LAURENT SCHWARTZ

Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités

C. R. Acad. Sci. Paris, 212 (1941), p. 418-421.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

CORRESPONDANCE.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités.* Note de M. **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Montel.

Désignons par x une variable aléatoire réelle; par $F(X)$ sa fonction de répartition [$F(X)$ est la probabilité de l'événement $x < X$], fonction non décroissante, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$; par $\varphi(t)$ sa fonction caractéristique $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX}\, dF(X)$, t réel. Il est utile de faire la décomposition de $F(X)$ en somme d'une fonction absolument continue

$$F_1(X) = \int_{-\infty}^{X} f(x)\, dx,$$

d'une fonction de sauts $F_2(X)$, et d'une fonction singulière $F_3(X)$ qui ne croît que sur un ensemble de mesure nulle. Posons

$$p_i = \int_{-\infty}^{+\infty} dF_i \quad (i = 1, 2, 3); \qquad \sum_i p_i = 1,$$

$$\varphi_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} dF_i(X) \quad (i = 1, 2, 3); \qquad \sum \varphi_i(t) = \varphi(t).$$

Il est bien connu que $\varphi(0) = 1$, et que, pour tout t, $|\varphi(t)| \leqq 1$. Le but de la présente Note est de voir si $|\varphi(t)|$ peut approcher arbitrairement près de 1 pour les très grandes valeurs de t, et plus généralement de calculer $\overline{\lim}_{|t|\to\infty} |\varphi(t)|$. Nous rappelons que $\underline{\lim}_{|t|\to\infty} |\varphi(t)| = 0$.

I. *Étude de* $\varphi_1(t)$. — On sait que $\varphi_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$ tend vers zéro lorsque $|t|$ tend vers ∞.

II. *Étude de* $\varphi_2(t)$. — Nous allons montrer que $\overline{\lim}_{|t|\to\infty} |\varphi_2(t)=p_2$.

Soient en effet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un nombre fini de points où se trouvent concentrées des probabilités positives respectivement égales à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles que

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n > p_2-\varepsilon$$
$$|\varphi_2(t)| > |\alpha_1 e^{itx_1}+\alpha_2 e^{itx_2}+\ldots+\alpha_n e^{itx_n}|-\varepsilon.$$

Or, il existe une infinité de valeurs de t pour lesquelles les nombres $tx_1, tx_2, \ldots tx_n$ sont tous, à un multiple de 2π près, compris entre $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon'$; pour ces valeurs

$$|\varphi_2(t)| > (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\cos\varepsilon'-\varepsilon > p_2-\eta.$$

De plus il est clair que l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $|\varphi_2(t)| > p_2-\eta$, si petit que soit η, a une densité positive dans l'ensemble des valeurs de t [autrement dit, la mesure de cet ensemble dans l'intervalle $(-A, +A)$, est supérieure à kA, $k>0$ fixe].

III. *Étude de* $\varphi_3(t)$. — L'égalité bien connue $\lim_{A\to\infty} 1/2A\int_{-A}^{+A} |\varphi_3(t)|^2\,dt=0$ montre que, dans tous les cas, l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $|\varphi_3(t)| > \eta$ est de densité nulle dans l'ensemble de toutes les valeurs de t. Nous allons montrer que la valeur de $\overline{\lim}_{|t|\to\infty} |\varphi_3(t)|$ peut être zéro, un nombre intermédiaire entre zéro et p_3, ou p_3, suivant la nature arithmétique de la distribution des masses. Nous prendrons le cas où $p_1=p_2=0$, $p_3=1$, $F_1=F_2=0$, $F_3=F$; la loi de probabilité est singulière. On obtient aisément une telle loi en considérant x comme la somme $x=\sum_{n=0}^{n=\infty} x_n$ d'une infinité dénombrable de variables aléatoires indépendantes x_n, la variable x_n pouvant prendre, avec des probabilités égales, les deux valeurs opposées $+u_n$ et $-u_n$, avec $u_{n+1}/u_n < k < 1/2$. On a alors

$$\varphi(t)=\prod_{n=0}^{n=\infty}\cos(u_n t).$$

Premier cas. — $u_n = \pi/n\,!$; $\varphi(t) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \cos \pi t/n\,!$. Alors

$$|\varphi(n\,!)| = \left|\cos\frac{\pi}{n+1}\cos\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}\cdots\right|$$

tend vers 1 pour $n \to \infty$. Conclusion : $\lim_{|t|\to\infty} |\varphi(t)| = 1$.

