $\lambda_\nu$ seront évidemment dans un même groupement; c'est un groupement de $\lambda_\nu$ "confondus," cas particulier d'un groupement de $\lambda_\nu$ très serrés. Que signifiera le procédé de sommation d'Abel? Il signifiera qu'on remplace $x$ par $x \pm iy$, $y > 0$, le signe $+$ ou $-$ ayant été fixé comme plus haut. Ainsi le terme $c_{k,j}(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$ sera remplacé par:

$$c_{k,j}(2i\pi)^j (x \pm iy)^j \exp(2i\pi\lambda_k(x \pm iy)). \tag{59}$$

[55] SCHWARTZ [1]. Il en résultera que toute fonction $f(x)$ dont le spectre est entièrement contenu dans des angles ne contenant pas les demi-axes réels, est analytique entière.

C'est donc une modification de chaque terme et non une multiplication par un facteur de convergence.

Remarquons que si l'on développe (59) (en y considérant y comme une constante) on trouve le produit de exp $(2i\pi\lambda_k x)$ par un polynôme de degré $j$ en $x$, faisant intervenir *tous les monômes* $x^l$, $l \leqq j$; cela nous prouve encore une fois que $f$ est limite de combinaisons d'exponentielles-monômes qui sont, non seulement celles de son développement formel, mais aussi toutes celles qui sont de degré inférieur (Théorème 8).

Nous avons vu que

$$c_{k,j} = \int f(t)\, d\check{\mu}_{k,j}(t).$$

Si on pose $z = x + iy$, on aura

$$c_{k,j}(2i\pi z)^j \exp(2i\pi\lambda_k z) = \int f(t)[(2i\pi z)^j \exp(2i\pi\lambda_k z)\, d\check{\mu}_{k,j}(t)]$$

$$P_k(z) = \sum c_{k,l}(2i\pi z)^l \exp(2i\pi\lambda_k z) = \int f(t)[\sum (2i\pi z)^l \exp(2i\pi\lambda_k z)\, d\check{\mu}_{k,l}(t)]$$

que l'on écrira

$$\int f(t)\, d\check{\mu}_k(t, z),$$

avec

$$\mu_k(t, z) = \sum\nolimits_l (2i\pi z)^l \exp(2i\pi\lambda_k z)\mu_{k,l}(t).$$

La transformée de Fourier de $\mu_k(t, z)$ est alors

$$M_k(\lambda, z) = \sum\nolimits_l (2i\pi z)^l \exp(2i\pi\lambda_k z) M_{k,l}(\lambda).$$

Mais

$$M_{k,j}(\lambda) = M(\lambda)\left\{\frac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!}\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}$$

diffère, comme nous l'avons vu, du produit de $M(\lambda)$ par un polynôme (ce qui n'a aucune importance)[56] de $M(\lambda)\dfrac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!}\left\{\dfrac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}$ de sorte qu'en négligeant une fois pour toutes le produit de $M(\lambda)$ par un polynôme et en représentant par $\approx$ l'égalité au produit près de $M(\lambda)$ par un polynôme, on peut écrire

$$M_k(\lambda,z)M(\lambda) \approx \sum_{l\leq p_k-1} (2i\pi z)^l \frac{(\lambda-\lambda_k)^l}{l!}\exp(2i\pi\lambda_k z)\left\{\frac{1}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}.$$

Mais $\sum (2i\pi z)^l(\lambda-\lambda_k)^l/l!$ est le début du développement de Taylor, au voisinage de $\lambda = \lambda_k$, de exp $(2i\pi(\lambda-\lambda_k)z)$; on a donc

$$M_k(\lambda, z) \approx M(\lambda)\left\{\frac{\exp(2i\pi\lambda z)}{M(\lambda)}\right\}_{\lambda_k}$$

[56] Voir §15.

que l'on peut représenter par une intégrale dans le plan complexe des $\lambda$, entourant uniquement le zéro $\lambda_k$ de $M(\lambda)$ et n'entourant pas $\lambda$:

$$M_l(\lambda, z) \approx \frac{M(\lambda)}{2i\pi} \int_{T_k} \frac{\exp(2i\pi\zeta z)}{M(\zeta)(\lambda - \zeta)} d\zeta. \tag{60}$$

C'est la formule (3. m) de la page 142 de mon mémoire des annales de Toulouse.[57] Vraie lorsque $\lambda_k$ était un zéro simple de $M(\lambda)$, nous voyons qu'elle l'est encore pour un zéro multiple.

Soit $f$ une fonction moyenne-périodique; $\mu \neq 0$ une mesure orthogonale à $\mathcal{T}f$, hermitienne, dont le noyau est de dimension $2L$. Les exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$ forment donc un systéme non total sur l'intervalle $(-L, +L)$; toute fonction continue, définie sur cet intervalle, et qui est limite uniforme de combinaisons des exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$, est développable en série suivant ces exponentielles-monômes, série uniformément convergente dans tout compact intérieur à l'intervalle, par le procédé de sommation d'Abel et des groupements de termes. La série ainsi convergente est une série formelle déterminée par les formules $c_{k,l} = \int f\, d\check{\mu}_{k,l}$. Mais $f$ est, d'après ce que nous avons vu au §15, limite uniforme de combinaisons des exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$ sur tout compact, donc sur l'intervalle $(-L, +L)$; et la série associée à $f$ est toujours la série associée à la fonction moyenne-périodique $f$, quelle que soit la mesure $\mu$ orthogonale à $\mathcal{T}f$.

Par ailleurs en remplaçant $\mu$ par $\mu^{*n} = \mu * \mu * \mu \cdots * \mu$ qui est encore orthogonale à $\mathcal{T}f$, on remplace $L$ par $nL$. On peut donc conclure.

THÉORÈME 11 *Si la fonction $f$ moyenne-périodique dans $\mathcal{E}$ a le développement formel*

$$f \sim S_\nu \left[ \sum_{l \leq p_\nu - 1} c_{\nu,l} (2i\pi x)^l \exp(2i\pi\lambda_\nu x) \right] \tag{31}$$

*elle est représentée par cette série, convergente dans $\mathcal{E}$ par le procédé de sommation d'Abel et des groupements de termes:*

$$f(x) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \Big[ \sum_n \Big[ \sum_{\lambda_\nu \in G_n} \exp(2i\pi\lambda_\nu(x \pm iy)) \times \Big( \sum_{l \leq p_\nu - 1} c_{\nu,l} (2i\pi(x \pm iy))^l \Big) \Big] \Big]. \tag{61}$$

*Là oú il y a le signe $\pm$, il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant la valeur de $\lambda_\nu$ ; les $\lambda_\nu$ sont séparés en 2 catégories par un partage convenable en 2 secteurs du plan des $\lambda$.*

On aurait pu directement démontrer ce Théorème 11 ce qui aurait rendu inutile le §15.

J'ai en effet démontré, dans mon mémoire des annales de Toulouse, le théorème suivant (note[1], page 157 de ce mémoire): si $\mu$ est une mesure de l'intervalle $(-L, +L)$, et si $f$ est une fonction continue *quelconque* sur $(-L, +L)$ (*non nécessarement limite de sommes d'exponentielles*), le développement formel de $f$

[57] SCHWARTZ [2].

suivant les $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$ définies par le co-spectre de $\mu$ et par les formules $c_{k,j} = \int f \, d\check{\mu}_{l,j}$, converge vers $f$ par le procédé de sommation d'Abel et des groupements de termes, uniformément sur tout compact de $[-L, +L]$.

Mais comme $f$ est moyenne-périodique, ces coefficients $c_{l,j}$ sont indépendants de $\mu$ dès que $\mu$ est orthogonale à $\mathcal{T}f$, et ce sont les coefficients de la série formelle de $f$; comme d'ailleurs en remplaçant $\mu$ par $\mu^{*n}$ on remplace $L$ par $nL$, le développement converge bien vers $f$, par le procédé de sommation indiqué, uniformément sur tout compact, donc dans $\mathcal{E}$; cela prouve à la fois les résultats des §15 et 16. Si j'ai tenu à donner quand même le §15 dont on aurait pu par conséquent se passer, c'est qu'il est beaucoup plus élémentaire que ce paragraphe. Il est en particulier généralisable à d'autres questions que celles qui sont traitées ici, oú la convergence par le procédé de sommation d'Abel et des groupements de terme n'a plus lieu. J'y reviendrai dans un travail ultérieur.

## §17. Récapitulation.

Nous avons exposé la plupart des résultats par une méthode analytique: ayant en vue le résultat final, nous l'avons ramené de proche en proche à des propriétés de plus en plus simples. Donnons rapidement un aperçu synthétique des propriétés obtenues.

Nous avons d'abord montré comment $f$ étant une fonction moyenne-périodique, on pourrait obtenir les exponentielles-monomes de $\mathcal{T}f$ et nous avons introduit les notions de spectre et de co-spectre (§§7 et 8); si $\mu \in \mathcal{E}'$ est orthogonale à $\mathcal{T}f$, le co-spectre $\Lambda_M$ de $\mu$ contient le spectre $\Lambda_f$ de $f$. Les exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$ forment un système libre (§9). $f$ étant ensuite une solution de l'équation intégrale de composition $\mu * f = 0$, nous avons construit un développement formel de $f$ suivant les exponentielles-monômes orthogonales à $\mu$(§10). Nous avons montré comment on pouvait calculer les termes de ce développement par des formules de composition (§11) et de là nous avons déduit l'unicité du développement, *lié intrinsèquement à $f$* (§12); les exponentielles-monômes qui interviennent dans ce développement sont celles de $\mathcal{T}f$ (§13). Au §15, nous avons montré que le développement formel de $f$ *caractérise* $f$, autrement dit que si ce développement est nul, $f = 0$. On en déduit alors que $f$ appartient à l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les exponentielles-monômes $\mathcal{T}f$ (Théorème 6). C'est le plus important des théorèmes obtenus; il prouve que chaque variété invariante $V$ de $\mathcal{E}$ est caractérisée par son spectre (theorème 4), chaque variété invariante $V'$ de $\mathcal{E}'$ par son co-spectre: $V$ admet pour base l'ensemble des exponentielles-monômes qu'elle contient (Théorème 5).

Au §16, nous avons montré que le développement formel de $f$ converge dans $\mathcal{E}$ vers $f$, par le procédé de sommation des groupements de termes et des facteurs de convergence d'Abel.

On conçoit toutes les applications qu'on peut tirer de ces résultats. Nous ne chercherons pas ici à en donner le maximum, voulant rester dans le cadre de la théorie étudiée.

On peut répondre complètement à toutes les questions posées §2.

$1^0$—Nous connaissons toutes les variétés invariantes de $\mathcal{E}$. Chacune d'elles est définie par son spectre, par les exponentielles-monômes qu'elle contient.

Une variété invariante minimale est de dimension 1; elle est engendrée par une exponentielle pure, $\exp(rx)$, $r$ complexe.

Il n'y a pas de variété invariante maximale. Car si $V$ est une variété invariante, la variété engendrée par $V$ et une exponentielle qu'elle ne contient pas, est invariante et strictement plus grande que $V$.

$2^0$—La variété invariante de dimension finie la plus générale est engendrée par un nombre fini d'exponentielles-monômes.

$3^0$—Dans toute variété invariante $\neq (0)$ il y a au moins une exponentielle. Toute variété invariante admet pour base l'ensemble des exponentielles-monômes qu'elle contient; elle n'est donc pas somme des variétés invariantes minimales qu'elle contient (sauf si elle ne contient que des exponentielles pures); *mais elle est adhérente à l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des éléments moyenne-périodiques d'ordre fini qu'elle contient.*

Pour complèter la $1^{\text{ère}}$ question ajoutons:

THÉORÈME 12. *Toute variété invariante admet d'une infinité de manières un seul élément originel.*

C'est évident si $V = \mathcal{E}$ car une fonction non moyenne-périodique est un élément originel de $\mathcal{E}$. Si $V \neq \mathcal{E}$, elle a un srectre $\Lambda$. Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_\nu a_{\nu,p_\nu-1}(2i\pi x)^{p_\nu-1} \exp(2i\pi\lambda_\nu x), \qquad \lambda_\nu \epsilon_{p_\nu} \Lambda;$$

tous les coefficients $a_{\nu,p_\nu-1}$ seront pris $\neq 0$, et assez rapidement décroissants pour assurer la convergence de la série dans $\mathcal{E}$. On a $f \in V$; la série du $2^{\text{e}}$ membre coincide avec le développement formel de $f$ puisque $f$ est limite des sommes partielles de la série et comme chaque $a_{\nu,p_\nu-1}$ est $\neq 0$, $\mathcal{T}f$ contient, d'après le Théorème 8, toutes les exponentielles monômes de $V$, donc $\mathcal{T}f = V$.

