JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

GEMINIANO PIRONDINI

Quelques propriétés des surfaces moulures

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 405-422.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1897_5_3_A14_0>

Quelques propriétés des surfaces moulures;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI,

à Parme.

I.

Lorsqu'on doit considérer une ligne quelconque L, on désignera par

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, $(\cos l, \cos m, \cos n)$, ρ, r, s

les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale, le rayon de courbure, celui de torsion et l'arc.

Les surfaces que l'illustre Monge a nommées *moulures* sont engendrées par une ligne plane Λ (*profil*) dont le plan roule, sans glisser, sur une surface développable quelconque Σ (*développable directrice*). Voici une autre génération remarquable de ces surfaces.

Que l'on prenne sur chaque plan rectifiant d'une ligne arbitraire L un point $M(\xi, \eta, \zeta)$ et soient

Λ le lieu de M,
$A(x, y, z)$ un point quelconque de L,
t la distance AM,
θ l'inclinaison de AM sur la tangente de L.

On a évidemment

$$\xi = x + t(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos l), \qquad \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{ds} = (1 + t'\cos\theta - t\sin\theta\,\theta')\cos\alpha + t\left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\lambda + (t'\sin\theta + t\cos\theta\,\theta')\cos l, \quad \ldots,$$

σ étant l'arc de A. A l'aide de ces formules on trouve que les conditions

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\cos\alpha = 0, \qquad \sum \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\cos l = 0,$$

exprimant que A est une trajectoire orthogonale des plans rectifiants de L, deviennent

$$(t\cos\theta)' + 1 = 0, \qquad (t\sin\theta)' = 0,$$

d'où, par intégration,

$$(1) \qquad t\cos\theta = a - s, \qquad t\sin\theta = b,$$

a et b étant des constantes.

Si l'on porte les plans rectifiants de L et les points M qu'ils contiennent sur le plan rectifiant initial (le plan rectifiant en A), les points M vont se ranger, sur ce plan, suivant une ligne L_0 dont l'équation en coordonnées polaires t, θ est

$$t\sin\theta = b.$$

Cette ligne L_0 est donc une droite parallèle à la tangente de L en A. Et puisque, en désignant par ds_0 la distance de deux points consécutifs de L_0, on a, en vertu des égalités (1),

$$\left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + t^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1,$$

on déduit

$$ds_0 = ds.$$

Ce résultat nous donne la génération suivante :

Soient C *une ligne quelconque tracée sur un plan* P, R *une droite de* P *et* A *un point de* R. *Que l'on déplace le plan* P *de façon qu'il soit toujours le plan rectifiant d'une ligne arbitraire* L, *tandis que le point* A *glisse sur la ligne* L *et la droite* R *demeure tangente à cette courbe.*

Si, pendant le mouvement du plan P, *on fait glisser la courbe* C *sur ce plan, parallèlement à la droite* R, *avec une vitesse égale à celle du point* A, *la courbe* C *engendre une surface moulure dont elle est le profil.*

Si le plan P est assujetti à la condition de rester, pendant le mouvement, le plan normal ou bien le plan osculateur d'une ligne L, on a, dans le premier cas, la génération que j'ai étudiée dans une autre occasion (1), et, dans le deuxième cas, on trouve que le problème est réduit à l'intégration des équations suivantes :

$$(t\cos\theta)' - \frac{1}{\rho}(t\sin\theta) + 1 = 0, \qquad (t\sin\theta)' + \frac{1}{\rho}(t\cos\theta) = 0.$$

Sur une surface moulure on ne peut avoir qu'une seule trajectoire orthogonale des profils qui soit à courbure constante, ou bien à torsion constante.

1° Si, en effet, T et T_1 sont deux trajectoires à courbure constante, les lignes t, t_1, lieux des centres de courbure de T et T_1, sont aussi à courbure constante et, conséquemment, elles coïncident avec l'arête de rebroussement de la développable directrice Σ; ce qui ne peut pas arriver.

2° Supposons que les trajectoires T, T_1 soient à torsion constante $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$.

