

ŒUVRES DE LAURENT SCHWARTZ

Leçon d'agrégation. Étudier la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe fixe (analytique ou descriptive, au choix du candidat)

Bull. Math. Fac. Sci. et Gdes Écoles, (1938).

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN MATHÉMATIQUE

Des FACULTÉS DES SCIENCES et des GRANDES ÉCOLES

No. 1

Janvier 1938

Leçon d'agrégation

Étudier LA SURFACE ENGENDRÉE PAR LA RÉVOLUTION D'UNE CONIQUE AUTOUR
D'UN AXE FIXE. (ANALYTIQUE OU DESCRIPTIVE, AU CHOIX DU CANDIDAT).

Avant-propos

par A. TRESSE,

Inspecteur général de l'Éducation nationale.

L'étude présentée dans les lignes qui vont suivre n'est que la simple reproduction, que l'auteur s'est attaché à donner sans aucune retouche, de la leçon qu'il a exposée, au Concours de l'Agrégation de Mathématiques de 1937.

Le Président du Jury de ce concours se doit de présenter aux lecteurs du *Bulletin Mathématique* le travail de M. Schwartz.

Ce sont en effet les conditions, un peu nouvelles, du concours de 1937, qui en ont été l'occasion. Alors que précédemment les deux leçons, d'Elémentaires et de Spéciales, imposées à chaque candidat, portaient toujours sur des thèmes classiques et se limitaient au développement de quelque paragraphe des programmes, le Jury a pris cette année des dispositions pour que, l'une des deux

leçons conservant les dites formes rituelles, l'autre fût une leçon de composition, consistant soit dans le rapprochement de diverses théories, soit dans des applications de méthodes générales, soit dans l'étude de quelque problème particulier. Cette seconde leçon imposait donc aux candidats un travail de construction ; elle donnait à leurs qualités personnelles l'occasion de se manifester ; l'épreuve présentait des difficultés, souvent sérieuses, et l'on pouvait s'attendre à des résultats parfois peu satisfaisants.

Or l'expérience a eu, en général, des conséquences heureuses ; l'effort demandé aux candidats semble les avoir stimulés et soutenus. En particulier, M. Schwartz a su, pendant les quatre heures de préparation accordées à chaque candidat, établir un plan et le développer avec une hauteur de vues, une puissance de moyens remarquables. Le Jury y a trouvé un modèle, voisin de la perfection qu'il serait utile de donner aux candidats futurs ; ceux-ci y verront comment, sans fouiller un problème dans tous les détails, on peut l'ordonner logiquement, en dégager les idées maîtresses. Ils retrouveront, dans les lignes qui vont suivre, la concision nerveuse de la leçon qui a été entendue ; ils pourront y deviner la flamme qui animait le jeune maître et qui donnait à ses déductions cette vie intense qui en fait la puissance. Ils sauront gré à M. Schwartz d'avoir cédé à nos sollicitations en reproduisant pour eux son travail, en lui conservant, fidèlement, sans retouche, sa forme première et spontanée.

Etudier la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe fixe.

par L. SCHWARTZ,
agrégé de l'Université.

I. — Nature de la surface ; méridienne.

1° Nous représenterons la conique génératrice (C) par ses équations paramétriques :

$$x = \frac{A(t)}{D(t)}, \quad y = \frac{B(t)}{D(t)}, \quad z = \frac{C(t)}{D(t)}.$$

A, B, C, D étant des trinômes du second degré en t .

L'axe de révolution sera la verticale Oz .

Les équations paramétriques de la surface (S) sont

$$X = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad Y = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \quad Z = z.$$

φ paramètre de rotation, x, y, z exprimés en fonction de t comme il est dit plus haut.

En effectuant le changement de paramètre $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \theta$, on voit que X, Y, Z sont des fonctions rationnelles de t et θ : la surface est *unicursale*.

2° Le degré de cette surface s'obtient par le procédé classique : pour chercher ses intersections avec une droite on est ramené à la recherche des intersections de l'hyperboloïde engendré par la révolution de la droite avec la génératrice (C) de (S) : une conique et une quadrique se coupent en quatre points, (S) est donc du 4° degré.

Il peut y avoir naturellement dégénérescence : nous écartons le cas où le plan de (C) est horizontal ; nous verrons d'autres cas plus importants après.

3° Les équations paramétriques de la méridienne du plan $y = 0$ sont évidemment

$$\begin{cases} X = \pm \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{D}, \\ Z = z = \frac{C}{D}. \end{cases}$$

Le radical pour X, porte sur un polynôme du 4^e degré ; donc la méridienne n'est pas en général unicursale. On voit là un cas particulier d'un fait général : les sections planes d'une surface unicursale ne sont pas forcément unicursales.

Les points d'intersection de la méridienne avec la droite $uX + vZ + h = 0$ de son plan correspondent à des valeurs de t racines de l'équation du 4^e degré

$$u^2(A^2 + B^2) - (vC + hD)^2 = 0.$$

La méridienne est donc du 4^e degré ce qui prouve à nouveau que (S) est du 4^e degré : la méridienne en est une section plane arbitraire passant par l'axe Oz qui ne fait pas partie de la surface

4° Parallèles limites.

Ce sont les parallèles des points de C à tangente horizontale. Il y a deux parallèles limites réels ou imaginaires, à distance finie ou infinie, distincts ou confondus.