Une variété invariante étant caractérisée par son spectre, les opérations sur les variétés se traduisent par des opérations sur les spectres:

$1^0$—Le spectre $\Lambda$ de l'intersection $V$ d'une famille de variétés invariantes $V_\iota$ est l'intersection des spectres $\Lambda_\iota$;

$2^0$—Le spectre $\Lambda$ de la somme[58] d'une famille de variétés invariantes $V_\iota$ est la réunion des spectres $\Lambda_\iota$.

Il existe cependant une précaution à prendre. Deux cas sont possibles: ou bien le spectre $\Lambda$ ainsi obtenu représente un système *total* d'exponentielles-monômes dans $\mathcal{E}$, alors le vrai spectre de $V$ est le spectre plein, $V = \mathcal{E}$. Ou bien il représente un systéme non total d'exponentielles-monômes, alors il est effectivement le spectre de $V$. C'est ce cas qui se produit toujours si les $V_\iota$ sont $\neq \mathcal{E}$ et en nombre fini; car alors si $\mu_\iota \neq 0$ est orthogonale à $V_\iota$, le produit de composition des $\mu_\iota$, qui est $\neq 0$, est orthogonal à $V$. En particulier la somme d'un nombre fini de fonctions moyenne-périodiques est toujours moyenne-périodique.

[58] Voir §1, note 9.

La présente théorie donne évidemment la solution la plus générale d'une équation intégrale du type

$$(14) \qquad \mu * f = 0,$$

$\mu \neq 0$ étant une mesure à noyau compact donnée, $f$ une fonction continue qui constitute l'inconnue. La solution est une série formée avec les exponentielles-monômes solutions de l'équation intégrale, série restreinte seulement à être convergente dans $\mathcal{E}$ par le procédé de sommation des facteurs de convergence d'Abel et des groupements de termes.

Réciproquement, si $f$ est une fonction continue donnée, elle n'est en général solution d'aucune équation intégrale de ce type; elle ne l'est que si elle est moyenne-périodique, et alors on peut prendre pour $\mu$ toute mesure dont le co-spectre contient le spectre de $f$.

### §18. Propriétés asymptotiques des fonctions moyenne-périodiques.

Soit $\mu \in \mathcal{E}'$ une *fonction indéfiniment dérivable* orthogonale à $\mathcal{T}f$. Nous utiliserons systématiquement la formule

$$(37) \qquad \mu_{k,0} * f = P_k(x) \exp (2i\pi\lambda_k x).$$

Soit $2L$ la dimension du noyau de $\mu$. La borne inférieure $2L_0$ des nombres $2L$ possibles est ce qu'on pourra appeler la *moyenne-période* de $f$, elle possède certaines propriétés analogues à la période d'une fonction périodique: en particulier, si $f$ est connue (ou nulle) sur un intervalle strictement plus long qu'une moyenne-période, elle est connue (ou nulle) sur tout l'axe réel ((37) donne tous ses coefficients). En particulier une fonction moyenne-périodique nulle sur un demi-axe réel est nulle sur tout l'axe réel.

$(-L, +L)$ est le plus petit intervalle contenant le noyau de $\mu$, donc de $\mu_{k,\nu}$. Une majoration donne

$$(62) \qquad |P_k(x) \exp (2i\pi\lambda_k x)| \leqq \|\mu_{k,0}\|_{L^p} \left(\int_{x-L}^{x+L} |f(t)|^{p'}\, dt\right)^{1/p'}.$$

Si $p_k - 1$ est le degré de $P_k$ et si $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$, on voit que pour $x \to \pm \infty$

$$(63) \qquad |x^{p_k - 1} \exp (-2\pi\tau_k x)| = O\left(\int_{x-L}^{x+L} |f(t)|^{p'}\, dt\right)^{1/p'}.$$

On en déduit un grand nombre de conséquences asymptotiques:

1°—Il est impossible, si $f \neq 0$, que $f$ appartienne à $L^{p'}$, $p'$ fini $\geqq 1$. En effet si $f \in L^{p'}$, le 2$^e$ membre de (63) tend vers 0 pour $x \to \pm \infty$, ce qui oblige le spectre $\Lambda_f$ à être vide, car quel que soit $\tau_k$ le premier membre de (63) ne saurait jamais tendre vers 0 à la fois pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$.

Pour la même raison une fonction moyenne-périodique $f \neq 0$ ne peut pas tendre vers 0 à la fois pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$.

2°—Si $f$ est moyenne-périodique bornée, on a nécessairement $\tau_k = 0$, $p_k = 1$: le spectre est *réel* et *simple*.

Il y a alors certaines analogies entre la notion de fonction *presque-périodique* et *moyenne-périodique*: mais pas plus que des analogies, à savoir l'existence commune d'un développement suivant des exponentielles purement imaginaires. Mais:

a) une fonction presque-périodique n'est pas forcément moyene-périodique (voir exemple de la formule (23)). Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que les exponentielles qui interviennent dans son développement forment un système non total dans $\mathcal{E}$.

b) sans en être sûr, je pense qu'une fonction moyenne-périodique bornée n'est pas forcément presque périodique (rien n'indique, par exemple, que les coefficients du développement soient bornés dans leur ensemble).

$3^0$—Si $f$ est moyenne-périodique "à croissance lente," c'est-à-dire si, pour $x \to \pm\infty$, $|f(x)| = 0(|x^{p-1}|)$, $p$ entier $> 0$ on a $\tau_k = 0$, $p_k \leqq p$: toutes les exponentielles sont purement imaginaires et les degrés des monômes sont bornés.

$4^0$—Plus généralement, une majoration de la croissance de $f$ permet de majorer chacun de ses termes. On a là une espèce de généralisation (déjà signalée dans ma thése[59]) de la formule de Cauchy qui permet de majorer chaque terme d'une série de Taylor par la majoration de la fonction elle-même sur une circonférence de centre origine.

Si par exemple $|f(x)| = O(\exp(2\pi\alpha|x|))$, $\alpha > 0$, on a nécessairement, pour tous les termes, $|\tau_k| < \alpha$ ou alors $\tau_k = \pm\alpha$, $p_k = 0$: il n'y a dans le développement de $f$, que les exponentielle-monômes qui ne croissent pas plus vite qu'elle-même.

On pourrait ensuite envisager des ordres de croissance pour $f(x)$, ce qui limiterait la croissance des coefficients des exponentielles.

$5^0$—Si l'on envisage seulement le comportement de $f \neq 0$ pour $x \to +\infty$, les circonstances sont différentes. $f$ peut par exemple tendre vers 0. On en déduit alors $\tau_k > 0$. Mais cela entraîne alors, pour $x \to -\infty$, que $f$ croisse, "en moyenne," indéfiniment: $\lim_{x\to-\infty}\int_{x-L}^{x+L}|f(t)|\,dt = +\infty$, et même au moins aussi vite qu'une exponentielle $\exp(2\pi\tau_k|x|)$.

Plus $f$ tend rapidement vers 0 pour $x \to +\infty$, plus elle est astreinte à tendre rapidement vers $\infty$ pour $x \to -\infty$. Ainsi $x \to +\infty$ $|f(x)| = O\exp(-2\pi\alpha x))$, $\alpha > 0$ entraîne

$$x \to +\infty \quad \int_{x-L}^{x+L} |f(t)|\,dt = \Omega\,(\exp\,(+2\pi\alpha\,|\,x\,|\,))$$ [60]

(parce que $\tau_k \geqq \alpha$).

$6^0$—On voit alors qu'il est impossible que pour $x \to +\infty$, $f$ tende vers 0 plus vite que toute exponentielle, sans être nulle. Car si on a

$$x \to +\infty,\ |f(x)| = O\,(\exp(-2\pi\alpha x)) \qquad \text{quelque soit } \alpha > 0,$$

[59] SCHWARTZ [1] page 65 formule (14 a), page 66.

[60] $\Omega\,(a)$ est une quantité dont le quotient par $a$ est borné inférieurement en module par un nombre $> 0$ fixe.

on doit avoir $\tau_k \geqq \alpha$ quel que soit $\alpha$, ce qui est impossible: le spectre est vide et $f = 0$.

Ainsi une fonction $\neq 0$ majorée par $\exp(-x)^2$ pour $x \to +\infty$ n'est pas moyenne périodique.

7°—Si $f(x)$ tend vers une limite $a$ pour $x \to +\infty$, $f(x) - a \to 0$, donc tend vers $\infty$ pour $x \to -\infty$, sauf si $f(x) \equiv a$: une fonction moyenne périodique bornée ayant une limite pour $x \to +\infty$ est constante.

8°—Si maintenant pour $x \to \pm\infty$, $f(x)$ est équivalente à $\exp(2i\pi\lambda x)$, la fonction $\exp(-2i\pi\lambda x)f(x)$ est encore moyenne périodique et $\to 1$ pour $x \to \pm\infty$, donc elle est $\equiv 1$ et $f(x) \equiv \exp(2i\pi\lambda x)$. Toutes ces propriétés permettent de former sans difficulté des fonctions non moyenne-périodiques.

Terminons ce paragraphe par une remarque sur la transformation de Fourier. Une fonction $f$ moyenne-périodique n'a pas en général de transformée de Fourier. Cependant la théorie des distributions[61] permet d'attribuer une distribution transformée de Fourier à toute fonction $f$ "à croissance lente" c'est à dire vérifiant pour $x \to \pm\infty$, $|f(x)| = O(|x|^{p-1})$, $p$ entier $\geqq 1$ convenable Quel rapport existe alors entre cette distribution transformée de Fourier $F(\lambda)$ et le spectre $\Lambda_f$ de $f$, si $f$ est moyene-périodique? Si $\lambda$ est réel, l'exponentielle $\exp(2i\pi\lambda x)$ a pour transformée de Fourier $\epsilon_\lambda$, masse $+1$ au point $\lambda$; nous ne pourrons donc comparer $F(\lambda)$ et le spectre $\Lambda_f$ que si tous les $\lambda_\nu \in [\Lambda_f]$ sont réels. Mais justement nous avons vu plus haut que si $f(x)$ est à croissante lente, $[\Lambda_f]$ était entiérement réel. On peut alors démontrer aisément que *l'ensemble spectral* $[\Lambda_f]$ *n'est autre que le noyau de la distribution* $F(\lambda)$, résultat analogue à celui que nous avons indiqué dans $L^\infty$ (voir §5 et note 29). Par ailleurs l'exponentielle monôme $(2i\pi x)^j \exp(2i\pi\lambda_k x)$ a pour transformée de Fourier la couche multiple ponctuelle $(-1)^j(d^j/d\lambda^j) * \epsilon_{\lambda_k}$, de sorte que si $f$ a le développement

$$f(x) = \sum P_\nu(x) \exp(2i\pi\lambda_\nu x),$$
$$P_\nu(x) = \sum_{l \leq p_\nu - 1} c_{\nu,l}(2i\pi x)^l,$$

On soupçonne que $f$ aura pour transformée de Fourier une distribution discrète $F(\lambda)$, comprenant au point $\lambda_\nu$ la couche multiple ponctuelle $\sum c_{\nu,l}(-1)^l\, d^l/d\lambda^l * \epsilon_{\lambda_\nu}$. C'est ce qu'on peut démontrer effectivement.

Il est alors bien *plus élémentaire* d'étudier la convergence vers $f$ de son développement formel. Tous les $p_\nu$ sont bornés par $p$, la convergence a lieu par groupements de termes, mais sans facteurs de convergence, sinon dans $\mathcal{E}$, du moins dans l'espace topologique des distributions. Nous ne ferons pas cette étude ici; elle est aussi valable pour des fonctions moyenne-périodiques de plusieurs variables, nous en reparlerons dans une étude sur la théorie générale des distributions.