On a évidemment

$$\frac{ds}{m} = \frac{ds_1}{n}, \qquad \frac{ds}{\rho} = \frac{ds_1}{\rho_1}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_1 = \frac{n}{m}\rho, \qquad ds_1 = \frac{n}{m}ds.$$

(1) Voir *Sulle superficie modanate* (*Journal de M. Battaglini*, 1892).

Et puisque, en désignant par ρ_0 le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de Σ, on a

$$\rho_0 = \rho + r\frac{d}{ds}\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = \rho_1 + r_1\frac{d}{ds_1}\left(r_1\frac{d\rho_1}{ds_1}\right),$$

il suit

$$\rho + m^2\rho'' = \frac{n}{m}(\rho + m^2\rho'').$$

On a donc $m = n$, et conséquemment

$$r_1 = r = m, \qquad \rho_1 = \rho, \qquad ds_1 = ds,$$

ce qui démontre l'identité des lignes T, T_1.

Des considérations géométriques assez simples démontrent que ce résultat est absurde.

Les propriétés qu'on vient d'énoncer sont donc démontrées.

II.

Soient ξ, ζ les coordonnées d'un point quelconque du profil par rapport à un système d'axes coordonnés $\Omega(\xi, \zeta)$. Dans le roulement du plan de A sur la surface développable Σ, l'axe $\Omega\xi$ enveloppe, sur cette surface, une ligne géodésique L. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de L, et par X, Y, Z celles d'un point de la surface engendrée S, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} X = x - (\xi + s_1)\cos\alpha + \zeta\cos l, \\ Y = y - (\xi + s_1)\cos\beta + \zeta\cos m, \\ Z = z - (\xi + s_1)\cos\gamma + \zeta\cos n. \end{cases}$$

Si donc la surface moulure S doit passer par la ligne

$$x_1 = x_1(t), \qquad y_1 = y_1(t), \qquad z_1 = z_1(t)$$

(t paramètre quelconque), on doit avoir

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\Sigma(x_1 - x)\cos\alpha - s, \qquad \eta = \Sigma(x_1 - x)\cos l, \\ \qquad\qquad \Sigma(x_1 - x)\cos\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Et puisque, à l'aide de la troisième équation (3), on peut éliminer un des paramètres t, s, il suit que :

Si l'on donne une surface développable quelconque Σ et une ligne à double courbure L_1, on peut, en général, conduire par cette ligne une seule surface moulure ayant Σ pour développable directrice, ou bien un nombre fini de ces surfaces.

Lorsque la développable Σ se réduit à un cylindre, on peut prendre une de ses sections droites pour ligne géodésique L. Si donc les génératrices du cylindre sont parallèles à l'axe des z, il suffit de faire dans les formules précédentes

$$\cos l = 0, \qquad \cos m = 0, \qquad \cos n = 1; \qquad \cos\gamma = 0;$$
$$\cos\lambda = -\cos\beta, \qquad \cos\mu = \cos\alpha, \qquad \cos\nu = 0; \qquad z = 0.$$

Exemples :

1° *Faire passer une surface moulure par une droite, la développable directrice étant quelconque.*

En supposant la droite parallèle au plan $x = 0$ et inclinée de l'angle θ sur l'axe des z, on a

$$x_1 = a, \qquad y_1 = t\sin\theta, \qquad z_1 = t\cos\theta,$$

et la troisième équation (3) donne

$$t = \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}.$$

Pour définir le profil Λ, on a donc les équations

$$\begin{aligned}\xi = &\ (x-a)\cos\alpha + \left(y - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\sin\theta\right)\cos\beta \\ &+ \left(z - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\cos\theta\right)\cos\gamma - s, \\ \eta = &-(x-a)\cos l - \left(y - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\sin\theta\right)\cos m \\ &- \left(z - \frac{(x-a)\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sin\theta\cos\mu + \cos\theta\cos\nu}\cos\theta\right)\cos n.\end{aligned}$$

La courbe Λ déterminée, le problème est à considérer comme résolu.

