Laurent Schwartz

Théorie des distributions et transformation de Fourier

Analyse Harmonique, Colloques Internationaux du C.N.R.S., vol. 15,
Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1949, p. 1-8.

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS ET TRANSFORMATION DE FOURIER;

PAR LAURENT SCHWARTZ.

1. **Préliminaires.** — Ces préliminaires sont un résumé d'un article intitulé : *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques* (*Annales de l'Université de Grenoble*, 1946).

1° $(\mathcal{D})$ sera l'espace des fonctions (complexes) φ de n variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indéfiniment dérivables et nulles en dehors d'ensembles compacts. On dira que des fonctions $\varphi_j \subset (\mathcal{D})$ convergent vers zéro si elles sont nulles en dehors d'un ensemble compact fixe et si elles convergent uniformément vers zéro ainsi que chacune de leurs dérivées.

2° Une distribution T est une forme linéaire $T(\varphi)$ définie pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$ et *continue* : si des φ_j convergent vers zéro dans $(\mathcal{D})$, les $T(\varphi_j)$ doivent converger vers zéro.

Nous appellerons $(\mathcal{D}')$ l'espace des distributions. On introduit dans $(\mathcal{D}')$ une notion de convergence : des distributions T_j seront dites converger vers zéro si $T_j(\varphi)$ converge vers 0, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, et uniformément par rapport à tout ensemble de fonctions φ nulles en dehors d'un compact fixe et bornées ainsi que chacune de leurs dérivées.

Rappelons qu'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie presque partout et sommable sur tout compact, peut être considérée comme une distribution particulière, car elle définit la forme linéaire

$$f(\varphi) = \iint \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n.$$

3° Nous avons défini la dérivée partielle d'une distribution par la formule

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right).$$

Toute distribution (donc toute fonction telle que f) apparaît dans cette théorie comme indéfiniment dérivable (et l'on peut intervertir l'ordre des dérivations partielles). Nous avons donné la méthode de calcul des dérivées usuelles. Rappelons que la fonction $Y(x)$, égale à zéro pour $x < 0$, à 1 pour $x > 0$, a pour dérivée la mesure de Dirac δ (masse $+1$ placée à l'origine), et que les dérivées successives de δ sont définies par

$$\delta^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

La dérivation est une opération linéaire continue : si des T_j convergent vers zéro dans $(\mathcal{D}')$, les $\frac{\partial T_j}{\partial x^k}$ convergent aussi vers zéro.

Toute distribution est égale, dans un ouvert d'adhérence compacte (mais non dans l'espace entier) à une dérivée d'ordre fini d'une fonction continue (non nécessairement dérivable au sens usuel).

2. **Distributions sphériques.** — Il n'est pas possible de définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque. Il faut changer les notions utilisées.

Soit $(\mathcal{S})$ l'ensemble des fonctions $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, indéfiniment dérivables, tendant vers zéro à l'infini plus vite que toute puissance de $\frac{1}{r}$ $(r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2)$, ainsi que chacune de leurs dérivées. Toute fonction $\varphi \in (\mathcal{D})$ appartient à $(\mathcal{S})$. Nous dirons que des $\theta_j \in (\mathcal{S})$ convergent vers zéro dans $(\mathcal{S})$ si toute dérivée des θ_j, après multiplication par tout polynome, converge uniformément vers zéro. Des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergeant vers zéro dans $(\mathcal{D})$, convergent aussi vers zéro dans $(\mathcal{S})$.

Les formes linéaires $T(\theta)$ définies pour $\theta \in (\mathcal{S})$ et continues [si θ_j converge vers zéro dans $(\mathcal{S})$, $T(\theta_j)$ doit tendre vers zéro], forment un espace $(\mathcal{S}')$ de distributions, qui est une partie de $(\mathcal{D}')$. Pour qu'une distribution T de l'espace $(\mathcal{D}')$ soit une distribution de l'espace $(\mathcal{S}')$, il faut et il suffit que $T(\varphi_j)$ converge vers zéro, non seulement lorsque $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ converge vers zéro dans la topologie de $(\mathcal{D})$, mais même lorsque φ_j converge vers zéro dans la topologie de $(\mathcal{S})$.