Si $f$ est moyenne-périodique bornée, son spectre $\Lambda_f$ dans $\mathcal{E}$ est réel et simple, on voit sans difficulté qu'il coincide avec son spectre dans $L^\infty$, défini par la théorie de M. Beurling (voir encore §5).

[61] SCHWARTZ [4].

## §19. Distributions moyenne-périodiques.

Toute la théorie faite ici pour l'espace $\mathcal{E}_c$ aurait pu être faite sans changements notables pour d'autres espaces analogues: $\mathcal{E}_p$ espace des fonctions de puissance $p$-ième sommable sur tout compact, $p$ fini $\geqq 1$ avec la topologie de la convergence dans $L^p$ de tout compact. Le dual est l'espace $\mathcal{E}'_p = {}_{p'}\mathcal{E}$ $p' = p/(p-1)$ des fonctions à noyau compact, et de puissance $p'$-ième sommable.

Mais le plus intéressant est l'espace $E$ des distributions, avec la topologie que nous lui avons donnée[62]; $f$ distribution moyenne-périodique, vérifiera alors

$$\varphi * f = 0 \tag{64}$$

$\varphi$ étant un élément du dual $E'$, c'est-à-dire une fonction indéfiniment dérivable à noyau compact. Plus généralement si $f$ est une distribution quelconque, $s$ une distribution quelconque $\neq 0$ à noyau compact et que $f$ soit solution de l'équation intégrale ou plutôt intégro-différentielle.

$$s * f = 0 \tag{65}$$

alors $f$ est moyenne-périodique dans $E$ et si elle est continue, dans $\mathcal{E}_c$. Car on a aussi, en *régularisant* par une fonction indéfiniment dérivable $\rho$ à noyau compact:

$$(\rho * s) \mathbin{\dot{*}} f = 0$$

et
$$\rho * s \in E' \text{ et } \in \mathcal{E}'_c.$$

La transformée de Fourier[63] $S(\lambda)$ de $s$ est encore une fonction analytique entière de type exponentiel. Mais cette fois elle n'est plus bornée sur l'axe réel des $\lambda$. Elle est à "croissance lente," autrement dit elle vérifie pour $\lambda$ réel $\rightarrow \pm\infty$

$$|S(\lambda)| = 0(|\lambda|^p), \qquad p > 0 \text{ assez grand}$$

et chacune de ses dérivées possède la même propriété; et cela non seulement pour $\lambda$ réel mais dans toute bande horizontale du plan des $\lambda$. Nous avons montré que réciproquement toute fonction $S(\lambda)$ analytique entière, de type exponentiel, à croissance lente sur l'axe réel, est la transformée de Fourier d'une distribution à noyau compact. $S(\lambda)$ possède des propriétés très analogues à $M(\lambda)$. On peut construire de la même façon les fonctions $S_{k,j}(\lambda)$, qui sont les transformées de Fourier de distributions $s_{k,j}$ à noyaux compacts. Les coefficients du dé-

---

[62] Schwartz [4]. Des distributions $f_i$ convergent vers 0 si les $f_i(\varphi)$ convergent vers 0 quelque soit $\varphi$, (fonction indéfiniment dérivable à noyau compact), et uniformément par rapport à tout ensemble de fonctions $\varphi$ à noyaux contenus dans un compact fixe et bornées dans leur ensemble, ainsi que chacune de leurs dérivées. $E$ est le dual de l'espace pseudo-topologique $E'$, mais alors $E'$ est le dual de l'espace topologique $E$.

[63] Préliminaires, 5°.

veloppement formel de la distribution $f$ se calculent par les produits de composition

$$P_k(x) \exp(2i\pi\lambda_k x) = s_{k,0} * f$$

qui ont toujours un sens puisque $s_{k,0}$ est à noyau compact. Ce développement est indépendant de $s$. Le développement formel trouvé pour $f$ converge dans $E$ par le procédé de sommation des facteurs de convergence d'Abel et des groupements de termes. Ainsi:

d'une part les variétés invariantes de $E$ ont exactement les mêmes propriétés que celles de $\mathcal{E}_c$: une variété invariante de $E$ est l'adhérence dans $E$ d'une variété invariante de $\mathcal{E}_c$ et inversement; d'autre part, les *distributions* solutions d'une équation intégrale (65) oú $s$ elle-même est une distribution à noyau compact, ont les mêmes propriétés de développement en séries d'exponentielles-monômes solutions de l'équation intégrale que dans le cas des fonctions continues $f$ et des mesures $\mu$. $s$ pouvant être une distribution de nature très compliquée on réunit dans un même tout des équations intégrales, différentielles, et intégro-différentielles.

Terminons par une dernière remarque. Si $f$ est moyenne-périodique, il existe des composées $f * \rho$ qui sont des exponentielles-monômes (d'après (39)); on n'obtient naturellement ainsi que les exponentielles-monômes de $\mathcal{T}f$. Si au contraire $f$ n'est pas moyenne-périodique, l'adhérence des $f * \rho$ comprend toutes les exponetielles monômes, mais jamais $f * \rho$ n'est une exponentielle monôme: sans quoi, $\sigma$ étant une mesure $\epsilon\, \mathcal{E}'$ orthogonale à cette exponentielle-monôme, on aurait $(f * \rho) * \sigma = 0$ ou $f * (\rho * \sigma) = 0$; $f$ serait moyenne-périodique. On peut donc dire si l'on veut que, pour qu'une fonction ou une distribution $\neq 0$ soit moyenne-périodique, il faut et il suffit qu'une de ses composées soit une exponentielle.

## §20. Théoremes corrélatifs.

Les théorèmes corrélatifs de ceux de $\mathcal{E}$ sont relatifs à $\mathcal{E}'$. La variété $V'_{\lambda_0}$ orthogonale à l'exponentielle $\exp(2i\pi\lambda_0 x)$ est l'hyperplan invariant le plus général, la variété invariante maximale la plus générale de $\mathcal{E}'$. On pourra la représenter symboliquement par $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)$ ou par $(\lambda_0)$. La première représentation indiquée s'interprète ainsi: pour que $\mu \,\epsilon\, V'_{\lambda_0}$, *il faut et il suffit* qu'elle soit de la forme

$$(66) \qquad \mu = \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right) * \nu, \qquad \nu \,\epsilon\, \mathcal{E}'.$$

En effet

1°—Si $\mu = \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right) * \nu$, on a en transformant par Fourier $M(\lambda) =$

$(\lambda - \lambda_0)N(\lambda)$ ce qui prouve bien que $M(\lambda_0) = 0$, donc que $\mu$ est orthogonale à $\exp(2i\pi\lambda_0 x)$.

2°—Réciproquement, si $\mu$ est orthogonale à $\exp(2i\pi\lambda_0 x)$, $M(\lambda_0) = 0$, donc $N(\lambda) = M(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)$ est une fonction analytique entière de type exponentiel, de carré sommable sur l'axe réel; elle est transformée de Fourier d'une mesure $\nu$ à noyau compact, qui est même une fonction de carré sommable.[64]

On voit encore une autre manière de noter la variété $V'_{\lambda_0}$ : c'est l'ensemble des $\mu$ dont la transformée de Fourier $M(\lambda)$ contient $\lambda - \lambda_0$ en facteur, donc on peut la représenter par $(\lambda - \lambda_0)$.

Considérons maintenant la variété orthogonale à la variété invariante d'élément originel $(2i\pi x)^{p-1} \exp(2i\pi\lambda_0 x)$. C'est une variété invariante de co-dimension $p$. On pourra la représenter par $(\lambda_0)^p$, ou $(\lambda - \lambda_0)^p$, ou $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)^{*p}$; cela signifie ceci: pour que $\mu \in \mathcal{E}'$ soit élément de cette variété, il faut et il suffit que $\mu$ contienne en facteur (au sens du produit de composition) la distribution $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)^{*p}$, ou

$$\mu = \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)^{*p} * \nu, \qquad \nu \in \mathcal{E}'$$

ou encore il faut et il suffit que la transformée de Fourier $M(\lambda)$ contienne $(\lambda - \lambda_0)^p$ en facteur.

Avant de continuer, faisons une remarque. Quand nous disons que $\mu$ contient $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)$ en facteur, cela veut dire que le "quotient" $\nu$ est à noyau compact. Car autrement toute mesure $\mu$ est bien de la forme (66)! En effet si on appelle $Y(x)$ la fonction égale à 0 pour $x \leqq 0$, 1 pour $x > 0$, on a $Y' = \epsilon$

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right) * (Y \exp(2i\pi\lambda_0 x)) \equiv \frac{1}{2i\pi} Y' \exp(2i\pi\lambda_0 x)^{65}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\epsilon \exp(2i\pi\lambda_0 x)^{66} = \frac{\epsilon}{2i\pi}$$

de sorte que

$$\mu = \left[\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right) * Y \exp(2i\pi\lambda_0 x)\right] * 2i\pi\mu$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right) * [2i\pi\mu * Y \exp(2i\pi\lambda_0 x)].$$

[64] Voir théorème de Paley-Wiener, préliminaires 3°.

[65] Voir formule (40).

[66] Si $\alpha(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable, la distribution $\alpha(x)\epsilon$ n'est autre que $\alpha(o)\epsilon$. Voir SCHWARTZ [4]

Mais si $\mu$ est une mesure quelconque la fonction

$$\nu = 2i\pi\mu * Y \exp(2i\pi\lambda_0 x) = 2i\pi \int_{-\infty}^{x} \exp(2i\pi\lambda_0(x-t))\, d\mu(t) \tag{67}$$

n'est pas à noyau compact. Au lieu de dire que $\mu$ contient $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)$ en facteur, on pourrait aussi bien dire que: l'expression (67) est à oyau compact; cela revient exactement à dire que $M(\lambda_0) = 0$.

De même au lieu de dire que $\mu$ contient $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)^{*p}$ en facteur, on pourrait aussi bien dire que

$$\mu * (Y \exp(2i\pi\lambda_0 x))^{*p}$$

est à noyau compact, ce qui revient exactement à dire que $\lambda_0$ est racine d'ordre $p$ de $M(\lambda)$.

Considérons maintenant la variété orthogonale à la variété invariante ayant pour ensemble originel un ensemble fini d'exponentielles-monômes $(2i\pi x)^{p_k-1}$ $\exp(2i\pi\lambda_k x)$, tous les $\lambda_k$ étant distincts. Pour toute mesure $\mu$ de cette variété, la transformée de Fourier $M(\lambda)$ contient en facteur $\prod_k (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$ et réciproquement. Alors $\mu$ contient en facteur le produit de composition

$$\prod_{*} \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\epsilon\right)^{*p_k};$$

ou encore la fonction

$$[\prod_{*} (Y \exp(2i\pi\lambda_k x))^{*p_k}] * \mu$$

est à noyau compact.

Nous représenterons donc tout naturellement une telle variété par l'une des notations

$$\prod (\lambda_k)^{p_k}; \qquad \prod (\lambda - \lambda_k)^{p_k}; \qquad \prod_{*} \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\epsilon\right)^{*p_k}.$$

Passons maintenant à une variété invariante $V'$ quelconque $\neq (0)$ et $\neq \mathcal{E}'$. Soit $\Lambda$ son co-spectre, formé d'éléments $\lambda_k$ multiples d'ordres $p_k$ en nombre en général infini. Pour $\mu \in V'$, $M(\lambda)$ contient en facteur chaque polynôme $(\lambda - \lambda_k)^{p_k}$, mais on ne peut pas dire qu'elle contienne en facteur le produit $\prod (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$, en ce ses qu'elle n'est pas égale à ce produit multiplié par une fonction $N(\lambda)$ transformée de Fourier d'une mesure. Néanmoins il sera logique de continuer à représenter $V'$ par le produit symbolique infini:

$$\prod (\lambda_k)^{p_k} \text{ ou} \tag{68}$$

$$\prod (\lambda - \lambda_k)^{p_k} \text{ ou} \tag{69}$$

$$\prod_{*} \left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_k\epsilon\right)^{*p_k}. \tag{70}$$

Cela n'exprime jusqu'à présent rien de plus que la correspondance entre variété invariante et co-spectre. Si $V' = (0)$, son co-spectre est "plein," on pourrait prendre la même représentation avec toutes les valeurs de $\lambda_{k'}$ et $p_k = \infty$, mais c'est sans intérêt. Si $V' = \mathcal{E}'$, son co-spectre est vide: on pourra la représenter par

1 (en raissonant sur $M(\lambda)$) ou $\epsilon$ (en raisonnant sur $\mu$); car les $M(\lambda)$ n'ont d'autre facteur commun que 1, les $\mu$ d'autre facteur que $\epsilon$. Le produit $\prod$ est le produit d'une famille vide d'éléments.