2° *Faire passer une surface moulure, dont la développable directrice Σ est à cône directeur de révolution, par une ligne quelconque placée sur un plan parallèle à l'axe du cône.*

L'arête de rebroussement de Σ est une hélice que nous supposons tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z; supposons la ligne L_1 dans le plan coordonné $y = 0$ et soit

$$z_1 = f(x_1)$$

son équation. Puisque $y_1 = 0$, $\cos\nu = 0$, la troisième équation (3) donne

$$x_1 = \frac{x\cos\lambda + y\cos\mu}{\cos\lambda},$$

et les équations qui définissent le profil Λ deviennent

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{\cos\mu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\beta}{\cos\lambda}\,y + \left[z - f\left(\frac{x\cos\lambda + y\cos\mu}{\cos\lambda}\right)\right]\cos\gamma - s, \\ \zeta &= \frac{\cos\mu\cos l - \cos\lambda\cos m}{\cos\lambda}\,y - \left[z - f\left(\frac{x\cos\lambda + y\cos\mu}{\cos\lambda}\right)\right]\cos n.\end{aligned}$$

Cela suffit à la solution du problème.

Le problème de construire une surface moulure passant par une ligne connue L_1 lorsqu'on donne les normales de la surface le long de cette ligne, est indéterminé, si on laisse tout à fait arbitraire la développable directrice Σ. L'indétermination peut disparaître, en posant des conditions pour cette développable.

Supposons que la développable Σ soit, par exemple, un cylindre (non donné *a priori*) et que les normales à la surface le long de la ligne $L_1(x_1, y_1, z_1)$ soient définies par leurs cosinus directeurs $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

Sur ces droites prenons, à partir de L_1, des distances H et soit $L_0(x_0, y_0, z_0)$ le lieu des extrémités. On a

$$x_0 = x_1 + H\cos A, \qquad y_0 = y_1 + H\cos B, \qquad z_0 = z_1 + H\cos C,$$

et, puisque les cosinus directeurs des normales au cylindre Σ, projetant L_0 sur le plan $z = 0$, sont proportionnels aux quantités

$$\cos\beta_1 + H'\cos B + H(\cos B)', \quad -[\cos\alpha_1 + H'\cos A + H(\cos A)'], \quad 0,$$

la condition pour que le cylindre Σ soit tangent à la surface lieu des normales données est exprimée par l'équation

$$\begin{aligned}&[\cos\beta_1 + H'\cos B + H(\cos B)']\cos A\\ &\quad - [\cos\alpha_1 + H'\cos A + H(\cos A)']\cos B = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$H = \frac{\cos\alpha_1\cos B - \cos\beta_1\cos A}{\cos A\cos(B)' - \cos B(\cos A)'}.$$

La distance H connue, on peut construire la ligne L_0 et conséquemment le cylindre Σ; après cela, rien ne s'oppose à la solution complète du problème.

Supposons que la ligne L_1 *soit une géodésique de la surface.* — Dans ce cas, les normales de la surface le long de L_1 coïncident avec les normales principales de L_1. On a donc

$$\cos A = \cos\lambda_1, \qquad \cos B = \cos\mu_1, \qquad \cos C = \cos\nu_1$$

et

$$\mathrm{H} = \frac{\cos n_1}{\frac{1}{\rho_1}\cos n_1 - \frac{1}{r_1}\cos\gamma_1}.$$

Supposons que la ligne L_1 *soit une asymptotique de la surface*. — Les normales de la surface le long de L_1 doivent coïncider avec les binormales de L_1. On a donc

$$\cos \mathrm{A} = \cos l_1, \qquad \cos \mathrm{B} = \cos m_1, \qquad \cos \mathrm{C} = \cos n_1$$

et

$$\mathrm{H} = -\frac{r_1 \cos\nu_1}{\cos\gamma_1}.$$

III.

