Laurent Schwartz

Sur les fonctions moyenne-périodiques

C. R. Acad. Sci. Paris, 223 (1946), p. 68-70.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions moyenne-périodiques.*

Note de M. LAURENT SCHWARTZ.

Définitions. — $(\mathcal{E})$ sera un espace vectoriel topologique de fonctions complexes $f(x)$ de la variable réelle x. Soit $T_h f = f(x-h)$ (h réel); nous supposerons que toutes les transformations T_h sont des automorphismes de $(\mathcal{E})$. Nous appellerons $(\mathcal{T}f)$ l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par tous les $T_h f$ (h réel). Si $(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel quelconque de $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{T}\mathcal{F})$ sera l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par tous les $T_h f$ ($f \in \mathcal{F}$, h réel); $(\mathcal{T}\mathcal{F})$ est le sous-espace vectoriel fermé le plus général de $(\mathcal{E})$ qui soit invariant par tous les automorphismes T_h.

f ou $(\mathcal{F})$ sera dit *moyenne-périodique* si $(\mathcal{T}f)$ ou $(\mathcal{T}\mathcal{F})$ est distinct de l'espace entier $(\mathcal{E})$ [1].

Nous particulariserons $(\mathcal{E})$ de deux façons différentes :

$(\mathcal{E}_1)$, espace de toutes les fonctions continues $f(x)$; on dira que des f_i convergent vers f si elles convergent uniformément sur tout intervalle fini vers f;

$(\mathcal{E}_2)$ espace des fonctions continues $f(x)$ nulles en dehors d'intervalles finis (non précisés); on dira que des f_i convergent vers f si elles convergent uniformément vers f et sont toutes nulles en dehors d'un même intervalle fini (non précisé) [2].

Moyenne-périodicité dans $(\mathcal{E}_1)$. — $(\mathcal{T}f)$ peut être l'espace entier; on montre qu'il en est ainsi si f est de carré sommable.

$(\mathcal{T}f)$ peut aussi être de dimension un; alors $f(x) = e^{rx}$, r nombre complexe quelconque.

Plus généralement $f(x) = x^p e^{rx}$ (p entier, r complexe quelconque) est moyenne-périodique; $(\mathcal{T}f)$ est le sous-espace de dimension $p+1$ de $(\mathcal{E}_1)$ formé des fonctions $P(x)\,e^{rx}$ [$P(x)$ polynome quelconque de degré p].

---

(1) La notion de fonction moyenne-périodique est due à M. Delsarte, *Les fonctions moyenne-périodiques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquees*, **14**, IV, 1935, pp. 403-453.

La définition de M. Delsarte est différente de la nôtre; on montre qu'elle est équivalente à celle des fonctions moyenne-périodiques dans $(\mathcal{E}_1)$, donnée dans la presente Note.

(2) L'étude des fonctions moyenne-périodiques a déjà été faite dans les espaces fonctionnels (L^2), (L^1), (L^∞). Voir N. WIENER, *Annals of Mathematics*, **33**, 1932, pp. 1-100; A. BEURLING, *Acta Mathematica*, **77**, 1945, pp. 127-136.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque moyenne-périodique, non identiquement nulle.

On démontre les propriétés suivantes :

1° $(\mathcal{T}f)$ contient au moins une exponentielle e^{rx}.

Cherchons toutes les fonctions de $(\mathcal{T}f)$ de la forme $x^i e^{r_k x}$.

Les r_k forment une suite discrète, finie ou tendant vers ∞, et pour chaque r_k, $i \leq p_k$ entier fini. Le *spectre* (S) des r_k, chacun compté avec son ordre de multiplicité p_k, n'est pas quelconque, il a certaines propriétés caractéristiques.

2° Les $x^i e^{r_k x} \in (\mathcal{T}f)$ forment une *base* de $(\mathcal{T}f)$. Toute fonction $g \in (\mathcal{T}f)$ (et en particulier f elle-même) est limite de combinaisons linéaires finies de ces $x^i e^{r_k x}$ et admet même un développement formel

$$g(x) = \sum_k \left(\sum_{i \leq p_k} C_{i,k} x^i e^{r_k x} \right),$$

dont on peut, par des formules appropriées, calculer les coefficients $C_{i,k}$.

3° Chacun de ces développements formels en série d'exponentielles est convergent par un procédé de sommation indiqué dans un précédent Mémoire : groupements de termes et facteurs exponentiels d'Abel [3].

Chaque sous-espace vectoriel $(\mathcal{T}\mathcal{F})$ possède des propriétés identiques à celles des $(\mathcal{T}f)$; on montre en effet qu'il existe toujours une infinité de fonctions $f \in (\mathcal{F})$ telles que $(\mathcal{T}f)$ coïncide avec $(\mathcal{T}\mathcal{F})$.

Moyenne-périodicité dans $\mathcal{E}_2$. — Toute fonction f de $(\mathcal{E}_2)$ est moyenne-périodique. On démontre que tout sous-espace $(\mathcal{T}\mathcal{F})$, distinct de l'origine et de l'espace entier, est formé de toutes les fonctions f dont la transformée de Fourier F a au moins un ensemble de zéros (complexes) donnés r_k, chacun avec un ordre de multiplicité minimum p_k. On peut représenter symboliquement $(\mathcal{T}\mathcal{F})$ par une *décomposition en facteurs premiers* [4],

$$(\mathcal{T}\mathcal{F}) \sim \prod_k \{r_k\}^{p_k},$$

$(\mathcal{E}_2)$ a d'ailleurs une structure d'anneau, si l'on appelle *multiplication* l'opération de composition [5] (*Faltung*),

$$c(x) = a(x) \times b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x-t)\, b(t)\, dt.$$

---

(3) Schwartz, *Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1943, pp. 111-175).

(4) Pour $(\mathcal{T}\mathcal{F}) \equiv (\mathcal{E}_2)$, l'ensemble des r_k est vide. En général, il y a une infinité de facteurs premiers. L'ensemble des r_k, p_k a exactement les mêmes propriétés que l'ensemble des éléments d'un spectre (S), dont la définition est donnée au paragraphe précédent.

(5) Voir André Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, 1940.

$(\mathcal{C}\mathcal{F})$ est alors l'idéal fermé le plus général; $(\mathcal{C}f)$ est l'idéal fermé engendré par f; la décomposition en facteurs premiers est une authentique décomposition en un produit de puissances d'idéaux premiers. La théorie de la divisibilité, du P. G. C. D., du P. P. C. M. du produit P se fait sans difficulté et donne lieu à des propriétés fonctionnelles remarquables : ainsi pour que deux fonctions f, g permettent, par les combinaisons linéaires finies de leurs translatées, d'approcher toute fonction de $(\mathcal{E}_2)$, il faut et il suffit que leurs transformées de Fourier soient sans zéro commun. Chaque idéal fermé a, au plus, 2 éléments générateurs.

On remarque que les propriétés de $(\mathcal{E}_1)$ et de $(\mathcal{E}_2)$ sont liées par une dualité. Les résultats précédents subsistent vraisemblablement, avec certaines modifications appropriées, pour des fonctions de plusieurs variables et des transformations plus générales que les translations T_h. Mais la théorie est bien plus difficile et je n'ai que des résultats très incomplets.

(**Extrait des** ***Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences.*** **t. 223, pp. 68-70, seance du 8 juillet 1946.**)

Dépôt légal d'éditeur. — 1946. — N° d'ordre 64
Dépôt legal d'imprimeur. — 1946. — N° d'ordre 144.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
124382-46 Paris — Quai des Grands-Augustins, 55