Ce qui fait l'intérêt de cette représentation par un produit, *c'est la structure d'anneau de* $\mathcal{E}'$, définie par le produit de composition.[67] Une variété invariante $V'$ est l'idéal fermé le plus général. Comme nous ne considérerons jamais d'autres idéaux que des idéaux fermés, nous dirons toujours *idéal* au lieu *d'idéal fermé*; l'idéal engendré par une famille d'éléments désignera pour nous le plus petit idéal fermé qui les contienne.

Un hyperplan invariant $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)$ n'est pas autre chose que l'idéal premier ou maximal le plus général. *L'expression* (70) *ou les expressions analogues ne sont autres qu'une décomposition en facteurs premiers de l'idéal* $V' \neq (0)$.

*Ainsi dans l'anneau* $\mathcal{E}'$ *tout idéal* $\neq (0)$ *a une décomposition en facteurs pemiers et une seule* (*qui est vide pour l'idéal unité* $\mathcal{E}'$).

Ce qu'il y a d'intéressant c'est que nous trouvons des décompositions en une infinité de facteurs premiers.

Sur ces décompositions, on peut faire les opérations classiques de l'algèbre:

1°—Un idéal $V'_1$ est divisible par un autre $V'_2$, si $V'_1 \subset V'_2$; ce qui donne, pour les co-spectres, $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$, c'est bien la condition classique de divisibilité d'idéaux décomposés en facteurs premiers.

2°—Le *PPCM* d'une famille d'idéaux est leur intersection. Il s'obtient en prenant la réunion des co-spectres, ce qui revient à appliquer la règle classique pour le *PPCM* d'une famille d'idéaux décomposés en facteurs premiers.

Il y a seulement une précaution à prendre (voir §17): si le co-spectre réunion n'est pas un vrai co-spectre, autrement dit s'il correspond à un systéme total d'exponentielles-monômes, le *PPCM* est alors l'idéal (0), son co-spectre est plein. Cette circonstance ne se produira jamais pour le *PPCM* d'un nombre fini d'idéaux $\neq (0)$.

3°—Le *PGCD* d'une famille d'idéaux est leur somme, son co-spectre est l'intersection des co-spectres, ce qui revient à appliquer la règle classique pour le *PGCD* d'une famille d'idéaux décomposés en facteurs premiers. Ici il n'y a jamais aucune difficulté; si on trouve le *PGCD* 1 (ou $\epsilon$), c'est l'idéal unité $\mathcal{E}'$, les idéaux sont premiers entre eux.

Donnons un exemple. Soient $\alpha, \beta, \gamma$, 3 mesures $\epsilon\ \mathcal{E}'$. Pour que l'ensemble des

$$\alpha * u + \beta * v + \gamma * w, \qquad (u, v, w, \epsilon\ \mathcal{E}')$$

[67] Voir §6.

(ou, ce qui revient au même, l'ensemble des combinaisons linéaires des translatées de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$) soit dense dans $\mathcal{E}'$, il faut et il suffit que les idéaux engendrés par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ soient premiers entre eux, c'est-à-dire que les transformées de Fourier $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ soient sans zéro commun.

4°—Le produit d'un nombre fini d'idéaux $V_1'$, $V_2'$, $\cdots$, $V_n'$ est l'idéal engendré par les produits $\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_r$ de mesures prises une dans chaque idéal. On voit immédiatement que la décomposition en facteurs premiers du produit s'obtient classiquement par le produit des décompositions en facteurs premiers.

Le produit d'une famille infinie d'idéaux est défini comme l'intersection des produits finis; sa décomposition en facteurs premiers est encore le produit des décompositions, sauf comme toujours si le produit des idéaux est l'idéal nul.

*La décomposition d'un idéal $\neq$ (0) en facteurs premiers est alors un vrai produit de puissances d'idéaux premiers, et le symbole $\prod$ du produit est entièrement justifié.*

On voit aussi que si un idéal $\neq 0$ est divisible par un autre, il existe un idéal rapport, dont le produit par le diviseur donne le dividende; on obtient sa décomposition en facteurs premiers par le quotient des décompositions.

On voit combien toute cette théorie est harmonieuse et simple. Si on passe dans le plan complexe, à l'espace des $M(\lambda)$, on a une théorie qui généralise immédiatement celle des anneaux de polynômes (notation (69)). Il s'agit ici d'anneaux et d'idéaux de fonctions analytiques entieres de type exponentiel.

On peut apporter quelques modifications intéressantes. Remplaçons $\mathcal{E}_c$ par $\mathcal{E}_d$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, avec la topologie suivante: des $f_i \in \mathcal{E}_d$, convergent vers 0, si les $f_i$ convergent uniformément vers 0 sur tout compact et s'il en est de même de leurs dérivées de n'importe quel ordre. Les variétés invariantes de $\mathcal{E}_d$ ont les mêmes propriétés que celles de $\mathcal{E}_c$. Soit en effet $V_d$ une telle variété; considérée comme contenue dans $\mathcal{E}_c$ elle a une adhérence $\bar{V}_d = V$. $V$ est caractérisée par ses exponentielles monômes; or celles-ci appartiennent à $V_d$. Si $f \in V_d$ est limite (avec la topologie de $\mathcal{E}_c$) de $f_i$, combinaisons de ces exponentielles-monômes, alors, $\rho$ étant une fonction indéfiniment dérivable, les $f_i * \rho$ qui sont encore des combinaisons des exponentielles monômes de $V_c$, convergent vers $f * \rho$ dans $\mathcal{E}_d$; mais $f$ est limite dans $\mathcal{E}_d$ de ses régularisées $f * \rho$, donc finalement $f$ est limite dans $\mathcal{E}_d$ de combinaisons des exponentielles monômes de $V_d$, de sorte que $V_d$ a bien dans $\mathcal{E}_d$ une base formée de ses exponentielles-monômes.

Le dual $\mathcal{E}_d'$ est l'espace des *distributions a noyaux compacts.* On peut d'ailleurs le munir, non seulement de la topologie faible, mais même de la topologie forte de dual: des $s_i \in \mathcal{E}_d'$ convergeront vers 0 si, quel que soit $f \in \mathcal{E}_d$ les $s_i(f)$ convergent vers 0, et cela uniformément pour tout ensemble de fonctions $f$ qui sur chaque compact sont bornées dans leur ensemble ainsi que chacune de leurs dérivées. *On demontre en effet que $\mathcal{E}_d$ et $\mathcal{E}_d'$ forts sont en dualité réciproque.*[68]

$\mathcal{E}_d'$, faible ou fort, possède alors toutes les propriétés de $\mathcal{E}_c'$ faible pour la décomposition en facteurs premiers. Mais il a sur lui une supériotité. L'idéal

---

[68] La démonstration sera publiée ultérieurement dans une théorie générale des distributions.

$\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)^{*p}$, quel que soit $p$, est en effet l'idéal engendré par un élément, à savoir la distribution $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)^{*p}$. Les idéaux premiers et leurs puissances ont un élément générateur. En raisonnant sur les transformées de Fourier, l'idéal $(\lambda - \lambda_0)^p$ admet un élément générateur, à savoir le polynôme $S(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^p$, transformé de Fourier de la distribution $\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dx} - \lambda_0\epsilon\right)^{*p}$. L'anneau étudié est alors celui des fonctions $S(\lambda)$ entières de type exponentiel, à croissance lente sur l'axe réel; l'anneau des polynômes en est un sous-anneau.

Dans $\mathcal{E}'_c$ comme dans $\mathcal{E}'_d$ quel est le nombre minimum d'éléments générateurs d'un idéal $V'$ quelconque? En général on ne peut pas trouver une seule fonction $M(\lambda)$, transformée de Fourier d'une mesure (ou $S(\lambda)$ d'une distribution) à noyau compact, ayant exactement le co-spectre de l'idéal $V'$. Ainsi les zéros de $M(\lambda)$ ou $S(\lambda)$ ont nécessairement une densité exacte $> 0$. Or les éléments d'un co-spectre ont une densité maxima finie, mais non nécessairement une densité exacte; ils peuvent aussi avoir une densité nulle. Mais:

THÉORÈME 13. *Tout idéal a des ensembles générateurs ou originels de 2 éléments au p us.*

Soit en effet $M_1(\lambda)$ une fonction entière transformée de Fourier d'une mesure, dont le co-spectre $\Lambda_1$ contienne le spectre $\Lambda$ de $V'$. Nous pourrons supposer même que $M_1(\lambda) \in L^2(-\infty, +\infty)$ en la multipliant au besoin par $\sin \pi\lambda/\lambda$. Sans toucher aux zéros de $M_1(\lambda)$ qui appartiennent au spectre $\Lambda$, nous déplacerons un peu chaque zéro de $M_1(\lambda)$ qui n'appartient pas à $\Lambda$, d'une quantité très petite, et ceci de proche en proche pour tous les zéros, de façon à obtenir une nouvelle fonction $M_2(\lambda)$, encore analytique de type exponentiel et $\in L^2(-\infty, +\infty)$. (Nous n'insistons pas en détail sur la construction de $M_2(\lambda)$, le lecteur se convaincra qu'elle est facile). Si $\lambda_0$ est d'ordre $p$ dans $\Lambda$, $q > p$ dans $\Lambda_1$, on devra remplacer les $q$ éléments confondus en $\lambda_0$ par $p$ éléments confondus en $\lambda_0$ et $q - p$ voisins de $\lambda_0$, confondus ou non). $M_1(\lambda)$ et $M_2(\lambda)$ sont les transformées de Fourier de 2 mesures $\mu_1$ et $\mu_2$ (qui sont même des fonctions de carré sommable). Les co-spectres $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$ ont pour intersection exactement le co-spectre $\Lambda$, de sorte que $V'$ est l'idéal $PGCD$ des idéaux engendrés respectivement par $\mu_1$ et $\mu_2$, c.q.f.d.

Le fait que, dans $\mathcal{E}_c$ ou $E$, toute variété invariante admette d'une infinité de manières, 1 élément originel, tandis que dans $\mathcal{E}'_c$ ou $\mathcal{E}'_d$ toute variété invariante admette une infinité d'ensembles originels de 2 éléments au plus,[69] peut s'écrire comme suit:

1°—L'ensemble des solutions communes à une famille d'équations intégrales du type (65) ($s$ donné, $f$ inconnue) est identique à l'ensemble des solutions communes à 2 équations intégrales convenablement choisies.

2°—L'ensemble des équations intégrales du type (65) ayant une famille de

[69] Voir Théorème 12.

solutions communes données est identique à l'ensemble des équations intégrales ayant 1 solution commune donnée convenablement choisie.

Remarquons que $\epsilon$ est la seule distribution $\epsilon\ \mathcal{E}'_d$ à ne pas être moyenne-périodique. Mais 2 distributions choisies au hasard, étant "premières" entre elles, engendrent à elles deux l'idéal unité $\mathcal{E}'_d$.

Lorsqu'un idéal est engendré par un seul élément $s$, $S(\lambda)$ est déterminée à un facteur près de la forme

$$\exp(iA\lambda + B), \quad A \text{ réel}.$$

Donc $s$ est déterminée à une translation près et à un facteur constant près. Si on veut prendre 2 éléments générateurs d'un idéal, il y a au contraire une indétermination beaucoup plus grande.