Si l'on désigne par $d\Delta$ la distance entre deux points infiniment rapprochés d'une surface moulure, on déduit des équations (2)

$$d\Delta^2 = \left(\frac{\zeta}{r} - \frac{\xi+s}{\rho}\right)^2 ds^2 + d\sigma^2.$$

La courbure géodésique des trajectoires orthogonales des profils ($\sigma =$ const.) est donc donnée par la formule

$$(4) \qquad \frac{\frac{\xi'}{\rho} - \frac{\zeta'}{r}}{\frac{\xi+s}{\rho} - \frac{\zeta}{r}}.$$

A partir d'un point quelconque A de la surface, menons la perpendiculaire AB sur l'axe instantané de rotation MN et la normale AC de la surface. Puisque la droite MN coupe la ligne L sous un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{r}{\rho}$, car elle est la droite rectifiante de L, on a pour rayon de courbure ρ_σ de la trajectoire

$$\rho_\sigma = AB = \frac{\frac{\xi+s}{\rho} - \frac{\zeta}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}}.$$

Cette formule et l'autre (4) donnent

$$\cos\varepsilon = \cos\widehat{ACB} = \frac{\frac{\xi'}{\rho} - \frac{\zeta'}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}}.$$

Si donc R_σ et R_s sont les rayons de courbure principaux de la surface moulure, on trouve

$$R_\sigma = \frac{\rho_\sigma}{\sin\varepsilon} = \frac{\frac{\xi+s}{\rho} - \frac{\zeta}{r}}{\frac{\zeta'}{\rho}+\frac{\xi'}{r}}, \qquad R_s = \frac{\sqrt{1-\xi'^2}}{\xi''} = \frac{\zeta'}{\xi''}.$$

Lorsque la développable directrice est un cylindre, on a $\frac{1}{r} = 0$ et conséquemment

$$(5) \qquad R_\sigma = \frac{\xi+s}{\zeta'}, \qquad R_s = \frac{\zeta'}{\xi''}.$$

Il suit que la courbure K de la surface est donnée de la manière suivante

$$K = \frac{\xi''}{\xi+s}.$$

Si, par exemple, la courbure de la surface est proportionnelle à la courbure $\frac{1}{\xi+s}$ des trajectoires orthogonales des profils, on doit avoir $\xi'' = a$, d'où il suit

$$\rho_p = \sqrt{\frac{1-b^2}{a^2} - \frac{2b}{a}\sigma - \sigma^2}.$$

On voit d'ici que : *Le profil est une cycloïde dont la base est parallèle aux génératrices du cylindre directeur.*

Si l'on remarque que la courbure géodésique K_t des trajectoires orthogonales des profils est, à cause de l'égalité (4),

$$K_t = \frac{\xi'}{\xi + s},$$

on a

$$\frac{K}{K_t} = \frac{\xi''}{\xi'}.$$

Le rapport $\frac{K}{K_t}$ ne dépend donc nullement de la nature du cylindre directeur. Si donc on rappelle que sur la pseudo-sphère la courbure totale et la courbure géodésique des parallèles sont des constantes, on déduit :

Dans la surface moulure à développable directrice cylindrique dont le profil est une tractrice ayant l'asymptote parallèle aux génératrices du cylindre, le rapport de la courbure de la surface à la courbure géodésique des trajectoires orthogonales des profils est une constante.

Le théorème subsiste aussi lorsque la surface moulure se réduit à une surface de révolution.

Soit L une ligne quelconque tracée sur une surface moulure à développable directrice cylindrique, dont le profil n'est pas circulaire.

Tout le long de cette ligne L il subsiste une certaine relation entre les quantités s, σ, R_s, R_σ et les dérivées de R_s, R_σ par rapport à s et σ. Mais puisque, en vertu des équations (5), on a

$$R_s = f(\sigma), \qquad R_\sigma = \varphi(\sigma) + s\,\psi(\sigma),$$

$f(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$ et $\psi(\sigma)$ étant des fonctions de σ, on trouve que les dérivées de R_s et R_σ différentes de zéro et les arcs s, σ sont exprimables par des fonctions en termes finis des rayons R_s, R_σ.

Cela conduit au théorème remarquable suivant :

Quelle que soit la ligne qu'on trace sur une surface moulure à développable directrice cylindrique et à profil non circulaire, les *rayons de courbure principaux de la surface vérifient, tout le long de cette ligne, une même relation finie.*

Remarque. — Lorsque le profil est circulaire, toute relation en termes finis entre R_s et R_σ revient à la relation unique $R_\sigma = \text{const}$.