L'espace $(\mathcal{S}')$ sera le domaine naturel de la transformation de Fourier et de l'analyse harmonique. Une distribution T appartenant à $(\mathcal{S}')$ sera appelée une *distribution sphérique*.

Voici pourquoi. Les espaces $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont définissables non seulement sur l'espace R^n dont chaque point a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais sur toute variété indéfiniment différentiable (il faut seulement remarquer que l'on ne peut pas alors, en général, parler de dérivées partielles, sauf si une définition de la dérivation est spécialement donnée; on ne peut pas non plus assimiler une fonction à une distribution si une mesure des volumes n'est pas fixée).

Considérons alors l'espace R^n utilisé; adjoignons-lui un point à l'∞, nous obtenons un espace homéomorphe à la sphère S^n et admettant une structure indéfiniment différentiable évidente (définis au voisinage du point à l'∞ par une inversion).

Pour qu'une distribution T de $(\mathcal{D}')$, distribution sur R^n, appartienne à $(\mathcal{S}')$, *il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable en une distribution sur la sphère* S^n.

Toute distribution T de $(\mathcal{S}')$ est, dans tout l'espace, une dérivée d'ordre fini du produit d'un polynome par une fonction continue bornée (non nécessairement dérivable au sens usuel); et réciproquement.

3. Transformation de Fourier dans $(\mathcal{S})$ et dans $(\mathcal{S}')$. — Soit a une fonction $\in (\mathcal{S})$; sa transformée de Fourier

$$\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int \cdots \int a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \exp[-2i\pi(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)]\, dx_1 \ldots dx_n,$$

est une fonction des n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, qui, dans l'espace à n dimensions défini par ces variables, appartient aussi à $(\mathcal{S})$, comme on le voit immédiatement. On a la formule de réciprocité

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int \cdots \int \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n) \times \exp[+2i\pi(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)]\, dy_1 \ldots dy_n.$$

La première formule définit la transformation de Fourier F, la deuxième la transformation $\overline{\mathrm{F}}$, elles sont réciproques l'une de l'autre. On a la formule de Parseval : si

$$\mathrm{F}(a) = \alpha, \qquad \mathrm{F}(b) = \beta,$$

$$\iint \cdots \int a(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\overline{b}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2, \ldots, dx_n$$
$$= \iint \cdots \int \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,\overline{\beta}(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dy_1\,dy_2, \ldots, dy_n.$$

Soit alors maintenant U une distribution sphérique quelconque $(\in (\mathcal{S}'))$. La formule de Parseval $\mathrm{U}(\overline{a}) = \mathrm{V}(\overline{\alpha})$ pour toute fonction $a \in (\mathcal{S})$, avec $\alpha = \mathrm{F}(a)$, définit une nouvelle distribution $\mathrm{V} \in (\mathcal{S}')$, que nous appellerons transformée de Fourier de U : $\mathrm{V} = \mathrm{F}(\mathrm{U})$.

Si U est une fonction (sommable ou de carré sommable par exemple), V est bien sa fonction transformée de Fourier usuelle. Dans bien des cas usuels où U est une fonction, et où par un procédé plus ou moins spécial on parvient à en définir une transformée de Fourier, elle est bien donnée par le procédé ci-dessus $\mathrm{V} = \mathrm{F}(\mathrm{U})$. Dans d'autres cas, au contraire, $\mathrm{V} = \mathrm{F}(\mathrm{U})$ est une distribution présentant des couches multiples assez compliquées.

F *définit un isomorphisme de* $(\mathcal{S}')$ *sur lui-même;* F *et* $\overline{\mathrm{F}}$ *sont deux isomorphismes réciproques.*

Le calcul de la transformée de Fourier peut se faire par les procédés de sommation usuels.