### §21. Quelques théorèmes d'approximation.

Considérons l'espace $L$ des fonctions continues à noyaux compacts. Considérons le d'abord comme un sous-espace topologique de $\mathcal{E}_c$. Alors la théorie de la moyenne-périodicité y est facile: une fonction à noyau compact, étant sommable, n'est jamais moyenne-périodique,[70] et les seules variétés invariantes de $L$ sont (0) et $L$. Ainsi:

THÉORÈME 14. *Si $\varphi$ et $\psi$ sont 2 fonctions continues à noyaux compacts, $\varphi \neq 0$, $\psi$ est limite, uniforme sur tout compact, de combinaisons linéaires des translatées de $\varphi$.*

Mais on peut essayer d'aller plus loin. $\psi$ étant nulle en dehors d'un compact, il serait intéressant de chercher la convergence uniforme sur tout l'axe réel. Nous allons voir que le théorème subsiste. Mais compliquons encore. Soit $R(x)$ une fonction continue $> 0$, paire, croissante pour $x \geqq 0$. Nous appellerons $L_R$ l'espace vectoriel $L$ muni de la topologie suivante: des $\varphi_i \in L$ tendent vers 0 dans $L_R$ si les fonctions $\varphi_i(x)R(x) \in L$ convergent uniformément vers 0 sur tout l'axe réel. La convergence uniforme des $\varphi_i$ sur tout l'axe réel correspond à $R(x) \equiv 1$. Cette topologie est d'autant plus fine que $R(x)$ est, pour $x \geqq 0$, une fonction plus rapidement croissante. Un système de fonctions $\varphi_i(x) \in L_R$ est non total s'il existe une mesure $\mu \neq 0$, sommable sur tout l'axe réel $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu| < +\infty\right)$ vérifiant pour tout $i$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x)R(x)\, d\mu(x) = 0.$$

THÉORÈME 15. *Si $\int^{\infty} \frac{dx}{R(x)} = +\infty$, toute fonction $\varphi \in L_R$, $\neq 0$, est un élément originel de tout l'espace; si $\int^{\infty} \frac{dx}{R(x)} < +\infty$, il y a dans $L_R$ des fonctions $\varphi \neq 0$ qui sont moyenne-périodiques.*

---

[70] Voir §8.

$1^0$—Montrons que si $\int^{\infty} [dx/R(x)] < +\infty$, il y a des fonctions $\varphi \neq 0$ qui sont moyenne-périodiques. Il suffit de prendre pour $\varphi$ n'importe quelle fonction continue à noyau compact, dont le co-spectre ait au moins un élément réel, autrement dit dont la transformée de Fourier $\Phi(\lambda)$ ait au moins une racine réelle. La convergence dans $L_R$ entraîne la convergence dans $L^1$ à cause de l'hypothèse faite sur $R$: $\Phi(\lambda_0) = 0$ entraîne alors, d'après le théorème de M. Wiener,[71] la moyenne-périodicité de $\varphi$ dans $L^1$, donc dans $L_R$.

Prenons par exemple $\varphi$ telle que $\Phi(0) = 0$. Alors $\varphi * R\mu = 0$ si $R\mu = 1$, c'est-à-dire $\mu = 1/R$ (dans le langage des distributions! nous voulons dire $d\mu = dx/R(x)$), qui est bien une mesure sommable sur tout l'axe réel: le système des $\varphi(x - h)$, $h$ réel, est non total.

$2^0$—Montrons que s'il existe une fonction $\varphi \neq 0$ de $L_R$ qui est moyenne-périodique, $\int^{\infty} [dx/R(x)]$ est convergente. $\varphi$ étant moyenne-périodique dans $L_R$, de noyau contenu dans l'intervalle $(-A, +A)$ il existe une mesure $\mu \neq 0$ sommable sur tout l'axe réel telle que $\varphi * R\mu = 0$. Comme $\varphi$ est à noyau compact, cela signifie que $R\mu$ est moyenne-périodique dans l'espace des distributions, $E$. Nous pouvons lui appliquer la formule (63), un peu modifiée puisqu'il s'agit d'une mesure et non d'une fonction; si $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k \; \epsilon_{p_k} \Lambda_\Phi$

$$(71) \quad |x^{p_k-1}| \exp(-2\pi\tau_k x) = O\left(\int_{x-A}^{x+A} |R(t)|\,|d\mu(t)|\right) \quad \text{pour} \quad x \to \pm\infty.$$

En faisant tendre $x$, soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$ (suivant le signe de $\tau_k$) on voit que

$$1 = O\left(\int_{2nA}^{2(n+1)A} R(t)\,|d\mu(t)|\right), \quad \text{où} \quad \begin{matrix} n \to +\infty \\ n \to -\infty. \end{matrix}$$

Supposons, pour fixer les idées, que cette majoration soit vraie pour $n \to +\infty$. Elle peut s'écrire

$$R(2(n+1)A) \int_{2nA}^{2(n+1)A} |d\mu(t)| = \Omega(1)^{72}$$

ou

$$1/R(2(n+1)A) = O\left(\int_{2nA}^{2(n+1)A} |d\mu(t)|\right).$$

Comme l'intégrale $\int^{\infty} |d\mu(t)|$ est convergente, la série $\sum 1/R(2(n+1)A)$ est convergente, donc aussi l'intégrale $\int^{\infty} dx/R(x)$, c.q.f.d.

[71] Théorème 2. Il s'agit ici de la partie évidente du théorème de Wiener, c'est la réciproque qui est délicate.

[72] Voir note 60.

Prenons un exemple: $R(x) = (1 + x^2) \exp (2\pi\alpha |x|)$, $\alpha \geqq 0$. Considérons une fonction $\varphi \neq 0$. Si elle est moyenne-périodique, il existe une mesure $\mu \neq 0$ sommable telle que $\varphi * R\mu = 0$. On a, si $\lambda_k \in_{p_k} \Lambda_\Phi$

$$x^{p_k-1} \exp (2\pi\tau_k x) = O\left(\int_{x-A}^{x+A} (1 + t^2) \exp (2\pi\alpha |t|) \, |d\mu(t)|\right)$$

$$= O\left((1 + x^2) \exp (2\pi\alpha |x|) \int_{x-A}^{x+A} |d\mu(t)|\right).$$

Comme $\mu$ est sommable, la quantité $\int_{x-A}^{x+A} |d\mu(t)|$ tend vers 0 pour $x \to \pm\infty$ et même on peut trouver une suite de valeurs de $x$ tendant vers $+\infty$ et une autre tendant vers $-\infty$ pour lesquelles $\int_{x-A}^{x+A} |d\mu(t)| = o(1/|x|)$,[73] ce qui donne finalement

(72) $$|x^{p_k-1}| \exp(-2\pi\tau_k x) = o\,(\exp(2\pi\alpha |x|)\,(1 + x^2)/|x|)$$

pour $x \to \pm\infty$[73] inégalité équivalente à

(73) $$|\tau_k| < \alpha;\ \text{ou}\ \tau_k = \pm\alpha,\ p_k = 1.$$

Ainsi la fonction $\varphi$ n'est moyenne-périodique dans $L_R$, pour $R$ ainsi choisie, que si son co-spectre $\Lambda_\Phi$ (dans $E'_c$) contient au moins un élément dans la bande $|\tau| \leqq \alpha$. Supposons qu'il en soit ainsi; cherchons alors $\mathcal{T}_\varphi$ dans $L_R$. Toute mesure $R\mu$ ($\mu$ sommable sur tout l'axe réel) orthogonale à $\mathcal{T}_\varphi$ a tout son spectre dans la bande $|\tau| \leqq \alpha$, et les éléments du spectre situés sur la limite $\tau = \pm\alpha$ sont simples. Si $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k \in_{p_k} \Lambda_\Phi$, on peut prendre $R\mu = (2i\pi x)^j \exp (2i\pi\lambda_k x)$, (si $|\tau_k| \leqq \alpha$: avec $j \leqq p_k - 1$ si $|\tau_k| < \alpha$ et $j = 0$ si $\tau_k = \pm\alpha$); cela donne

$$\mu = (2i\pi x)^j \exp 2i\pi\lambda_k x/(1 + x^2) \exp (2\pi\alpha |x|)$$

qui est bien une fonction sommable sur tout l'axe réel. On ne peut avoir $\psi \in \mathcal{T}_\varphi$ que si $\psi$ est orthogonale à toutes ces exponentielles-monômes: le co-spectre de $\psi$ doit donc contenir toute la partie du co-spectre de $\varphi$ contenue dans $|\tau| < \alpha$ et l'ensemble co-spectral de $\psi$ contenir toute la partie de l'ensemble co-spectral de $\varphi$ située sur les droites limites $\tau = \pm\alpha$. Réciproquement, supposons cette condition vérifiée. Alors si $R\mu$ est une mesure vérifiant $\varphi * R\mu = 0$, elle est moyenne-périodique dans $E$ et son spectre vérifie (73), en même temps qu'il est contenu dans le co-spectre de $\varphi$: alors le co-spectre de $\psi$ contient le spectre de $R\mu$, donc $R\mu * \psi = 0$, ce qui prouve bien que $\psi \in \mathcal{T}_\varphi$.

Ainsi dans $L_R$ ainsi choisi, la théorie co-spectrale de $\mathcal{E}'_c$ est encore valable, ainsi que toute la décomposition en facteurs premiers des idéaux fermés, avec cette seule modification: le co-spectre de $\varphi$ dans $L_R$ sera la partie de son co-spectre dans $\mathcal{E}'_c$ contenue dans la bande $|\tau| \leqq \alpha$, chaque élément des droites

[73] $o(a)$ est une quantité dont le quotient par $a$ tend vers 0.

limites $\tau = \pm\alpha$ étant toujours compté simple dans le co-spectre de $\varphi$ dans $L_R$. Cela introduit 2 différences importantes avec $\mathcal{E}'_c$ :

$1^0$—Dans le produit d'une famille d'idéaux, chaque facteur premier $(\lambda_k)$ sur les droites limites ne sera jamais compté qu'une fois dans le produit même s'il intervient dans plusieurs facteurs;

$2^0$—Le co-spectre d'une fonction $\varphi$ dans $L_R$ peut être vide si son co-spectre dans $E'_c$ est extérieur à la bande. Elle engendre l'idéal unité.

Ceci nous méne au théorème suivant:

THÉORÈME 16. *Si l'intégrale* $\int^\infty dx/R(x)$ *étant convergente,* $R(x)$ *croit moins vite qu'une exponentielle, il y a dans* $L_R$ *des fonctions* $\varphi \neq 0$ *qui sont moyenne-pèriodiques et d'autres qui ne le sont pas*

*Si* $R(x)$ *croit plus vite que toute exponentielle, toute fonction* $\varphi$ *de* $L_R$ *est moyenne-pèriodique et la théorie co-spectrale dans* $L_R$ *(théorie de la décomposition des idéaux en facteurs premiers) est identique à celle de* $\mathcal{E}'_c$ .

$1^0$—Soit $R(x) = O\,(\exp(2\pi\alpha \mid x \mid)), \alpha \geqq 0$. Alors d'après ce que nous avons vu au Théorème 15, toute fonction $\varphi$ dont le co-spectre dans $\mathcal{E}'_c$ a des éléments réels est moyenne-périodique dans $L_R$ pourvu que $\int^\infty dx/R(x) < +\infty$. Par contre une fonction $\varphi$ dont le co-spectre est extérieur à la bande $\mid \tau \mid \leqq \alpha$ est un élément originel de $L_R$ ; car si $\rho * R\mu = 0$, on voit que le spectre de $R\mu$ (dans $E$) ne peut contenir que les éléments de la bande (à cause de la limitation de la croissance de $R$) et ne peut contenir que des éléments extérieurs à la bande (il est contenu dans le co-spectre de $\varphi$), donc il est vide, et $R\mu = 0$, c.q.f.d.

$2^0$—Soit au contraire $R(x) = \Omega\,(\exp(2\pi\alpha \mid x \mid))$, quel que soit $\alpha > 0$, toute fonction $\varphi \in L_R$ est moyenne-périodique. En effet soit $\lambda_k$ un élément quelconque du co-spectre de $\varphi$: si on pose $R\mu = \exp(2i\pi\lambda_k x)$, $\mu$ est bien sommable sur tout l'axe réel, et on a bien $\varphi * R\mu = 0$.