En un point d'un tel parallèle le plan tangent à (S) est horizontal, puisque déterminé par la tangente à (C) et la tangente au parallèle, toutes deux horizontales. Il n'y a d'exception que si (C) est tangente au parallèle limite ; c'est un cas que nous examinerons plus tard. Ce cas mis à part, le plan d'un parallèle limite est circonscrit à (S) tout le long du parallèle.

C'est un plan tangent double à (S), de l'espèce la plus ordinaire au point de vue tangentiel. En effet en un point double d'une surface prise au point de vue ponctuel, il y a un cône des tangentes qui est du 2^e degré ; au point de vue tangentiel, un plan tangent double est tangent tout le long d'une courbe de 2^e classe, ici un cercle.

Si (C) est une ellipse, les plans limites sont réels, et ils comprennent entre eux tous les points de la surface.

Si (C) est une hyperbole, ou les parallèles limites sont réels et distincts, alors (S) leur est extérieure, ou ils sont imaginaires conjugués, alors il y a sur (S) des points de toutes les cotes possibles, ou ils sont réels et confondus (cas limite lorsqu'une asymptote de (C) est horizontale) alors il y a encore des points de toutes les cotes, et il existe un plan asymptote horizontal à (S), avec un parallèle de rayon infini. Si (C) est une parabole, il y a en général un plan limite à distance finie, l'autre est à l'infini, (S) est tout entière au-dessus ou tout entière au-dessous du plan limite de cote finie. Si l'axe de la parabole est horizontal, les deux plans limites sont confondus à l'infini, il y a des points de toutes les cotes possibles.

II. — Parallèle double. — Cas où (S) est une quadrique.

1° Section de (S) par le plan de (C).

Elle se compose de (C) et de sa symétrique (C') par rapport à (Δ) projection de Oz sur le plan de (C). On en déduit que (S) peut être d'une deuxième manière engendrée par la révolution d'une conique; (C') peut remplacer (C).

(C) et (C') se coupent en $\alpha\alpha'$ sur (Δ) et $\beta\beta'$ symétriques par rapport à (Δ). En α comme en α' le plan de (C) est tangent à (S); en effet le plan tangent à (S) contient les tangentes à (C) et (C'), donc c'est le plan de (C). β et β' sont deux points de (C) symétriques par rapport à (Δ), donc qui engendrent la même parallèle dans leur révolution : la surface (S) contient donc un parallèle double (Π), (c'est-à-dire engendré par deux points distincts β et β' de (C)), et un seul.

Donc : le plan de (C) est bitangent à (S), les points de contact étant α et α' ; il rencontre en β et β' le parallèle double.

Tout plan coupe (S) suivant une quartique à deux points doubles, situés sur (Π); un plan tangent la coupe suivant une quartique unicursale, ayant deux points doubles sur (Π), un au point de contact. Un plan bitangent coupe en une quartique à quatre points doubles, donc décomposée en deux coniques. Ceci pourrait servir à trouver toutes les coniques de la surface.

Si on remplaçait (C) par une courbe plane de degré n , elle cou-

perait sa symétrie par rapport à (Δ) en n^2 points, dont n sur (Δ) : les $n(n-1)$ en dehors se grouperaient deux à deux par symétrie ; le plan serait n fois tangent et la surface contiendrait $\frac{n(n-1)}{2}$ parallèles doubles.

2° Recherche géométrique pratique du parallèle double.

Dans le cas où la génératrice est une conique, il existe une méthode plus simple et qui n'utilise que la règle et le compas.

Il s'agit de trouver deux points β, β' de (C) symétriques par rapport à (Δ) .

Lorsqu'une corde se déplace en restant normale à (Δ) , c'est-à-dire horizontale, son milieu décrit le diamètre (δ) conjugué des horizontales ; nous voulons qu'il soit sur (Δ) , il est donc à l'intersection I de (δ) et (Δ) ; l'horizontale de I nous donne β et β' d'où le parallèle double.

a) si (Δ) n'est pas parallèle à (δ) , parallèle double unique à distance finie.

b) si (Δ) est parallèle à (δ) , ce qui oblige cette direction, perpendiculaire à sa conjuguée, à être principale pour (C) , la parallèle double a son plan rejeté à l'infini.

Ceci se produira toujours si (C) est un cercle, conique à directions principales indéterminées : les deux points cycliques du cercle engendrent le même parallèle, la conique ombilicale ; la méridienne est une quartique bicirculaire.

c) Si (Δ) et (δ) sont confondus, tous les parallèles sont doubles ; (Δ) est alors un axe de (C) . (S) est une surface du second degré comptée deux fois. Donc : la condition nécessaire et suffisante pour que (S) soit une quadrique de révolution est que l'axe de révolution se projette sur le plan de la conique suivant un axe de cette dernière.

3° Nature du parallèle double.

Le plan du parallèle double est toujours réel. Etudions le parallèle double lui-même.

a) Le point I est intérieur à (C) alors β et β' existent. Le parallèle double est obtenu par croisement de deux branches réelles et distinctes de (S) engendrées par les arcs avoisinant β et β' . La méridienne

a deux points doubles ordinaires symétriques. En chaque point du parallèle double (π) , il y a deux plans tangents, obtenus par la méthode ordinaire, grâce aux tangentes en β et β' à (C) ; nous retrouvons là un fait bien connu, en un point double d'une surface il y a cône des tangentes du second degré, mais s'il y a ligne double, le cône en chaque point dégénère en deux plans se coupant suivant la tangente à la ligne.