4. Propriétés de la transformation de Fourier. — Dans $(\mathcal{S}')$, on peut définir une multiplication UV et un produit de composition (Faltung) $\mathrm{U} \star \mathrm{V}$ (qui n'existent que moyennant des hypothèses convenables sur U et sur V). La transformation de Fourier transforme le produit de multiplication en produit de composition et inversement.

$$\mathrm{F}(\mathrm{UV}) \quad = \mathrm{F}(\mathrm{U}) \star \mathrm{F}(\mathrm{V}),$$
$$\mathrm{F}(\mathrm{U\,V}) \star = \mathrm{F}(\mathrm{U})\,\mathrm{F}(\mathrm{V}).$$

Ces formules étendant aux distributions des formules bien connues, ont de nombreuses applications.

En particulier si nous appelons $\frac{\partial}{\partial x^k}$ la distribution $\frac{\partial \delta}{\partial x_k}$ dérivée partielle d'une mesure de Dirac

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = 2 i \pi y_k,$$

d'où si $V = F(U)$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \star U\right) = 2i\pi y_k V,$$

formule classique dans le cas des fonctions.

5. Transformation de Fourier des formes différentielles. — Les notations précédentes pour la transformation de Fourier ne sont exactes que dans un espace R^n dont chaque point est donné par ses coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$; il existe alors dans R^n une notion de volume, définie par $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Mais supposons seulement donné un espace vectoriel X^n de dimension n, sans base, et un autre espace vectoriel Y^n en dualité avec le premier; il existe alors une forme bilinéaire, un *produit scalaire* qui définit la dualité; pour $x \in X^n$, $y \in Y^n$ nous appellerons x, y ce produit scalaire [avec deux bases duales, il s'exprimerait par $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)$].

X^n et Y^n considérés comme groupes topologiques sont en dualité, et l'exponentielle complexe qui définit la dualité sera par définition $\exp(+2i\pi x, y)$. Il n'y a pas dans X^n ou dans Y^n de mesure des volumes privilégiée; on sait seulement à toute mesure des volumes sur X^n, associer par dualité une mesure des volumes sur Y^n.

On voit alors sans peine que la transformée de Fourier d'une distribution-forme différentielle de degré p, sphérique sur X^n, est une distribution-forme différentielle de degré $n - p$, sphérique sur Y^n.

La théorie de la dérivation et de l'intégration des formes différentielles prend alors, par transformation de Fourier, une expression multiplicative beaucoup plus simple.

6. Transformation de Laplace. — On peut définir la transformée de Laplace d'une distribution T, sphérique sur R^n, contenue dans une fraction d'espace

$$x_1 \geqq a_1, \qquad x_2 \geqq a_2, \qquad \ldots, \qquad x_n \geqq a_n.$$

C'est une fonction holomorphe des variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$, dans une région complexe.

La transformation de Laplace ainsi étendue a toutes les propriétés classiques utilisées dans le calcul symbolique; l'image du produit de composition (qui ici existe toujours) est un produit de multiplication. De nombreuses difficultés du calcul symbolique, dues aux discontinuités, disparaissent ici complètement et trouvent leur explication.

7. **Applications : distributions de type positif.** — Une distribution $T \in (\mathcal{D}')$ est de *type positif* si, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$ de type positif, $T(\varphi) \geqq 0$; ou encore, si, quelle que soit

$$\varphi \in (\mathcal{D}), \qquad T(\varphi \star \tilde{\varphi}) \geqq 0,$$
$$(\tilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{\varphi}(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)).$$

On peut généraliser le théorème bien connu de M. Bochner sur les fonctions continues de type positif :

Théorème. — *Pour qu'une distribution* $T \in (\mathcal{D}')$ *soit de type positif, il faut et il suffit qu'elle soit sphérique* $(T \in (\mathcal{S}'))$ *et que sa transformée de Fourier soit une mesure positive* μ.

Naturellement $\iint \cdots \int d\mu = +\infty$ sauf si T est une fonction continue de type positif. On peut voir aussi qu'une distribution de type positif est la dérivée $(1 - \Delta)^k$ d'une fonction continue de type positif et réciproquement (Δ = laplacien, k entier $\geqq 0$).