IV.

Il n'y a aucune surface moulure dans laquelle les rayons de courbure principaux soient liés par une même relation finie, dans toute l'étendue de la surface. Une telle relation ne peut donc être vérifiée que dans une suite de points constituant une ligne.

Supposons que le profil de la surface moulure soit la ligne

$$\xi = f(\zeta) \tag{6}$$

et que la section droite du cylindre directeur soit représentée par les équations

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s)$$

ou bien par l'équation

$$R = R(s), \tag{7}$$

en coordonnées R, s.

Puisque des équations (5) on déduit

$$s = f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)\zeta' - \xi.$$

on voit que la ligne L de la surface, le long de laquelle les rayons de courbure sont liés par la relation

$$R_\sigma = f(R_s), \tag{8}$$

est définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} X = \varphi\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] - \zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)\varphi'\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right], \\ Y = \psi\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] - \zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)\psi'\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right], \\ Z = \zeta. \end{cases}$$

Que l'on fasse tourner cette ligne autour de l'axe des z, et l'on engendre une surface de révolution S ayant pour ligne méridienne la courbe

$$(9) \qquad x_0 = \sqrt{R^2\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] + \zeta'^2 f^2\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)}, \qquad z_0 = \zeta.$$

En remarquant que

$$\frac{\zeta'}{\xi''} = \frac{[1+\lambda'^2(\zeta)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(\zeta)}, \qquad \zeta' = \frac{d\zeta}{d\sigma} = \frac{d\zeta}{\sqrt{d\xi^2 + d\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda'^2(\zeta)}},$$

on obtient

$$(10) \qquad \begin{cases} x_0 = \left(R^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda'^2(z_0)}} f\left[\frac{1+\lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right] - \lambda(z_0)\right\}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{1+\lambda'^2(z_0)} f^2\left[\frac{1+\lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right]\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Après avoir posé

$$(11) \qquad x_0 = \psi(z_0),$$

l'équation (10) donne

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi^2(z_0) = R^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda'^2(z_0)}} f\left[\frac{1+\lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right] - \lambda(z_0)\right\} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{1+\lambda'^2(z_0)} f^2\left[\frac{1+\lambda'^2(z_0)^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right]. \end{cases}$$

D'ailleurs on a

$$\mathrm{R}_s = \frac{[1+\lambda'^2(\zeta)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(\zeta)} = \frac{[1+\lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}$$

et, conséquemment,

$$(13) \qquad \mathrm{R}_\sigma = f\left\{\frac{[1+\lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right\}.$$

On peut donc énoncer le théorème :

Si le profil de la surface moulure et la section droite du cylindre directeur sont représentés par les équations (6), (7) :

1° *La ligne* L *le long de laquelle les rayons de courbure principaux vérifient la relation* (8) *s'obtient en coupant la surface donnée par la surface de révolution* S *dont la ligne méridienne est la courbe* (10).

2° *La surface de révolution* S *dont la ligne méridienne est la courbe* (11) *coupe la surface suivant une ligne* L, *le long de laquelle les rayons* R_s, R_σ *vérifient la relation finie qu'on obtient en éliminant* z_0 *entre les équations* (12), (13).

Exemples :

1° En supposant que le profil de la surface moulure soit un cercle de rayon m, que le long de la ligne L soit vérifiée la relation $\mathrm{R}_\sigma = k$ et que la section droite du cylindre directeur soit une spirale logarithmique ($\mathrm{R} = as$) ou bien un cercle ($\mathrm{R} = a$), on trouve que la courbe L s'obtient en coupant la surface par les ellipsoïdes ayant pour lignes méridiennes respectivement les ellipses

$$\frac{x_0^2}{a^2(k-m)^2+k^2} + \frac{z_0^2}{m^2} = 1, \qquad \frac{x_0^2}{a^2+k^2} + \frac{z_0^2}{\frac{m^2}{k^2}(a^2+k^2)} = 1;$$

2° Supposons que le profil de la surface moulure soit une parabole

$$\left[\xi = \lambda(\zeta) = \frac{\zeta^2}{a}\right],$$

que la section droite du cylindre directeur soit une spirale logarithmique ($R = s\cos i$), et que la surface de révolution S coupant la surface moulure soit une sphère $\left[x_0 = \psi(z_0) = \sqrt{m^2 - z_0^2}\right]$.