Les deux plans tangents le long de (π) peuvent-ils être confondus ? Il faut pour cela que le plan déterminé par la tangente au parallèle de β et la tangente en β à (C) d'une part, le plan correspondant en β' d'autre part, soient à une rotation près les mêmes ; c'est-à-dire soient symétriques par rapport au plan médiateur de $\beta\beta'$; comme il en est de même du plan de (C) , qui contient $\beta\beta'$, les tangentes en β et β' à (C) doivent elles-mêmes être symétriques, donc avoir (Δ) pour bissectrice. (Δ) joint alors le milieu de $\beta\beta'$ au point de rencontre des tangentes, c'est le diamètre conjugué de $\beta\beta'$; lui étant normal, c'est un axe de (C) , et (S) est une quadrique. Ce cas mis à part, les deux plans tangents en chaque point de (π) , sont nécessairement *distincts*.

b) I est extérieur à (C) . Le plan de (π) est réel, mais (π) est engendré par deux points β et β' imaginaires conjugués de (C) . Ils sont sur l'intersection (D) du plan de (C) et du plan de (π) ; ce sont les points doubles de l'involution reliant deux points de (D) conjugués à (C) , ce qui permet de les considérer comme les points de base imaginaires d'un faisceau de cercles de seconde espèce appartenant au plan (π) dont les points de Poncelet P et P' sont faciles à déterminer. PP' rencontre Oz en ω , centre de (π) ; le rayon de (π) est $\sqrt{\omega P \cdot \omega P'}$. Si ω est extérieur au segment PP' , (π) est réel, il est alors isolé par rapport au reste de la surface ; la méridienne a deux points doubles symétriques, réels et isolés. Si ω est entre P et P' , (π) est imaginaire, la méridienne a deux points doubles symétriques, imaginaires conjugués.

Cas particulier : ω est en P ou P' . Alors le parallèle double est isolé et de rayon nul. Que se passe-t-il pour la méridienne ? Il ne faudrait pas croire que la réunion de deux points doubles en un seul lui donne un point *quadruple* sur Oz ; une quartique ne saurait avoir de point quadruple ! C'est un point double à deux branches tangentes entre elles, horizontales, imaginaires conjuguées. (Comme

pour la courbe $y^2 + x^4 = 0$ dont les deux branches $y = \pm ix^2$ sont imaginaires conjuguées, à tangentes horizontales). C'est ainsi que la courbe formée par deux cercles imaginaires se coupant en A et B réels a deux points doubles réels et isolés ; si A et B viennent à se confondre, les deux cercles deviennent tangents en un point réel à une droite réelle, ce point n'est que double pour la courbe en question. Il n'y a pas de contradiction par rapport au théorème de la continuité des racines d'une équation : une droite telle que AB coupe en quatre points la courbe ; à la limite elle devient non pas n'importe quelle droite passant au point de contact, mais la tangente commune, qui coupe bien en quatre points confondus.

Pour contrôler ce résultat, traitons la question par l'analytique. Soient t_1 et t_2 les valeurs de t , imaginaires conjuguées, qui donnent naissance au point singulier de la méridienne $X_1 = X_2 = 0$. Donc t_1 et t_2 sont deux racines du polynôme du quatrième degré $A^2 + B^2$. $Z_1 = Z_2$, nombre réel. Donnons un accroissement Δt_1 à t_1 .

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_1 &\sim \alpha_1 \sqrt{\Delta t_1} \\ \Delta Z_1 &\sim \lambda_1 \Delta t_1 \end{aligned} \right\} \Delta Z_1 \sim \frac{\lambda_1}{\alpha_1^2} \Delta X_1^2.$$

Branche imaginaire à tangente horizontale.

L'autre est l'imaginaire conjuguée

$$\Delta Z_2 \sim \frac{\lambda_2}{\alpha_2^2} \Delta X_2^2.$$

L'équation de la méridienne au voisinage du point singulier est sensiblement

$$\left(\Delta Z - \frac{\lambda_1}{\alpha_1^2} \Delta X^2 \right) \left(\Delta Z - \frac{\lambda_2}{\alpha_2^2} \Delta X^2 \right) = 0.$$

Le point est seulement *double*, à tangentes confondues horizontales.

c) Cas limite : I est situé sur (C). En considérant ce cas comme limite du cas a , on voit que les deux plans tangents en chaque point de (π) viennent se confondre ; il est à prévoir que (π) devient un parallèle de *rebroussement*. Nous le démontrerons plus loin. Ceci se passe lorsque (C) est tangente à un parallèle. Nous avons vu que ce parallèle est alors *limite* mais nous avons signalé qu'il n'y avait dans ce cas aucune raison pour que son plan fût circonscrit à (S) ;

nous allons voir effectivement qu'en chaque point de (π) il y a un plan tangent qui n'a aucune raison d'être horizontal.

Si en effet, on remplace (C) par son cercle osculateur en I , ce cercle osculateur en tournant autour de OZ engendre une zone sphérique dont le centre est Ω intersection de OZ et de l'axe de courbure de (C) ; en chaque point de (π) , la normale à la sphère *paste* par Ω , et l'on prévoit qu'il en est de même pour la surface (S) .