Soit $V'$ un sous-espace vectoriel (non nécessiarement fermé) invariant de $L_R$, $\Lambda$ son co-spectre défini comme dans $\mathcal{E}'_c$ (intersection des co-spectres des $\varphi \in V'$). Pour montrer que la théorie co-spectrale dans $L_R$ est la même que dans $\mathcal{E}'_c$, il faut montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $\psi \in \bar{V}'$ (adhérence de $V'$) est $\Lambda_\psi \supset \Lambda$. Or:

a) si $\psi \in \bar{V}'$, on a nécessairement $R\mu * \psi = 0$ dès que l'on a $R\mu * \varphi = 0$ pour tout $\varphi \in V'$; prenons $R\mu = (2i\pi x)^{p_k-1} \exp(2i\pi\lambda_l x)$ $(\lambda_l \in_{p_k} \Lambda)$, on voit que nécessairement $\lambda_k \in_{q_k} \Lambda_\psi$, $q_k \geqq p_k$, donc $\Lambda_\psi \supset \Lambda$.

b) Réciproquement supposons que $\Lambda_\psi \supset \Lambda$. Pour montrer que $\psi \in \bar{V}'$, il faut montrer que $R\mu * \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in V'$ entraîne $R\mu * \psi = 0$. Or si $R\mu * \varphi = 0$, $R\mu$ est moyenne-périodique dans $E$, son spectre est contenu dans le co-spectre de $\varphi$; il est donc contenu dans les co-spectres de toutes les $\varphi \in V'$, donc dans $\Lambda$; alors le co-spectre de $\psi$ contient le spectre de $R\mu$ et on a bien $R\mu * \psi = 0$, c.q.f.d.

Soit alors $\varphi$ une fonction de $L$, $\psi$ une fonction dont le co-spectre contient le co-spectre de $\varphi$. Il existe des combinaisons linéaires des translatées de $\varphi$ qui convergent vers $\psi$ dans $L_R$, *quelle que soit la rapidité de la croissance de R*. On peut se demander s'il n'existe pas aussi des combinaisons des translatées de $\varphi$ qui convergent *encore plus fortement* vers $\psi$: *en restant nulles en dehors d'un compact fixe.*

Appelons $L_F$ la topologie, plus forte que toutes les $L_R$, sur l'espace $L$, définie comme suit:

*$\varphi_i \in L$ convergent vers 0 dans $L_f$ si elles convergent uniformément vers 0 et restent nulles en dehors d'un compact fixe.*

Ce n'est pas une véritable topologie, dont on puisse définir les voisinages; c'est seulement une pseudo-topologie, dont on peut définir les filtres[74] ou suites convergents, les ensembles fermés (contenant toutes leurs limites) et par conséquent les variétés invariantes (fermées). L'adhérence d'un ensemble sera le plus petit ensemble fermé qui le contienne.

THÉORÈME 17. *Dans $L_f$, toute fonction est moyenne-périodique et la théorie co-spectrale* (*théorie de la décomposition en facteurs premiers des idéaux fermés*) *est identique à celle de $\mathcal{E}'_c$.*

Nous ne donnerons que les principes directeurs de la démonstration, qui est simple dans son essence mais dont le détail est compliqué. La difficulté tient à l'impossibilité d'appliquer le théorème de Hahn-Banach[75] parce qu'il ne s'agit que d'une pseudo-topologie.

Soit $V'$ un ensemble quelconque de $\varphi_i \in L_F$. Il faut montrer que $\psi \in \mathcal{T}V'$ est équivalent à $\Lambda_\psi \supset \Lambda$, comme dans le précédent théorème. L'une des parties de cette proposition est évidente; démontrons l'autre. Supposons $\Lambda_\psi \supset \Lambda$ et montrons que $\psi \in \mathcal{T}V'$.

1⁰—Supposons le théorème dé montré lorsque les noyaux de toutes les $\varphi \in V'$ sont de dimensions bornées dans leur ensemble. Alors il est démontré dans tous les cas.

Il est en effet démontré pour en ensemble $V'$ d'1 fonction ou de 2 fonctions seulement. Si $V'$ est un ensemble quelconque de fonctions on choisira l'une d'elles $\varphi_0$, et on remplacera chaque fonction $\varphi_i$ par une fonction de $\mathcal{T}(\varphi_0, \varphi_i)$, soit $\psi_i$; on peut choisir $\psi_i$ de façon que d'une part l'intersection des co-spectres des $\psi_i$ soit encore $\Lambda$, d'autre part que tous les noyaux des $\psi_i$ soient contenus dans $(-A'_0, +A'_0)$, $A'_0 > A_0$, si $2A_0$ est la dimension du noyau de $\varphi_0$.

2°—Démontrons donc le théorème dans les conditions suivantes: toutes les les $\varphi_i$ et $\psi$ ont leur noyau contenu dans un même intervalle $(-A, +A)$.

Nous considèrerons alors *une partie* seulement des translatées de chaque fonction $\varphi_i$: les $\varphi_i(x - h)$, $|h| \leqq L$ fixe. Il est probable que $L > A$ suffirait (c'est vrai si toutes les $\varphi_i$ sont hermitiennes, $\bar{\varphi}_i = \varphi_i$), mais en tout cas on voit que $L > 3A$ convient toujours. On cherchera alors à approcher $\psi$ uniformément avec *ces translatées seulement*; on est bien sûr alors que toutes les fonctions qui que interviennent ont leur noyau contenu dans $(-A-L, +A+L)$. Il faut

[74] BOURBAKI [1]

[75] DIEUDONNÉ [1]

montrer que si $\mu$, mesure portée par $(-A-L, +A+L)$, est orthogonale à toutes les $\varphi_\iota(x - h)$, elle est orthogonale à $\psi$. On peut (par régularisation $\mu * \rho$) se ramener au cas oú $\mu$ est une fonction continue.

3°—L'orthogonalité de $\mu$ aux $\varphi_\iota(x - h)$ se traduit par

$$\int \varphi_\iota(x - h)\check{\mu}(x)\, dx = 0$$

$$\text{ou } \varphi_\iota * \mu = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \leqq L \tag{74}$$

$\mu$ est en somme une fonction *partiellement moyenne-périodique* dans $\mathcal{E}$ puisque $\varphi_\iota \in \mathcal{E}'_c$ et que l'égalité (74) a lieu pour $|x| \leqq L$. Mais elle n'est pas complètement moyenne-périodique (puisqu'elle est à noyau compact): $\varphi_\iota * \mu$ est $\neq 0$ pour $L \leqq |x| \leqq L + A$. Néanmoins toute la théorie développée au Chapitre III est valable dans une certaine mesure: $\mu$ est limite de combinaisons linéaires $\mu_\nu$ d'exponentielles-monômes définies par son spectre, la convergence ayant lieu au moins dans $(-A, +A)$ si $L > 3A$. Son spectre est contenu dans la partie commune $\Lambda$ aux co-spectres $\Lambda_\iota$ des $\varphi_\iota$.

Nous voulons montrer que $\int \psi\, d\check{\mu} = 0$; comme $\psi$ est portée par $(-A, +A)$ et que les $\mu_\nu$ convergent uniformément vers $\mu$ dans cet intervalle, cette quantité est la limite des $\int \psi d\check{\mu}_\iota = (\psi * \mu_\iota)_{x=0}$, quantités qui sont nulles puisque le co-spectre $\Lambda_\psi$ contient $\Lambda$, c.q.f.d.

On a ainsi toute une gamme d'intermédiaires entre $\mathcal{E}_c$ et $L_F$. On peut en particulier énoncer ceci:

THÉORÈME 18. *Si $\varphi$ et $\psi$ sont 2 fonctions continues à noyaux compacts, $\varphi \neq 0$, il existe toujours des combinaisons linéaires $\sum a_\nu\varphi(x - h_\nu)$ qui convergent uniformément vers $\psi$ sur tout l'axe réel et même vérifient uniformément*

$$\lim\, [(\sum a_\nu\varphi(x - h_\nu)) - \psi(x)]R(x) = 0$$

*(quand l'intégrale $\int^\infty dx/R(x)$ est divergente). Si $R(x)$ croît plus vite que toute exponentielle pour $x \to \infty$, une telle approximation, à partir de $\varphi$, n'est plus jamais possible pour toute fonction $\psi$.*

*Par contre, si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont 2 fonctions à noyaux compacts et dont les transformées de Fourier sont sans racine (complexe) commune, alors quelle que soit la fonction continue $\psi$ à noyau compact, il existe des combinaisons linéaires*

$$(\sum a_j\varphi_1(x - h_j) + \sum b_k\varphi_2(x - h_k))$$

*qui convergent uniformément vers $\psi$, en restant nulles en dehors d'un compact fixe.*

## CHAPITRE QUARTIEME

### §22. Extension à d'autres groupes.

Naturellement tous les résultats obtenus sont valables pour n'importe quel groupe isomorphe à $R$. C'est le cas du groupe des homothéties de rapport $> 0$

sur le demi-axe réel $> 0$ $]Ox[$ (sans l'origine). Une fonction continue sur $]Ox[$ permet, par les combinaisons linéaires de ses homothétiques, d'approcher toutes les fonctions continues; ou bien elle est moyenne-périodique pour les homothéties, et $\mathcal{T}f$ admet pour base l'ensemble des "puissances-logarithmes" $x^\alpha(\log x)^\beta$ ($\alpha$ complexe, $\beta$ entier $\geqq 0$) qu'elle contient. Les résultats que j'ai obtenus dans ma thèse sur les fonctions limites de polynômes dans le cas de non totalité du théorème de Muntz[76] peuvent s'interprèter d'une façon nouvelle: les fonctions limites sont moyenne-périodiques pour les homothéties. On peut aussi traiter d'une façon complète le cas oú intervient le produit du groupe $R$ par un groupe compact. Par exemple dans l'espace euclidien $E^n$ à $n$ dimensions, les fonctions moyenne-périodiques pour le groupe des similitudes *de centre donné* peuvent s'exprimer par des développements qu'on peut déterminer complètement.

Remplaçons le groupe additif $R$ des nombres réels par sa puissance $R^n$, $n$ entier $> 1$, qui est le groupe additif des vecteurs d'un espace à $n$ dimensions.

Voyons ce que donnerait une extension à $R^n$ des propriétés précédentes. $\mathcal{E}_c$ sera l'espace des fonctions continues $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Une exponentielle sera encore un caractère (non borné) $\exp(r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n)$, $r_1, r_2, \cdots, r_n$ étant des nombres complexes quelconques.

Il faudrait d'abord démontrer que: *toute variété invariante* $\neq (0)$ *de* $\mathcal{E}$ *contient au moins une exponentielle.*

Il faudra esuite considèrer les exponentielles-monômes:

$$\exp(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n)\, x_1^{j_1}x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}.$$

Une différence capitale s'introduit ici entre $n = 1$ et $n > 1$. *Pour* $n > 1$, *les exponentielles-monômes d'une variété invariante* $\neq \mathcal{E}$ *ne forment plus, en général, un système libre.*

Soit en effet $\mu$ une mesure à noyau compact. Sa transformée de Fourier $M(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est analytique entière de type exponentiel, bornée pour $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ réels. L'ensemble des zéros de $M(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ n'est plus discret, c'est une variété analytique à $n - 1$ dimensions. Tout point $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ de cette variété définit une exponentielle orthogonale à $\mu$: $\exp(2i\pi(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n))$. L'adhérence de l'espace vectoriel engendré par ces exponentielles est invariante et $\neq E$. Or ces exponentielles ne forment évidemment pas un système libre, chacune d'elles, définie par le point $(\lambda_1)_0, (\lambda_2)_0, \cdots, (\lambda_r)_0$ est limite de celles qui sont définies par $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ lorsque $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ convergent vers $(\lambda_1)_0, (\lambda_2)_0, \cdots, (\lambda_r)_0$.