Deuxième cas. — $u_n = \pi/p^n$, p entier > 2 ; $\varphi(t) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \cos(\pi t/p^n)$.

a. $|\varphi(p^n)| = |\varphi(1)| \neq 0$. Donc $\overline{\lim}_{|t|\to\infty} |\varphi(t)| > 0$.

b. Pour $|t| > 1/2$, il y a dans la progression géométrique $t, t/p, t/p^2, \ldots$, au moins un terme compris entre $1/2$ et $1/2p$; donc $|\varphi(t) < \cos(\pi/2p)$ et $\overline{\lim}_{t|\to\infty} |\varphi(t)| < 1$.

Troisième cas. — $u_n = \pi/\rho^n$, ρ réel non entier > 2 ; $\varphi(t) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \cos(\pi t/\rho^n)$.

Montrons que pour ρ rationnel $= p/q$, $q \neq 1$, $\lim_{|t|\to\infty} |\varphi(t)| = 0$.

Posons $t = \tau\rho^n$, $1 \leqq \tau < \rho$,

$$|\varphi(t)| < |\cos\pi\tau\rho^n . \cos\pi\tau\rho^{n-1} . \cos\pi\tau\rho^{n-2} \ldots \cos\pi\tau\rho^2 . \cos\pi\tau\rho . \cos\pi\tau|.$$

Il suffit de montrer que lorsque n (c'est-à-dire $|t|$) tend vers ∞, ce dernier produit tend vers zéro uniformément par rapport à τ, et pour cela de montrer que si l'on considère une suite de termes de la forme $|\cos\pi\tau\rho^\lambda|$, $\cos\pi\tau\rho^{\lambda+1}|$, $|\cos\pi\tau\rho^{\lambda+2}|$, etc., on est sûr d'en rencontrer un qui soit inférieur à $\cos[\pi/(p+q]$, le nombre de termes nécessaire dépendant de λ, mais non de τ. $|\cos\pi\tau\rho^\lambda| > \cos[\pi/(p+q)]$ signifie que $\tau\rho^\lambda = m + \eta$, m entier $|\eta| < 1/(p+q)$. Mais alors $\tau\rho^{\lambda+1} = m(p/q) + \eta(p/q)$; si m n'est pas divisible par q, ce nombre diffère d'un entier d'au moins

$$\frac{1}{q} - \frac{\eta p}{q} > \frac{1}{p+q},$$

et l'on aura $|\cos\pi\tau\rho^{\lambda+1}| < \cos[\pi/(p+q)]$. Dans le cas contraire, $m = m'q$, m' entier et

$$\left.\begin{array}{l} \tau\rho^\lambda \;\;\;= m'q + \eta \\ \tau\rho^{\lambda+1} = m'p + \eta' \end{array}\right\} \text{ et } |\cos\pi\tau\rho^{\lambda+1}| > \cos\frac{\pi}{p+q} \text{ signifie } |\eta'| < \frac{1}{p+q}.$$

Mais alors $\tau\rho^{\lambda+2} = m'p\,(p/q) + \eta'(p/q)$; si m' n'est pas divisible par q, il diffère d'un entier d'au moins $(1/q) - \eta'(p/q) > 1/(p+q)$ et l'on aura $|\cos\pi\tau\rho^{\lambda+2}| < \cos(\pi/p+q)$. Dans le cas contraire, $m' = m''q$, m'' entier et $\tau\rho^\lambda = m''q^2 + \eta$, $\tau\rho^{\lambda+1} = m''pq + \eta'$, $\tau\rho^{\lambda+2} = m''p^2 + \eta''$ et $|\cos\pi\tau\rho^{\lambda+2}| > \cos(\pi/p+q)$ signifie $|\eta''| < (1/p+q)$ et ainsi de suite.

Comme, finalement, $E[\tau\rho^{\lambda}] < \rho^{\lambda+1}$ ne saurait être divisible par des puissances de q dépassant $(\lambda + 1)(\log\rho/\log q')$, nous avons démontré la propriété.

IV. *Conclusion.*

$$p_2 \leqq \overline{\lim_{|t| \to \infty}} |\varphi(t)| \leqq p_2 + p_3.$$

C'est la nature arithmétique de la distribution des probabilités qui décide de la valeur de la limite supérieure entre les deux extrêmes donnés. Si l'on excepte un ensemble de valeurs de t de densité limite nulle, alors $\overline{\lim_{|t| \to \infty}} |\varphi(t)| = p_2$.