Nota. — Si l'on étudie le côté *descriptif* du problème, on connaît non pas le cercle osculateur à (C) , mais le cercle osculateur à sa projection horizontale. C'est la projection d'une ellipse osculatrice à (C) ; comme cette ellipse a pour projection horizontale un cercle, elle engendre en tournant un paraboloides de révolution, dont on construirait aisément la normale grâce au paramètre.

REMARQUE I. — On peut rapprocher la théorie du parallèle de rebroussement d'une autre bien connue. La projection centrale d'une courbe (C) s'obtient en prenant les traces sur un plan fixe des projetantes, des points de (C) , c'est-à-dire des droites les joignant au point de vue. Si une projetante vient à être tangente à (C) , la projection du point de contact est un rebroussement sur la projection de la courbe. Ici les projetantes au sens figuré du mot seront les cercles d'axe OZ , et la méridienne de la surface engendrée par la révolution de (C) , une projection au sens figuré. Si un parallèle est tangent à (C) , il donne deux points de rebroussement symétriques de la méridienne.

REMARQUE II. — D'une façon générale, la surface engendrée par une famille de courbes ayant une enveloppe admet cette dernière pour arête de rebroussement. Ici les coniques engendrées par la révolution de (C) sont tangentes à un même parallèle.

3° *Recherche analytique* du parallèle double. Il s'agit de trouver t_1 et t_2 tels que

$$\left. \begin{aligned} \frac{(A_1^2 + B_1^2)}{D_1^2} &= \frac{A_2^2 + B_2^2}{D_2^2} \\ \frac{C_1}{D_1} &= \frac{C_2}{D_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &t_1 \neq t_2 \\ &\text{nous avons écrit } A_1 \text{ et} \\ &A_2 \text{ au lieu de } A(t_1) \text{ et} \\ &A(t_2), \text{ etc.} \dots \end{aligned}$$

$$(A_1^2 + B_1^2)D_2^2 - (A_2^2 + B_2^2)D_1^2 = 0$$

$$C_1 D_2 - C_2 D_1 = 0.$$

Les premiers membres de ces deux équations changent de signe par échange de t_1 et t_2 . Ils sont donc le produit de $t_1 - t_2$ par des fonctions symétriques en t_1, t_2 .

La première équation paraît être du huitième degré en t_1 et t_2 , mais le terme en $t_1^2 t_2^2$ disparaît, elle est donc du septième degré; lorsqu'on a divisé par $t_1 - t_2$, il reste une équation symétrique du sixième degré; de plus t_1 intervient au plus au quatrième degré avant division, donc au troisième degré après. De même t_2 . (C'était prévisible géométriquement : la relation entre t_1 et t_2 est celle qui relie deux points de (C) équidistants de Oz; comme un cylindre de révolution d'axe Oz coupe (C) en quatre points, t_2 étant connu il y a trois valeurs de t_1 ; l'équation est du troisième degré aussi bien en t_1 qu'en t_2). La fonction symétrique est donc d'ordre trois : en prenant pour variables $t_1 + t_2 = s$ et $t_1 t_2 = p$, on a une relation entre s et p qui est du troisième degré par rapport à ces variables; dans le plan des s, p c'est une cubique.

De même la seconde relation, apparemment du quatrième degré en t_1, t_2 est en réalité du troisième, après division par $t_1 - t_2$, elle est symétrique et du deuxième degré; t_1 et t_2 n'interviennent qu'au premier degré chacun; c'est une relation involutive, celle qui relie deux points de même cote de (C); (cette involution entre les intersections de (C) et d'une corde variable horizontale résulte du théorème de Frégier). Dans le plan des s, p la courbe est une droite. Les intersections des deux courbes sont au nombre de trois.

Mais les trois points ne conviennent pas. En effet, des valeurs de t_1 et de t_2 qui vérifient à la fois $D_1 = 0$ et $D_2 = 0$, vérifient les deux équations sans être pour cela des points doubles; ce sont seulement des points à l'infini de la méridienne. Soit

$$D = (t - \lambda)(t - \mu).$$

Alors $t_1 = \lambda$ et $t_2 = \mu$ est une solution étrangère; point simple dans la deuxième courbe, il est double dans la première (car D_1 et D_2 interviennent au carré; tous les termes contiennent soit $(t_1 - \lambda)^2$, soit $(t_2 - \mu)^2$ en facteur : en amenant l'origine en ce point par le changement d'axes $\theta_1 = t_1 - \lambda$, $\theta_2 = t_2 - \mu$, les termes de plus bas degré en θ_1, θ_2 sont du deuxième, soit en θ_1^2 soit en θ_2^2 ; c'est donc bien un point double). Il en est encore ainsi après division par

$t_1 - t_2$, ce qui revient à supprimer de chaque courbe la première bissectrice, qui ne contient pas le point. De même, pour $t_1 = \mu$, $t_2 = \gamma$. La transformation en s et p les réunit en un même point $s = \lambda + \mu$, $p = \lambda\mu$ qui est sur la droite, qui est double sur la cubique et qui est une solution étrangère, comptant d'ailleurs pour deux dans l'intersection. Il reste une bonne solution en s et p ; soit un parallèle double, correspondant à deux valeurs t_1 et t_2 racines de $t^2 - st + p = 0$.

a) $s^2 - 4p > 0$ parallèle double ordinaire.

b) $s^2 - 4p < 0$ t_1 et t_2 sont imaginaires conjugués.