Cette différence mise à part, on peut se demander si: *toute variété invariante est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les exponentielles-monômes qu'elle contient, donc caractérisée par son spectre,* (le spectre non nécessairement discret, étant convenablement défini).

Il m'est absolument impossible de dire si ces théorèmes sont exacts. La

[76] SCHWARTZ [1]

difficulté vient de ce qu'il faut passer des fonctions analytiques d'une variable aux fonctions analytiques de plusieurs variables, incomparablement plus compliquées!

J'ai obtenu, par des procédés un peu différents de ceux qui sont exposés ici, des résultats fragmentaires qui présent nt un intérêt certain mais ne permettent aucune conclusion générale. Je les publierai ultérieurement tels quels si je ne parviens pas à faire le théorie générale.

Passons maintenant à un groupe abélien $G$ quelconque et à l'espace $\mathcal{E}(G)$ des fonctions continues sur $G$, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Une exponentielle polynôme sera un élément moyenne-périodique d'ordre fini, engendrant une variété invariante ne contenant qu'un seul caractère. Il faudra alors voir si:

*toute variété invariante $\neq$ (0) contient au moins un caractère. Elle est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des éléments moyenne-périodique d'ordre fini qu'elle contient.*

Remarquons qu'un élement moyenne périodique d'ordre fini est une combinaison linéaire de coefficients d'une représentation linéaire de degré finì du groupe $G$.

Si en effet $f_1(x)$ est moyenne-périodique d'ordre $p$, et si $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)$ est une base de la variété $\mathcal{T}f_1$, on aura des formules

$$f_i(x-h) = \sum_j m_{ij}(-h) f_j(x) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \cdots p \\ j = 1, 2 \cdots p. \end{cases} \tag{75}$$

Si $M(h)$ est la matrice des $m_{ij}(h)$, on voit immédiatement que

$$M(h)M(k) = M(h+k),$$

les $m_{ij}(h)$ sont donc les coefficients d'une représentation de degré $p$ de $G$. Or, en faisant $x = 0$ dans (75) et en remplaçant $-h$ par $x$ on trouve:

$$f_1(x) = \sum_j f_j(0) m_{1j}(x)$$

ce qui prouve bien que $f_1$, est combinaison linéaire de coefficients d'une représentation de $G$.

Comme $G$ est abélien, dans toute variété invariante de dimension finie il existe une droite invariante, donc un caractére.[77]

### §23. Fonctions analytiques moyenne-périodiques.

Même pour $G = R^2$, nous ne savons pas répondre aux questions posées. Mais on peut y répondre complètment dans le sous-espace *fermé* de $\mathcal{E}(R^2)$ formé des fonctions $f(x, y)$ analytiques en $x + iy$. Nous désignerons ce sous-espace par $\mathcal{H}(R^2)$ oú simplement $\mathcal{H}$. Les exponentielles qui en font partie sont de la

[77] Conséquence du lemme de Schur. toute représentation d'un groupe abélien, de degré fini, est réductible, et laisse même une droite invariante.

forme exp $(r(x + iy))$, $r$ complexe, et elles engendrent bien $\mathcal{H}$. Nous allons maintenant étudier les variétés invariantes de $\mathcal{H}$, ce qui revient à étudier les fonctions moyenne-périodiques analytiques d'une variable complexe.

Soit $\mathcal{L}$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$. D'après le théorème de Hahn-Banach[78] elle peut être prolongée en une forme linéaire sur $\mathcal{E}(R^2)$. Il existe donc au moins une mesure $\mu(x, y)$ à noyau compact telle que, pour $f \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{L}(f) = \mu \cdot f = \int f(z) \, d\check{\mu}. \tag{76}$$

Mais il existe une infinité de telles mesures; deux d'entre elles diffèrent d'une mesure orthogonale à toutes les fonctions analytiques. Aussi est-il intéressant de pouvoir définir $\mathcal{L}$ autrement que par $\mu$.

On utilisera une "transformée de Fourier" de $\mathcal{L}$[79]

$$M(\lambda) = \mathcal{L}\,(\exp\,(2i\pi\lambda z)) = \int \exp\,(-2i\pi\lambda z)\, d\mu. \tag{77}$$

D'après sa définition même, elle est connue quand $\mathcal{L}$ est connue, quel que soit $\mu$; par ailleurs elle détermine $\mathcal{L}$, car si on connaît $M(\lambda)$, on connaît $\mathcal{L}(f)$ pour le système total des $f = \exp(2i\pi\lambda z)$, donc pour toutes les $f \in \mathcal{H}$.

$M(\lambda)$ est une fonction analytique entière de type exponentiel.[80] Réciproquement toute fonction entière de type exponentiel est la transformée de Fourier d'une forme linéaire continue $\mathcal{L}$. Car d'après un théorème connu de Borel, il existe une fonction $\varphi(z)$, et une seule, holomorphe pour $|z|$ assez grand et nulle à l'$\infty$, telle que l'on ait

$$M(\lambda) = \int_C \exp\,(-2i\pi\lambda z)\varphi(z)\, dz. \tag{78}$$

$C$ étant n'importe quelle courbe fermée parcourue dans le sens direct, entourant une fois l'origine, et assez éloignée pour être dans le domaine d'holomorphie de $\varphi$ au voisinage de l'$\infty$. On peut alors prendre $d\mu = \varphi(z)dz$ sur $C$.

On peut donc caractériser $\mathcal{L} \in \mathcal{H}'$ (dual de $\mathcal{H}$) soit par sa transformée de Fourier $M(\lambda)$, qui est n'importe quelle fonction analytique entière de type exponentiel, soit par l'unique fonction $\varphi(z)$ holomorphe pour $|z|$ assez grand et nulle à l'$\infty$, telle que

$$\mathcal{L}(f) = \int_C f(z)\varphi(z)\, dz.$$

On a les formules

$$M(\lambda) = \int_C \exp\,(-2i\pi\lambda z)\varphi(z)\, dz \tag{79}$$

[78] DIEUDONNÉ [1].

[79] Pour cette transformation, qui s'apparente à la transformation de Laplace et de Borel, voir Polyà [1] pages 578 et suivantes, Borel [1], chap. IV, Doetsch [1] chap. V.

[80] SCHWARTZ [2] §1, et §6.

$$(80) \qquad \varphi(z) = -\int_0^\infty \exp(+2i\pi\lambda z) M(\lambda)\, d\lambda$$

$$(81) \qquad M(\lambda) = \sum_n (a_n \lambda^n / n!)$$

$$(82) \qquad \varphi(z) = \sum_n ((-1)^n a_n / (2i\pi z)^{n+1}).$$

L'intégrale (80) est prise sur un chemin qui varie suivant les valeurs de $z$, de façon qu'elle soit absolument convergente. Si

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = 2\pi R,$$

$M(\lambda)$ est de type exponentiel $2\pi R$, et $\varphi(z)$ a le domaine d'holomorphie $|z| > R$ au voisinage de l'$\infty$. D'ailleurs

$$(83) \qquad a_n = \int_C (-2i\pi z)^n \varphi(z)\, dz = \mathcal{L}((2i\pi z)^n).$$

La suite des $a_n$, astreinte à le seule condition lim. sup $\sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, caractérise également $\mathcal{L} \in \mathcal{H}'$, et l'on a

$$(84) \qquad \mathcal{L}(f) = \sum \frac{a_n}{(2i\pi)^n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

On peut alors considèrer dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations *complexes*

$$T_h f = f(z - h)$$

et tout ce qui a été dit pour $\mathcal{E}(R)$ dans ce chapitre se transpose avec peu de changement dans $\mathcal{H}$; les exponentielles-monômes sont les fonctions analytiques

$$(2i\pi z)^{p-1} \exp(2i\pi\lambda z),\ p \text{ entier},\ \lambda \text{ complexe}.$$

La relation (14) s'écrit sans modification $\mu * f = 0$. On peut aussi utiliser $\mathcal{L} * f = 0$ en posant

$$(85) \qquad \mathcal{L} * f = \mathcal{L}_t(f(z + t)) = \sum \frac{a_n}{(2i\pi)^n} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

La formule (85) montre qu'une équation $\mathcal{L} * f = 0$ n'est autre qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre infini, en $f(z)$.

Lorsqu'on aura à "composer" 2 formes linéaires ou ce qui revient au même 2 mesures $\mu$ et $\nu$ qui les définissent,[81] on effectue une multiplication ordinaire sur les transformées de Fourier.

La définition du co-spectre de $\mathcal{L}$, ou $\mu$, ou $M(\lambda)$, du spectre de $f$, du spectre d'une variété invariante $V$ de $\mathcal{H}$ ou du co-spectre de l'orthogonale $V'$ dans $\mathcal{H}'$,

[81] Nous définirons la composition de 2 formes linéaires par la composition sur le groupe $R^2$ de mesures qui les définissent; la forme linéaire obtenue est indépendante des mesures choisies.

ne demande aucune modification. Il faut seulement remarquer que le co-spectre de $M(\lambda)$ offre plus de généralité que dans le cas de $\mathfrak{S}(R)$, car $M(\lambda)$ est de type exponentiel mais n'est plus astreinte à être bornée sur une droite. Aussi les zéros de $M(\lambda)$ ont-ils une densité supérieure finie (si $n(r)$ est le nombre des $\lambda$, de modules $\leqq r$, chacun compté autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité, $n(r)/r$ est borné pour $r \to \infty$) mais ils peuvent s'accumuler indifféremment dans toutes les directions.

Si en effet les $\lambda_\nu$ sont des nombres complexes de densité supérieure finie, la fonction $M(\lambda) = \prod (1 - \lambda^2/\lambda_\nu^2)$ les admet tous comme zéros, elle est entière de type exponentiel.

Le Théorème 7 se démontre sans difficulté, les $M_{\nu,l}(\lambda)$ ont la même définition, et permettent de calculer le développement formel d'une fonction moyenne-périodique $f$. Pour montrer la nature intrinsèque du développement formel, on utilisera exactement la même méthode. Il suffit de remarquer qu'il existe une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ qu'on peut désigner par $d/dz$, définie par

$$\frac{d}{dz}\cdot(f) = f'(0).$$

Sa transformée de Laplace est $2i\pi\lambda$, et la fonction $\varphi(z)$ associée est $-1/2i\pi z^2$.

Quelle que soit $f(z) \in \mathcal{H}$, on a d'ailleurs $f'(z) = d/dz * f$. Si $\mathfrak{L}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{H}'$, de transformée de Fourier $M(\lambda)$, la forme $d/dz * \mathfrak{L}$ a pour transformée de Fourier $2i\pi\lambda M(\lambda)$. Et en vertu de la commutativité du produit de composition, $((d/dz) * \mathfrak{L}) * f = \mathfrak{L} * f'(z)$. Par ailleurs la forme linéaire $\mathfrak{L}$ s'écrit: $\mathfrak{L} = \sum (a_n/n!)(d^n/dz^n)$, et si à $\mathfrak{L}$ correspond $\varphi(z)$, à $d/dx * \mathfrak{L}$ correspond la dérivée $\varphi'(z)$. Ce sont des formules analogues à celles des §11 et 12, et elles servent à démontrer que pour $f$ moyenne-périodique, on a la formule (39), qui est à la base de la démonstration de l'unicité du développement formel.