On peut en déduire diverses applications pratiques. Ainsi, si

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

la transformée de Fourier de $\frac{1}{r^\alpha}$ $(0 < \alpha < n)$ est $\frac{K_\alpha}{r^{n-\alpha}}$, $K_\alpha > 0$ (transformée de Fourier qui n'a pas de sens suivant la conception usuelle). Donc $\frac{1}{r^\alpha}$ est de type positif (propriété bien connue et utilisée par M. Riesz dans la théorie du potentiel). Mais, dans la théorie des distributions, nous pouvons faire la transformation de Fourier pour α quelconque ($\leqq 0$ ou $\geqq n$). On trouve alors que $\frac{1}{r^\alpha}$ est de type positif ou de type négatif (avec quelques restrictions) suivant les valeurs de α.

8. Applications à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre quelconque à coefficients constants. — La transformation de Fourier permet l'étude des distributions, solutions de telles équations (E). On utilise avec fruit une généralisation d'un théorème bien connu de Paley-Wiener :

THÉORÈME. — *Pour qu'une distribution soit la transformée de Fourier d'une distribution portée par un ensemble borné, il faut et il suffit qu'elle soit une fonction analytique entière de type exponentiel, à croissance polynomiale dans le domaine réel.*

Soit D un symbole composé de dérivation, à coefficients constants (par exemple le laplacien Δ ou une puissance Δ^k du laplacien). Une équation aux dérivées partielles (E), linéaire, à coefficients constants, est de la forme $DT = 0$ ou encors $D \star T = 0$ (en écrivant D au lieu de $D\delta$ dans cette formule de composition).

Par transformation de Fourier, on obtient une équation de type multiplicatif $F(D)F(T) = 0$, $F(D)$ étant un polynome ordinaire; cela suppose T sphérique.

1° On peut ainsi faire une étude des distributions sphériques solutions de E, et obtenir leur forme générale, au moins dans une certaine mesure. Naturellement parmi les solutions sphériques figurent les solutions-fonctions bornées, les solutions polynomes, etc. L'équation de Laplace itérée par exemple $\Delta^k \star T = 0$, n'a pas d'autres solutions sphériques que des polynomes. Certaines équations (par exemple $\Delta U - U = 0$) n'ont pas de solutions sphériques $\neq 0$; au contraire l'équation $\Delta U + U = 0$ a une infinité de solutions sphériques qui sont toutes des fonctions analytiques. On peut trouver toutes les équations (E) dont toutes les solutions sont analytiques.

2° Une distribution $T \neq 0$, portée par un ensemble compact, n'est jamais solution d'une équation (E). On en déduit des théorèmes d'unicité.

3° On peut ensuite résoudre les équations avec second membre

$$D \star T = A \qquad (A \text{ distribution donnée}).$$

La transformation de Fourier donne une méthode générale de résolution, au moins localement (et globalement si A est portée par un compact). Cette résolution amène à étendre la décomposition de Riesz des fonctions surharmoniques en somme d'un potentiel de mesure $\geqq 0$ et d'une fonction harmonique, à d'autres inéquations aux dérivées partielles du type $DT \geqq 0$.

4° Cette théorie peut s'étendre à certaines équations intégrales et intégro-différentielles (théorie des fonctions ou distributions moyenne-périodiques).

Conclusion. — Je crois que la théorie de la transformation de Fourier des distributions sphériques est ainsi cohérente; elle fait rentrer dans un seul moule tous les procédés utilisés jusqu'à présent pour l'étude de la transformation de Fourier.

Une distribution *non sphérique* ne peut-elle pas avoir une transformée de Fourier? On peut faire une théorie (que je publierai ultérieurement) qui attribue une transformée de Fourier à toute distribution; mais on obtient alors d'autres êtres mathématiques et non plus des distributions; leur étude est plus délicate et, quoique intéressante, d'une abstraction qui les rend beaucoup moins utilisables.