Pour avoir la parallèle double, on remplace dans X et Z , t par t_1 ou par t_2 ; on calcule de préférence

$$\frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{D_1} + \frac{C_2}{D_2} \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{A_1^2 + B_1^2}{D_1^2} + \frac{A_2^2 + B_2^2}{D_2^2} \right)}$$

pour exprimer directement en fonction de s et p .

Z est toujours réel; selon que ce qu'il y a sous le radical, quantité réelle, est > 0 , < 0 , ou $= 0$, le parallèle double est réel isolé, imaginaire, ou de rayon nul.

Cas limite : c) $s^2 - 4p = 0$, $t_1 = t_2 = T$. On ne peut plus affirmer qu'il s'agisse d'un point double. Comme c'est le cas limite d'un point double pour lequel les deux branches viennent se rejoindre, il est probable que c'est un rebroussement. Vérifions-le.

Nous avons écrit

$$X_1 - X_2 \equiv (t_1 - t_2)\xi(t_1, t_2),$$

ξ étant une fonction symétrique; par hypothèse, $\xi(T, T) = 0$. Dérivons en t_1 :

$$X'_1 \equiv (t_1 - t_2)\xi'_{t_1} + \xi.$$

Faisons $t_1 = t_2 = T$:

$$X'(T) = \xi(T, T) = 0.$$

De même $Z'(T) = 0$. C'est donc bien un rebroussement. Les tangentes aux points de rebroussement de la méridienne s'obtiennent par le calcul de $X''(T)$, $Z''(T)$; cela fait intervenir A , B , C , D et leurs dérivées premières et secondes pour $t = T$; cela ne dépend donc que du cercle osculateur à (C) et nous justifions ainsi la construction géométrique. Bien remarquer que cette méthode analytique

est celle que l'on emploie toujours pour les courbes en paramétriques. De même pour l'élimination des solutions étrangères, et pour la démonstration du rebroussement.

III. — Points de la méridienne situés sur l'axe OZ.

1° Cas général.

Un point de la méridienne situé sur OZ correspond à un parallèle de rayon nul de la surface ; il provient donc d'un point (C) situé sur un des plans isotropes de l'axe. Réciproquement un tel point est à une distance nulle de l'axe, son parallèle est de rayon nul.

Il y a donc quatre points sur l'axe (ce qui n'est pas étonnant puisque la méridienne est du quatrième degré) provenant des intersections de (C) et des plans isotropes de OZ. En un point sur l'axe, la tangente est horizontale, à moins que ce ne soit un point double ; mais quatre points doubles sur l'axe, c'est trop. Ce sont donc en général quatre sommets de la méridienne, à tangente horizontale.

Analytiquement, il faut résoudre l'équation $X = 0$, soit $A^2 + B^2 = 0$ (ce qui revient à écrire pour (C) $x^2 + y^2 = 0$, c'est-à-dire à chercher ses intersections avec les plans isotropes de l'axe). Quatre racines t_1, t_2, t_3, t_4 . Examinons l'un des points, correspondant à t_1 . Donnons un accroissement Δt_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \Delta X_1 \sim \alpha_1 \sqrt{\Delta t_1} \\ \Delta Z_1 \sim \lambda_1 \Delta t_1 \end{array} \right\} \Delta Z_1 \sim \frac{\lambda_1}{\alpha_1^2} \Delta X_1^2$$

c'est bien un point simple à tangente horizontale.

2° Cas singuliers.

Quels sont tous les cas singuliers possibles, c'est-à-dire où deux de ces points viennent se confondre sur l'axe ?

a) Deux des points de (C), appartenant à des plans isotropes différents, ont même cote, sans être confondus. Par exemple t_1 , racine de $A + iB$ et t_3 racine de $A - iB$ représentent deux points de (C) de même cote. Alors il y a sur (∂) un parallèle double de rayon nul, cas déjà étudié : deux sommets de la méridienne viennent se confondre en un point double isolé avec deux tangentes confondues horizontales.

b) Deux points de (C) situés sur des plans isotropes différents, sont confondus ; $t_1 = t_3$. Autrement dit, (C) rencontre l'axe.

Ce cas sera étudié tout à l'heure.

c) L'un des plans isotropes de l'axe est tangent à (C), par conséquent l'autre aussi, (C) étant réelle. $A + iB$ et $A - iB$ sont deux carrés parfaits imaginaires conjugués.

Ce cas sera également étudié tout à l'heure.

3° Cas où la génératrice (C) rencontre l'axe.

Soit O le point de rencontre, O est nécessairement un point double de la méridienne; le cône des tangentes à (δ) s'obtient par révolution de la tangente en O à (C) autour de OZ.

Analytiquement, une valeur t_1 du paramètre annule A et B; $A^2 + B^2$ contient $(t - t_1)^2$ en facteur.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta X_1 \propto \pm \beta_1 \Delta t_1 \\ \Delta Z_1 \propto \lambda_1 \Delta t_1 \end{array} \right\} \Delta Z_1 \propto \pm \frac{\lambda_1}{\beta_1} \Delta X_1$$

c'est bien un point double à tangentes distinctes en général. Un cas particulier: si la tangente en O à (C) est horizontale. Alors $\Delta Z_1 \propto \mu_1 \Delta t_1^2$; à chaque signe, + ou -, pour ΔX_1 , on a

$$\Delta Z_1 \propto \frac{\mu_1}{\beta_1^2} \Delta X_1^2;$$

donc deux branches de courbe à même tangente horizontale, d'ailleurs osculatrices l'une à l'autre; elles correspondent aux deux arcs de (C) aboutissant en O; le cercle osculateur commun ne dépend que de μ_1 et β_1 donc du cercle osculateur à (C); celui-ci engendre une sphère, passant en O, dont la section par le plan méridien est le cercle osculateur aux deux branches de méridienne.

