

ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Sur les fonctions à variation bornée et les courbes rectifiables

C. R. Acad. Sci. Paris, 212 (1941), p. 331-333.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions à variation bornée
et les courbes rectifiables.* Note de M. LAURENT SCHWARTZ.

I. Soient (U) l'espace vectoriel complet des fonctions continues $\Phi(x)$ à variation bornée dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ et s'annulant pour $x = 0$, la norme étant

$$\|\Phi\| = \int_0^1 |d\Phi|;$$

(ν) le sous-espace vectoriel des fonctions $F(x)$ absolument continues,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \|F\| = \int_0^1 |f(t)| dt;$$

(ω) le sous-espace vectoriel des fonctions singulières $G(x)$, dont toute la variation est concentrée sur un ensemble de mesure nulle.

(U) est somme directe des deux espaces (ν) et (ω), toute fonction Φ a une décomposition unique $\Phi = F + G$, $\|\Phi\| = \|F\| + \|G\|$; les deux sous-espaces (ν) et (ω) sont complets, donc fermés dans (U). La fonction $\Phi_0 = F_0 + G_0$ est isolée de toutes les fonctions absolument continues, si $G \neq 0$, sa distance à (ω) est $\|G_0\|$, et c'est la fonction F_0 qui parmi toutes les F en est la plus proche.

II. $\Phi(x) = F(x) + G(x)$ étant une fonction continue quelconque à variation bornée dans l'intervalle $(0, 1)$, soit (Δ) une décomposition de cet intervalle en intervalles partiels $(0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_i, x_{i+1}), \dots, (x_{n-1}, 1)$. La fonction $\mathcal{L}_\Delta(x)$ égale à Φ en tous les points de division et interpolant linéairement Φ dans les intervalles (x_i, x_{i+1}) est telle que

$\int_0^1 |d\Phi|$ soit la limite des quantités $\int_0^1 |d\mathcal{L}_\Delta|$ lorsqu'on considère une suite de décompositions (Δ) pour lesquelles $\text{Max}_i |x_{i+1} - x_i|$ tende vers zéro. On

peut se demander si $\lim_{\Delta} \int_0^1 |d(\Phi - \mathcal{L}_\Delta)| = 0$, c'est-à-dire si $\lim_{\Delta} \|\Phi - \mathcal{L}_\Delta\| = 0$.

Il résulte de (I) qu'il ne peut pas en être ainsi si $G \neq 0$, puisque

$\|\Phi - \mathcal{L}_\Delta\| \geq \|G\|$. Au contraire, la propriété est exacte si Φ est une fonction absolument continue F.

Posons en effet $F(x) = \int_0^x f(t) dt$; $\mathcal{L}_\Delta(x) = \int_0^x \mu_\Delta(t) dt$, $\mu_\Delta(t)$ est la fonction constante dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) et égale à la moyenne de f dans cet intervalle. Il faut montrer que $\int_0^1 |f - \mu_\Delta| dt$ tend vers zéro si $\text{Max}_i |x_{i+1} - x_i|$ tend vers zéro. Or on sait que l'on peut trouver une fonction $\Psi_\Delta(x)$ constante dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) et telle que pour η assez faible, $\text{Max}_i |x_{i+1} - x_i| < \eta$ entraîne

$$\int_0^1 |f(t) - \Psi_\Delta(t)| dt < \varepsilon.$$

Sur tout ensemble E réunion d'intervalles (x_i, x_{i+1}) on a exactement

$$\int_E f dt = \int_E \mu_\Delta dt$$

d'où

$$\left| \int_E (\Psi_\Delta - \mu_\Delta) dt \right| = \left| \int_E (\Psi_\Delta - f) dt \right| \leq \int_0^1 |\Psi_\Delta - f| dt < \varepsilon.$$

En appliquant successivement cette inégalité à E_1 , réunion des intervalles (x_i, x_{i+1}) dans lesquels $\Psi_\Delta - \mu_\Delta \geq 0$ et à E_2 , réunion des (x_i, x_{i+1}) dans lesquels $\Psi_\Delta - \mu_\Delta < 0$, et en additionnant membre à membre, on trouve

$$\int_0^1 |\Psi_\Delta - \mu_\Delta| dt < 2\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 |f - \mu_\Delta| dt < 3\varepsilon.$$

III. Soient (C) la courbe plane $y = \Phi(x)$, (\mathcal{E}_Δ) la ligne brisée polygonale $y = \mathcal{L}_\Delta(x)$, inscrite dans (C). On peut interpréter la différence $\Phi - \mathcal{L}_\Delta$ comme la distance, mesurée suivant une parallèle à $y'y$, de chaque point M de (C) à celui des côtés de (\mathcal{E}_Δ) qui sous-tend l'arc de (C) contenant M.

La variation totale de cette distance dépend de la nature de Φ . Au contraire nous allons montrer que, quelle que soit la courbe (C) rectifiable (plane ou non), la distance normale $\delta_\Delta(M)$ de chaque point M à celui des côtés de (\mathcal{E}_Δ) qui sous-tend l'arc de (C) contenant M est à variation bornée et que $\int_C |d\delta_\Delta(M)|$ tend vers zéro pour une suite de décompositions (Δ) pour lesquelles $\text{Max}_i |M_i M_{i+1}|$ tende vers zéro.

Appelons en effet, en chaque point M, $\theta_\Delta(M)$ l'angle, défini presque partout, de la tangente en M avec la corde $M_i M_{i+1}$ sous-tendant l'arc qui contient M. On vérifie

(3)

aisément que

$$\int_C |d\delta_\Delta(M)| \leq \int |\sin\theta_\Delta| ds$$

(On aurait l'égalité si la courbe était plane ; lorsqu'elle ne l'est pas, $\int_{M_i}^{M_{i+1}} |\sin\theta_\Delta| ds$ est la longueur de la projection de l'arc $M_i M_{i+1}$ sur le plan normal à la corde $M_i M_{i+1}$, quantité supérieure ou égale à $\int_{M_i}^{M_{i+1}} |d\delta_\Delta M|$). Mais (C) a presque partout une tangente, de sorte que $\theta_\Delta(M)$ tend vers zéro presque partout lorsque $\text{Max}_i |M_i M_{i+1}|$ tend vers zéro, donc $\int |\sin\theta_\Delta| ds$ tend aussi vers zéro.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 212, p. 331-333, séance du 3 mars 1941.)