Laurent Schwartz

Sur une question de calcul des probabilités

Bull. Sci. Math., II sér., 60 (1936), p. 101–102.

Extrait des *Œuvres de Laurent Schwartz*
publiées par la Société mathématique de France, 2011.

SUR UNE QUESTION DE CALCUL DES PROBABILITÉS;

Par M. Laurent SCHWARTZ.

M. Jessen a montré (*Acta Mathematica*, t. 63, 1934, p. 270) que, lorsqu'un événement ne dépend qu'asymptotiquement d'une infinité de variables aléatoires indépendantes (c'est-à-dire lorsqu'il n'est pas modifié par un changement d'un nombre fini de ces variables), la probabilité de cet événement, si elle est définie, ne peut être que 0 ou 1. Supposons qu'il s'agisse de la répartition d'un ensemble (E) de points sur une courbe (C) fermée rectifiable, et supposons de plus que la dépendance qui existe entre (E) et les variables, dépendance asymptotique par hypothèse, ne favorise pas, *a priori*, une région de (C) plus qu'une autre. Autrement dit la probabilité pour que (E) contienne au moins un point sur un arc (L) de (C), probabilité nulle ou unité, est la même pour tous les arcs égaux de (C). Si cette probabilité est nulle, alors l'ensemble (E) a une probabilité 1 d'être vide; sinon cette probabilité sera 1 pour un arc (L) arbitrairement petit, et l'ensemble (E) aura une probabilité 1 d'être dense sur (C). Ce sont les deux seuls cas possibles.

Exemples. — I. On choisit au hasard un point sur (C), et l'on répète une infinité de fois cette expérience, chaque choix étant indépendant des précédents. Le dérivé (E) de l'ensemble ainsi défini satisfait aux conditions précédentes; comme il ne peut pas être vide, il sera presque toujours dense, donc l'ensemble des points choisis également.

II. On se donne les modules des coefficients d'une série de Taylor et l'on choisit leurs arguments au hasard. Si le rayon de convergence est fini, l'ensemble des points singuliers sur le cercle de convergence vérifie les conditions indiquées; comme il ne peut pas être vide et qu'il est fermé, il comprendra presque toujours tous les points de la circonférence. C'est d'ailleurs par ce procédé que M. Steinhaus a démontré cette propriété (*Mathematische Zeitschrift*, t. **31**, 1930, p. 408).

III. Si le rayon de convergence est infini, on pourra raisonner sur les droites de Julia ou les droites de Borel d'espèce maximum; elles auront toutes les chances de remplir l'ensemble de toutes les directions.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. LX, avril 1936.)

104454. — Imp. Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins, 55, Paris.