Remarquons que, dans ces cas, la méridienne est unicursale, car elle a trois points doubles.

Pour avoir sa représentation, on fait sortir $t - t_1$ du radical, il reste un radical du deuxième degré $R = \sqrt{ut^2 + vt + w}$. Cette équation en t et R représente une conique qu'on peut ramener au type cercle ou hyperbole équilatère: on exprimera aisément R et t en fonctions rationnelles d'un paramètre, donc X et Z .

Un cas intéressant est celui où (C) est un cercle rencontrant l'axe. La méridienne est alors une quartique bicirculaire à point double ordinaire sur l'axe; donc l'inverse d'une hyperbole par rapport à un point de son axe. Ceci ne doit pas nous étonner: l'inverse

de (S) est une surface de révolution engendrée par l'inverse de (C), soit une droite; c'est bien un hyperboloïde de révolution, il en résulte que O est sur l'axe non transverse de l'hyperbole. Ce sera un hyperboloïde équilatère (c'est-à-dire dont la méridienne est une hyperbole équilatère) si (C) fait l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec OZ; O sera le centre de l'hyperboloïde si le diamètre de O sur (C) est normal à OZ. Comme l'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une lemniscate de Bernoulli on voit que la révolution d'un cercle autour d'un axe le rencontrant en O, normal au diamètre de O et incliné à 45° sur le cercle, engendre une surface dont la méridienne est une lemniscate de Bernoulli.

Remarquons que, quoique la méridienne soit unicursale, les sections de (S) par des plans non tangents et ne passant pas par O ne le sont pas.

Nous avons supposé que (C) rencontrait OZ en un seul point; si elle la rencontrait en deux points, la méridienne serait décomposée en (C) et sa symétrique par rapport à OZ.

4° Les plans isotropes de OZ sont tangents à (C).

Alors $A^2 + B^2 = k(t - t_1)^2(t - t_2)^2$, t_1 et t_2 étant imaginaires conjugués. Examinons pour t_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta X_1 \propto \pm \beta_1 \Delta t_1 \\ \Delta Z_1 \propto \lambda_1 \Delta t_1 \end{array} \right\} \Delta Z_1 \propto \pm \frac{\lambda_1}{\beta_2} \Delta X_1.$$

Chacun de ces points est double; les tangentes en chacun de ces points doubles sont d'ailleurs distinctes (car si les tangentes à (C) aux points correspondants étaient horizontales, elles ne seraient pas dans un même plan!); ces deux points doubles sont distincts. Ils ne peuvent être confondus que si les plans isotropes de OZ sont tangents à (C) en deux points de même cote μ , μ' . On verrait comme pour II, 3°, a) que (S) est une quadrique, donc un cône de révolution. Dès lors la méridienne ayant quatre points doubles se décompose en deux coniques symétriques par rapport à OZ. Cela ne peut d'ailleurs se produire que dans ce cas (excepté celui où (C) coupe OZ en deux points). Donc: si (C) et (OZ) ne sont pas dans un même plan, la condition nécessaire et suffisante pour que la méridienne se décom-

pose en deux coniques et que les plans isotropes de OZ soient tangents à (C) . On dit que (OZ) est une focale de (C) . Cela se voit parce que la projection de (C) sur un plan horizontal admet un foyer sur OZ .

Lorsque (C) est un cercle, la méridienne est bicirculaire, elle ne peut se décomposer qu'en deux cercles. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle en tournant autour d'un axe engendre un tore est que sa projection sur un plan normal à l'axe admette un foyer au pied de l'axe. Soit (C) le cercle, (D) l'axe, A le point de rencontre de l'axe avec le plan du cercle, ω le centre du cercle; $\omega A = a$, R le rayon du cercle, V l'angle de (D) avec le plan.

Tout d'abord ωA doit être normal à (D) . Ensuite, le grand axe de la projection de (C) sur un plan normal à (D) est R ; le petit axe $R \sin V$; la demi-distance focale est $\omega A = a$.

$$\text{Donc } a^2 = R^2(1 - \sin^2 V), \quad a = R \cos V.$$

Remarquons qu'une conique et sa conique focale réelle ont les mêmes plans tangents isotropes; donc si la méridienne correspondant à l'une est décomposée, il en est de même pour l'autre.

5° Cas où (S) est une quadrique.

Alors les sommets de la méridienne proviennent de deux parallèles doubles de rayon nul; $A + iB$ et $A - iB$ donnent naissance aux mêmes sommets. Dans le cas où les plans isotropes de OZ sont tangents à la méridienne, les deux sommets viennent s'unir en un point double de la méridienne à tangentes distinctes: la méridienne est décomposée en deux droites, la surface est un cône. On retrouve ce théorème classique: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une conique engendre un cône de révolution en tournant autour de OZ est qu'elle ait un plan de symétrie passant par OZ et que sa projection sur un plan horizontal ait un foyer sur OZ . Si le point double est à l'infini, le cône est un cylindre.

