LAURENT SCHWARTZ

Sur les fonctions à variation bornée et les courbes rectifiables

C. R. Acad. Sci. Paris, 212 (1941), p. 331-333.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions à variation bornée et les courbes rectifiables.* Note de M. **Laurent Schwartz**.

I. Soient (U) l'espace vectoriel complet des fonctions continues $\Phi(x)$ à variation bornée dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ et s'annulant pour $x=0$, la norme étant

$$\|\Phi\| = \int_0^1 |d\Phi|;$$

(v) le sous-espace vectoriel des fonctions $F(x)$ absolument continues,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \|F\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt;$$

(w) le sous-espace vectoriel des fonctions singulières $G(x)$, dont toute la variation est concentrée sur un ensemble de mesure nulle.

(U) est somme directe des deux espaces (v) et (w), toute fonction Φ a une décomposition unique $\Phi = F + G$, $\|\Phi\| = \|F\| + \|G\|$; les deux sous-espaces (v) et (w) sont complets, donc fermés dans (U). La fonction $\Phi_0 = F_0 + G_0$ est isolée de toutes les fonctions absolument continues, si $G \neq 0$, sa distance à (w) est $\|G_0\|$, et c'est la fonction F_0 qui parmi toutes les F en est la plus proche.

II. $\Phi(x) = F(x) + G(x)$ étant une fonction continue quelconque à variation bornée dans l'intervalle $(0, 1)$, soit (Δ) une décomposition de cet intervalle en intervalles partiels $(0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_i, x_{i+1}), \ldots, (x_{n-1}, 1)$. La fonction $\mathcal{L}_\Delta(x)$ égale à Φ en tous les points de division et interpolant linéairement Φ dans les intervalles (x_i, x_{i+1}) est telle que $\int_0^1 |d\Phi|$ soit la limite des quantités $\int_0^1 |d\mathcal{L}_\Delta|$ lorsqu'on considère une suite de décompositions (Δ) pour lesquelles $\operatorname{Max}_i |x_{i+1} - x_i|$ tende vers zéro. On peut se demander si $\lim_\Delta \int_0^1 |d(\Phi - \mathcal{L}_\Delta)| = 0$, c'est-à-dire si $\lim_\Delta \|\Phi - \mathcal{L}_\Delta\| = 0$. Il résulte de (I) qu'il ne peut pas en être ainsi si $G \neq 0$, puisque

$\|\Phi - \mathcal{L}_\Delta\| \geqq \|G\|$. Au contraire, la propriété est exacte si Φ est une fonction absolument continue F.

Posons en effet $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; $\mathcal{L}_\Delta(x) = \int_0^x \mu_\Delta(t)\,dt$, $\mu_\Delta(t)$ est la fonction constante dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) et égale à la moyenne de f dans cet intervalle. Il faut montrer que $\int_0^1 |f - \mu_\Delta|\,dt$ tend vers zéro si $\operatorname{Max}_i |x_{i+1} - x_i|$ tend vers zéro. Or on sait que l'on peut trouver une fonction $\Psi_\Delta(x)$ constante dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) et telle que pour η assez faible, $\operatorname{Max}_i |x_{i+1} - x_i| < \eta$ entraîne

$$\int_0^1 |f(t) - \Psi_\Delta(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Sur tout ensemble E réunion d'intervalles (x_i, x_{i+1}) on a exactement

$$\int_E f\,dt = \int_E \mu_\Delta\,dt$$

d'où

$$\left|\int_E (\Psi_\Delta - \mu_\Delta)\,dt\right| = \left|\int_E (\Psi_\Delta - f)\,dt\right| \leqq \int_0^1 |\Psi_\Delta - f|\,dt < \varepsilon.$$

En appliquant successivement cette inégalité à E_1, réunion des intervalles (x_i, x_{i+1}) dans lesquels $\Psi_\Delta - \mu_\Delta \geqq 0$ et à E_2, réunion des (x_i, x_{i+1}) dans lesquels $\Psi_\Delta - \mu_\Delta < 0$, et en additionnant membre à membre, on trouve

$$\int_0^1 |\Psi_\Delta - \mu_\Delta|\,dt < 2\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 |f - \mu_\Delta|\,dt < 3\varepsilon.$$

III. Soient (C) la courbe plane $y = \Phi(x)$, $(\mathfrak{L}_\Delta)$ la ligne brisée polygonale $y = \mathcal{L}_\Delta(x)$, inscrite dans (C). On peut interpréter la différence $\Phi - \mathcal{L}_\Delta$ comme la distance, mesurée suivant une parallèle à $y'y$, de chaque point M de (C) à celui des côtés de $(\mathfrak{L}_\Delta)$ qui sous-tend l'arc de (C) contenant M.

La variation totale de cette distance dépend de la nature de Φ. Au contraire nous allons montrer que, quelle que soit la courbe (C) rectifiable (plane ou non), la distance normale $\delta_\Delta(M)$ de chaque point M à celui des côtés de $(\mathfrak{L}_\Delta)$ qui sous-tend l'arc de (C) contenant M est à variation bornée et que $\int_C |d\delta_\Delta(M)|$ tend vers zéro pour une suite de décompositions (Δ) pour lesquelles $\operatorname{Max}_i |M_i M_{i+1}|$ tende vers zéro.

Appelons en effet, en chaque point M, $\theta_\Delta(M)$ l'angle, défini presque partout, de la tangente en M avec la corde $M_i M_{i+1}$ sous-tendant l'arc qui contient M. On vérifie aisément que

$$\int_C |d\delta_\Delta(M)| \leqq \int |\sin\theta_\Delta|\, ds$$

(On aurait l'égalité si la courbe était plane; lorsqu'elle ne l'est pas, $\int_{M_i}^{M_{i+1}} |\sin\theta_\Delta|\, ds$ est la longueur de la projection de l'arc M_iM_{i+1} sur le plan normal à la corde M_iM_{i+1}, quantité supérieure ou égale à $\int_{M_i}^{M_{i+1}} |d\delta_\Delta M|$). Mais (C) a presque partout une tangente, de sorte que $\theta_\Delta(M)$ tend vers zéro presque partout lorsque $\operatorname{Max}_i |M_iM_{i+1}|$ tend vers zéro, donc $\int |\sin\theta_\Delta|\, ds$ tend aussi vers zéro.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 212, p. 331-333, séance du 3 mars 1941.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
115115-41 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.