La démonstration du théorème fondamental 9 est ensuite identique à celle que nous avons faite; elle repose encore sur la considération de $-2i\pi z\mu = +2i\pi z\mathfrak{L}$ dont la transformée de Fourier est $M'(\lambda)$. On montre, comme au §15 que si $f$ a tous ses coefficients formels nuls, on a, quel que soit le polynome $P(z)$,

$$P(z)\mu * f = 0$$

ou en considérant la fonction $\varphi(z)$ associée à la mesure $\mu$

$$\int_\Gamma f(z - \zeta)P(\zeta)\varphi(\zeta)\, d\zeta \equiv 0$$

quels que soient $z$ et $P(\zeta)$. Prenons une valeur fixe de $z$ et supposons $f(z) \neq 0$. Pour $P(\zeta) = \zeta^n$, on trouve que le coefficient de $1/\zeta^{n+1}$ du développement de Laurent de la fonction analytique $\varphi(\zeta)f(z - \zeta)$ (au voisinage du point essentiel $\zeta = \infty$) est nul. Cela prouve que, quel que soit $z$, la fonction de $\zeta$: $\varphi(\zeta)f(z - \zeta)$ est entière; $\varphi(\zeta)$ est alors une fonction méromorphe, quotient de 2 fonctions entières $\varphi(\zeta)f(z - \zeta)/f(z - \zeta)$, et ses seuls pôles sont les $z - \alpha$, les $\alpha$ étant les zéros de $f$; ces pôles devant être fixes quand $z$ varie, n'existent pas, donc $\varphi(\zeta)$

est une fonction entière; comme elle est holomorphe et nulle à l'$\infty$, $\varphi \equiv 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous en déduisons bien que $f \neq 0$ ne saurait avoir tous ses coefficients nuls. (Les égalités (55) et suivantes subsistent; ce qu'il faut montrer ici c'est que la série (55) converge uniformément sur tout compact, la somme de la série des modules restant majorée quel que soit $z$ par une fonction $\geqq 0$ de type exponentiel, $\exp A \mid z \mid$).

*Par contre sur la convergence du développement formel, il n'est pas sûr qu'on puisse dire quoi que ce soit d'analogue au Théoreme* 11.

On peut donc seulement dire que:

*toute fonction moyenne-périodique est limite de combinaisons linéaires des exponentielles-monômes de $\mathcal{S}f$; toute variété invariante de $\mathcal{H}$ a pour base l'ensemble des exponentielle-monômes qu'elle contient;*

*toute solution d'une équation différentielle d'ordre infini linéaire à coefficients constants, définie par* (85), *est limite de combinaisons des exponentielles-monômes qui sont solutions de l'équation différentielle.* C'est là un résultat déjà trouvé par M. M. Ritt et Valiron, ainsi que plusieurs autres de ce chapitre.

*Tous les théorèmes corrélatifs du* §20 *sont également valables.* On peut comme au §21 introduire dans $\mathcal{H}'$ des topologies fortes oú la décomposition des idéaux en facteurs premiers reste valable. D'oú une série d'études intéressantes d'algèbre sur le produit de composition de Hurwitz, etc.

Si $f(x)$ est une fonction complexe de la variable réelle $x$, prolongeable en une fonction entière $f(z)$, la moyenne-périodicité sur l'axe réel entraîne *a fortiori* la moyenne-périodicité dans le plan complexe. En effet si $f$ est moyenne-périodique dans $\mathcal{E}_c$, il existe une mesure $\mu \neq 0$ sur l'axe réel telle que la fonction $f * \mu$ soit nulle pour les valeurs réelles de la variable; alors elle est aussi nulle pour les valeurs complexes car elle est analytique, donc $f$ est moyenne-périodique dans $\mathcal{H}$. Le spectre (dans $\mathcal{E}_c$ comme dans $\mathcal{H}$) est contenu dans le co-spectre de $\mu$; les coefficients du développement sont calculés dans les 2 cas de la même manière à partir des $\mu_{k,j}$, donc le spectre de $f$ et son développement sont identiques dans $\mathcal{E}_c$ et dans $\mathcal{H}$. On peut alors démontrer que ce développement converge uniformément sur tout compact du plan complexe vers $f$ par le procédé de sommation des groupements de termes (sans facteurs de convergence).

Par contre $f$ peut être moyenne-périodique dans $\mathcal{H}$ sans l'être dans $\mathcal{E}_c$. Ainsi si $f$ est moyenne-périodique dans $\mathcal{H}$ et si son spectre $\Lambda_f$ dans $\mathcal{H}$ comprend des éléments s'accumulant indéférement dans toutes les directions avec une densité ($\lim n/ \mid \lambda_n \mid$) finie $\neq 0$, elle ne peut pas être moyenne-périodique dans $\mathcal{E}_c$, sans quoi $\Lambda_f$ serait aussi son spectre dans $\mathcal{E}_c$, ce qui est impossible. Voyons les choses autrement. $f$ est moyenne-périodique dans $\mathcal{H}$, et supposons que les $\lambda_\nu$ du spectre rendent la somme $\sum_{\lambda_\nu \neq 0} p_\nu / \mid \lambda_\nu \mid$ infinie. Les $\lambda_\nu$ peuvent s'accumuler dans toutes les directions de droites (nous disons toujours que les $\lambda_\nu$ s'accumulent dans une direction si ceux qui sont intérieurs à un angle quelconque entourant cette direction rendent la somme $\sum p_\nu / \mid \lambda_\nu \mid$ infinie).

Si les $\lambda_\nu$ s'accumulent dans plus d'une direction, $f$ n'est moyenne-périodique sur aucune droite du plan complexe. S'ils ne s'accumulent que dans une direction, sur toute droite non parallèle à la direction symétrique par rapport à l'axe réel, $f$ n'est pas moyenne-périodique. En somme, $f$, moyenne-périodique dans $\mathcal{H}$, ne peut l'être sur toute droite du plan complexe que si la série $\sum p_\nu / |\lambda_\nu|$ est convergente.

Lorsque $f$ est moyenne-périodique dans $\mathcal{H}$, la recherche des compacts sur lesquels elle n'est pas moyenne-périodique (c'est-à-dire des compacts sur lesquels le système des $f(z - h)$, $h$ complexe quelconque, est total parmi les fonctions analytiques) n'est autre que la recherche des compacts sur lesquels le système des exponentielles monômes de $\mathcal{S}_f$ est total.[82]

Remarquons que l'existence de fonctions analytiques non moyenne-périodiques n'est pas triviale. On peut donner comme exemple exp. $(z^2)$.[83] La fonction (23), si les $\lambda_n$ sont réels, de densité infinie, et si les $c_n$ décroissent assez vite pour que $f$ soit analytique entière, n'est pas moyenne-périodique dans $\mathcal{H}$. Car les combinaisons linéaires des translatées de $f$ permettent d'approcher uniformément, non seulement sur tout compact, mais dans toute bande parallèle à l'axe réel, les exponentielles exp. $(2i\pi\lambda_n z)$, qui forment dans $\mathcal{H}$ un système total. D'ailleurs toutes les formules du §18 ont des généralisations aux fonctions moyenne-périodiques de $\mathcal{H}$; elles donnent des moyens faciles de reconnaître qu'une fonction n'est pas moyenne périodique. Ce sont, au fond, ces formules qui sont à la base des recherches de M. Mandelbrojt[84] et des miennes sur la théorie des séries de Dirichlet lacunaires.

Pour terminer, disons que dans $\mathcal{H}$, *$\mathcal{S}f$ n'est autre que l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les dérivées $f^{(n)}$ de $f$.* Car d'une part, quel que soit $n$, $f^{(n)} \in \mathcal{S}f$; d'autre part la formule de Taylor

$$f(z - h) = \sum (-1)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z)$$

prouve que $\mathcal{S}f$ est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les $f^{(n)}$.

Une variété invariante n'est autre qu'une variété fermée invariante par dérivation.

Naturellement il n'en est pas de même dans $\mathcal{E}_r$ ou $E$. Ainsi si $f$ est à noyau compact, toutes ses dérivées ont leur noyau contenu dan un même compact et ne permettent pas de couvrir tout l'axe réel, comme les translatées.

Cette définition de $\mathcal{S}f$ dans $\mathcal{H}$ permettrait d'étudier les fonctions analytiques moyenne-périodiques sur un ouvert $\Omega$ du plan complexe, pour la convergence uniforme sur tout compact de $\Omega$: $f$ sera moyene-périodique si le système des $f^{(n)}(z)$ n'est pas total. Néanmoins la généralisation de la théori faite dans $\mathcal{H}$ présente des difficultés. J'y reviendrai ultérieurement.

---

[82] SCHWARTZ [2], §6.

[83] Voir §8.

[84] MANDELBROJT [1], [2].

**§24. Fonctions harmoniques moyenne-périodiques de 2 variables.**

Nous n'en dirons qu'un mot. Si $U(x, y)$ est une fonction harmonique de 2 variables on a

$$U(x,y) = f(x + iy) + g(x - iy). \quad \text{Posons} \begin{cases} x + iy = z \\ x - iy = \bar{z}. \end{cases}$$

Dans $\mathcal{T}U$, se trouvent $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial y$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{df}{dz} + \frac{dg}{d\bar{z}}$$

$$\frac{\partial U}{i\,\partial y} = \frac{\partial f}{i\,\partial y} + \frac{\partial g}{i\,\partial y} = \frac{df}{dz} - \frac{dg}{d\bar{z}}.$$

Donc $\mathcal{T}U$ contient $df/dz$ et $dg/d\bar{z}$.

La théorie des fonctions harmoniques moyenne-périodiques de 2 variables se ramène à la théorie des fonctions analytiques moyenne-périodiques d'une variable complexe.

University de Nancy.

Index Bibliographique

Banach—[1] *Théorie des opérations linéaires*. Monografje matematyczne. Varsovie, 1932.

Beurling—[1] *Un théorème sur les fonctions uniformément bornées et continues sur l'axe réel*. Acta Mathematica v. 77, pp. 127–136 (1945).

Bochner—[1] *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig, Akad. Verlagsgesell., 1932.

Bochner and von Neumann—[1] *Almost periodic functions in groups*. Amer. Math. Soc., Trans., v. 37, pp. 21–51, (1935).

Borel—[1] *Leçons sur les séries divergentes*. Paris, Gauthier, 1928.

Bourbaki—[1] *Topologie générale*. Chap. I et II, Paris, Hermann, 1940.

Carleman—[1] *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*. Uppsala, Almqvist, 1944.

Cartan, H.—[1] *Sur les fondements de la théorie du potentiel*. Soc. Math. de France, Bull., t. 69, pp. 71–96 (1941).

Delsarte—[1] *Les fonctions moyenne-périodiques*. Journal de Math. pures et appliquées, sér. 9, t. 14, pp. 403–453 (1935).

Dieudonné—[1] *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*. Paris, École Normale Supérieure, Annales, (3), t. 59, pp. 107–139 (1942).

Doetsch—[1] *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*. Berlin, Springer, 1937.

Gelfand—[1] *Normierte Ringe*. Recueil de mathématiques, Moscou, t. 51, (n.s., t. 9), pp. 1–23 (1941).

Godement—[1] *Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens de N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling*. Académie des Sciences, Paris, Comptes rendus, t. 223, pp. 16–18 (1946).

Kaczmarz und Steinhaus—[1] *Théorie der Orthogonalreihen*. Monografje Matematyczne, Varsovie, Lwow, 1935.

Mandelbrojt—[1] *Séries lacunaires*. Paris, 1936. (Actualites scient., no. 305).

[2] *Dirichlet Series*. Rice Institute Pamphlets, v. 31, no. 4, (1944).

Paley and Wiener—[1] *Fourier transforms in the complex domain*. Amer Math. Soc., Colloquium publications, v. 19 New York, 1934.

POLYA—[1] *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* Math. Zeits., v. 29, pp. 549–640 (1929).

SCHWARTZ—[1] *Étude des sommes d'exponentielles réelles.* Paris, Hermann, 1943. (Actualités scient., 959).

[2] *Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires.* Toulouse Univ., Annales de la Faculté des Sciences, Sér. 4, v. 6, pp. 111–174 (1942).

[3] *Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues.* Soc. Math. de France, Bulletin, t. 72, pp. 141–145 (1944).

[4] *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques.* Grenoble, Univ., Annales de la Faculté des Sci., t. 21, pp. 57–74 (1946).

[5] *Sur les fonctions moyenne-périodiques.* Académie des Sciences, Paris, Comptes Rendus, t. 223, pp. 68–70, (1946).

STONE—[1] *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis.* Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, v. 15, New York, 1932.

TITCHMARSH—[1] Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford, 1937.

VALIRON—[1] *Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants.* Paris, École normale sup., Ann., (3) t. 46, pp. 25–53 (1929).

WEIL—[1] *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Paris, Hermann, 1940. (Actualités Scient. 869).

WIENER—[1] *Tauberian theorems.* Annals of Math. v. 33, pp. 1–100 (1932).

[2] *The Fourier integral.* Cambridge, 1933, Chapter II.