6° Remarque.

Remarquons que les quatre points de (C) qui donnent des sommets de la méridienne sont 2 à 2 imaginaires conjugués; donc si tous les sommets sont distincts, ils sont tous imaginaires. Un sommet ne peut être réel que s'il provient d'un parallèle double de rayon nul, (mais alors il est isolé sauf si $(\hat{z})$ est une quadrique) ou si (C) rencontre OZ en ce sommet, ou si la méridienne est décomposée;

dans tous les cas, un sommet n'est réel que si c'est un point double de la méridienne.

Ainsi un sommet ne peut être rejeté à l'infini que s'il est double; la méridienne a deux asymptotes verticales. (Exemple : cas du cylindre de révolution, où les quatre sommets sont à l'infini).

7° *Récapitulation.*

Pour récapituler nous avons vu (en laissant de côté le cas où (S) est une quadrique) que la méridienne a toujours deux points doubles symétriques par rapport à OZ.

Elle a en plus un point double sur l'axe, et est unicursale, si et seulement si (C) rencontre OZ en un point; elle a en plus deux points doubles et se décompose en deux coniques si (C) est dans un plan méridien ou si la projection horizontale de (C) a un foyer sur OZ. Ces points doubles supplémentaires ne s'obtiennent pas par les procédés de II, car ils ne viennent pas de valeurs distinctes de δ donnant le même point, mais de signes distincts du radical donnant le même point.

On peut tout retrouver en se plaçant à un autre point de vue. Dans les équations de la méridienne intervient un radical $U = \sqrt{A^2 + B^2}$ qui empêche la méridienne d'être unicursale et qui fait qu'elle n'a que deux points doubles. Elle ne peut en avoir plus et être unicursale que si $A^2 + B^2$ contient des termes carrés qu'on peut sortir du radical et qui permettraient de représenter X et Z en fonctions rationnelles d'un paramètre auxiliaire.

a) $A^2 + B^2$ est le produit de $(t - t_0)^2$ par un trinôme du deuxième degré. t_0 est réel sans quoi il y aurait aussi le carré du binôme imaginaire conjugué. Mais $A^2 + B^2$ ne peut s'annuler pour t_0 réel que si A et B s'annulent. Alors (C) rencontre l'axe en un point.

b) $A^2 + B^2 = (t - t_1)^2(t - t_2)^2$. Ou bien t_1 et t_2 sont réels, alors ils annulent A et B, et (C) rencontre l'axe en deux points; ou ils sont imaginaires conjugués, alors ou bien $A + iB$ et $A - iB$ sont annulés chacun à la fois par t_1 et t_2 , donc aussi A et B, et (C) rencontre OZ en deux points imaginaires conjugués, ou bien $A + iB$ contient $(t - t_1)^2$, et $A - iB$: $(t - t_2)^2$ en facteur, alors

les plans isotropes de OZ sont tangents à (C) . Dans tous ces cas, deux points doubles supplémentaires.

IV. — Nappes infinies de la surface.

Un point à l'infini de (S) vient d'un point à l'infini de (C) . Soit (A) une parallèle à une direction asymptotique de (C) rencontrant l'axe ; en tournant elle engendre un cône, qui sera un cône de directions asymptotiques de (S) ; sa conique à l'infini sera un parallèle à l'infini de $(\hat{z})$, sa section par un plan méridien donnera deux directions asymptotiques symétriques de la méridienne. Soit (α) l'asymptote correspondante de (C) ; elle engendrera en tournant un hyperboloïde dont le cône asymptote est celui de (S) ; ses sections par un plan méridien sont les asymptotes de la méridienne ; son sommet est le pied sur OZ de la perpendiculaire commune à OZ et (α) .

Examinons quelques cas particuliers.

1° *Plan asymptote horizontal.*

Si (C) est une hyperbole présentant une asymptote horizontale, le plan horizontal correspondant est asymptote à la surface ; sa section par un plan méridien est une asymptote à la méridienne, qui, en son voisinage, a quatre branches infinies, une à chaque extrémité et de chaque côté.

Dans ce plan, le parallèle est de rayon infini.

Il représente des parallèles limites confondus.

C'est d'ailleurs le parallèle double, il est donc de rebroussement ; malgré cela son plan est circonscrit à (S) .

2° *Parallèle double à l'infini.*

Le parallèle double est à l'infini si les deux directions asymptotiques de (C) engendrent la même direction asymptotique de la méridienne, c'est-à-dire font le même angle avec l'axe ; cela revient à dire que la projection de l'axe sur le plan de (C) est une direction principale de cette dernière ; ce que nous avons déjà vu. Dans ce cas à chacune des deux directions asymptotiques symétriques de la méridienne, correspondent deux asymptotes parallèles.

3° *Cas où (C) est une parabole.*

Alors la méridienne a deux directions asymptotiques doubles

symétriques. Mais à chacune correspond une branche parabolique. En effet le plan de l'infini est le plan d'un parallèle limite de (S), donc circonscrit à (S) le long du parallèle de l'infini ; la droite de l'infini d'un plan méridien est donc bitangente à la méridienne.

Il ne peut y avoir d'exception que si le parallèle de l'infini est un parallèle de rebroussement. Il suffit, pour cela, qu'il soit un parallèle double, c'est-à-dire que la projection de l'axe sur le plan de la parabole soit perpendiculaire ou parallèle à l'axe de cette dernière.

a) Perpendiculaire. A rapprocher de 1° (plus haut). La méridienne a une direction asymptotique quadruple horizontale. Ce sont des branches paraboliques, car l'existence de points de toutes les cotes possibles à distance finie empêche l'existence d'asymptote horizontale.

Le parallèle de l'infini est comme pour 1°, circonscrit à (S) quoique de rebroussement. D'ailleurs c'est bien un cas limite de 1°, une parabole d'axe horizontal pouvant être considérée comme la limite d'une hyperbole d'asymptote horizontale, l'asymptote s'éloignant vers le plan de l'infini.

b) Parallèle. Pour avoir le cône circonscrit à (S) le long du parallèle de rebroussement de l'infini, on peut, d'après ce qui a été vu, remplacer la parabole (C) par une parabole (Γ) osculatrice à l'infini, c'est-à-dire dans le même plan, d'axe parallèle et de même sens, et de même paramètre z . On la choisira telle qu'elle engendre un cône de révolution (il suffit par translation d'amener son foyer sur l'axe) ; le cône dont on a aisément le sommet, est celui que l'on cherche ; il donne dans un plan méridien, les asymptotes de la méridienne. La construction n'est en défaut que si le plan de (C) est vertical ; on peut alors amener la parabole, par translation, à une autre (Γ) engendrant un parabolôïde de révolution (Σ) qui sera osculateur à (δ) ; son paramètre est celui de (C), de sorte que la méridienne aura une double branche parabolique verticale, avec, pour parabole osculatrice, une parabole quelconque d'axe vertical, dirigé dans le même sens, et de même paramètre que celui de (C) En résumé :

La condition nécessaire et suffisante pour que (C) étant une parabole, (S) ait un cône asymptote et la méridienne deux asymptotes **symétriques** est que l'axe de révolution se projette sur le plan de la

parabole suivant une parallèle à l'axe de cette dernière, le plan de la parabole n'étant pas parallèle à l'axe de révolution.

V. — Compléments.

On ne peut pas, dans une leçon de 50 minutes, dire toutes ces choses, il faut laisser tomber les détails et mettre le principal en relief. J'avais même dans la leçon laissé complètement de côté certaines démonstrations pour insister sur le résultat.

Voici une question qui n'entre pas à proprement parler dans le cours de la leçon, mais n'en est pas moins intéressante :

Une surface de révolution du quatrième degré possédant un parallèle double peut-elle être engendrée par la révolution d'une conique ?

Il suffit de trouver un plan bitangent, qui coupera la surface en deux coniques. Tout revient donc à obtenir une droite bitangente à la méridienne ; à condition que cette droite ne soit pas horizontale, car elle donnera seulement un parallèle limite, non deux coniques capables d'engendrer la surface.

La méridienne est du quatrième degré ; donc sa classe est, d'après une formule connue de Plücker :

$C = n(n - 1) - 2D - 3R$ (D = points doubles, R = rebroussements).

Soit $D = 2$, $R = 0$; dans le cas général considéré ici $n = 4$.
Donc $C = 8$.

Mais alors son degré est $n = C(C - 1) - 2\hat{c} - 3i$ ($\hat{c}$ = droites bitangentes, i = inflexions).

$$4 = 56 - 2\hat{c} - 3i \quad 2\hat{c} + 3i = 53.$$

Mais le nombre des inflexions est donné par une autre formule de Plücker :

$$i = 3n(n - 2) - 6D - 8R = 12 \quad 3i = 36.$$

Donc $2\hat{c} = 16 \quad \hat{c} = 8$.

Il faut en retrancher les tangentes horizontales. La classe étant 8, il y a 8 tangentes horizontales ; 4 sont des tangentes au sommet, les autres constituent forcément 2 droites bitangentes. Il reste 16 droites qui conviennent ; en les groupant par symétrie, on a

trois familles de plans bitangents ; chacun donne deux coniques, ce qui fait 6 familles de coniques .

Donc en général sur une face de révolution possédant un parallèle double peut de six façons différentes être engendrée par la révolution d'une conique. Je n'examine pas les différents cas qui peuvent se produire ; lorsque $D > 2$ et $R > 0$ le nombre 6 est modifié. Si la méridienne se compose de deux cercles tangents, on ne trouve pas de droite bitangente non horizontale ; mais alors l'un des deux cercles peut engendrer la surface. Etc. . .

Remarquons seulement que pour certaines surfaces de révolution, toutes ces coniques seront imaginaires. Ainsi s'il y a sur l'axe un sommet simple réel, ou un point double isolé à tangentes imaginaires conjuguées, il n'est pas possible qu'une des coniques, soit réelle. Car nous avons vu que si (C) est réelle, tout sommet simple est imaginaire ; un point double unique sur l'axe, à tangentes distinctes, est obtenu lorsque (C) rencontre l'axe ; mais alors il n'est pas isolé. Ainsi la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de Pascal autour de son axe ne saurait être engendrée par une conique réelle.

De même toute quadrique de révolution sans point double peut être engendrée par la révolution d'une droite ; mais si ses sommets ne sont pas imaginaires, c'est-à-dire si ce n'est pas un hyperboloïde à une nappe, la droite ne saurait être réelle.