L'équation (13), résolue par rapport à (z_0), donne

$$z_0 = \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1},$$

et conséquemment, le long de la ligne d'intersection L, les rayons de courbure principaux vérifient la relation

$$m^2 - \frac{a^2}{4}\left[\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right] = \frac{\left[R_\sigma - \frac{R_s}{2} + \frac{a}{4}\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \cos^2 i - R_\sigma^2}{\left(\frac{2R_s}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

L'équation (12), résolue par rapport à R, donne

$$(14) \qquad R = \sqrt{\psi^2(z_0) - \frac{1}{1 + \lambda'^2(z_0)} f^2\left[\frac{[1 + \lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right]},$$

et, dans ce cas, on a

$$s = f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)\zeta' - \xi,$$

c'est-à-dire

$$(15) \qquad s = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda'^2(z_0)}} f\left\{\frac{[1 + \lambda'^2(z_0)]^{\frac{3}{2}}}{\lambda''(z_0)}\right\} - \lambda(z_0).$$

D'ailleurs l'équation (11), en vertu des égalités (9), peut s'écrire

$$(16) \qquad \sqrt{R^2\left[\zeta' f\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right) - \xi\right] + \zeta'^2 f^2\left(\frac{\zeta'}{\xi''}\right)} = \psi(\zeta).$$

On a donc le théorème :

Si en coupant une surface moulure par la surface de révolution S dont la ligne méridienne est la courbe (11), *on obtient une ligne* L *le long de laquelle les rayons de courbure* R_s, R_σ *vérifient la relation* (8):

1° *Lorsque le profil de la surface est la courbe* (6), *la section droite du cylindre directeur est représentée (en coordonnées* R, s) *par l'équation qu'on obtient en éliminant* z_0 *entre les équations* (14), (15).

2° *Lorsque la section droite du cylindre directeur est la courbe* (7), *le profil de la surface moulure est représenté par l'équation différentielle* (16).

EXEMPLES :

1° Supposons que le profil de la surface moulure soit circulaire

$$\left[\xi = \lambda(\zeta) = \sqrt{m^2 - \zeta^2}\right],$$

que la surface de révolution S coupant la surface moulure soit du deuxième ordre $\left[x = \psi(z_0) = \sqrt{\alpha z_0^2 + \beta}\right]$, et que tout le long de la ligne d'intersection L soit vérifiée la relation $R_\sigma = k$.

On trouve que la section droite du cylindre directeur est la courbe représentée par l'équation

$$R = \sqrt{\alpha m^2 + \beta - \frac{\alpha m^2 + k^2}{(k-m)^2} s^2}.$$

La surface du deuxième ordre se réduit à un cylindre ou bien à un cône lorsqu'on a respectivement

$$\alpha = 0, \qquad \beta = a^2; \qquad \alpha = b^2, \qquad \beta = 0,$$

a et b étant des constantes. Dans ces cas, on a

$$R = \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{(k-m)^2} s^2}, \qquad R = \sqrt{b^2 m^2 - \frac{b^2 m^2 + k^2}{(k-m)^2} s^2},$$

et conséquemment le cylindre directeur a pour section droite une épicycloïde ([1]).

2° Supposons que le cylindre directeur soit circulaire ($R = a$), que la surface de révolution s soit une hyperboloïde à une nappe

$$\left| x_0 = \psi(z_0) = \sqrt{\alpha^2 z_0^2 + \beta^2} \right|$$

et que tout le long de la ligne d'intersection L soit vérifiée la relation $R_\sigma = k$.

On trouve que le profil de la surface moulure est la courbe définie par l'équation

$$\zeta = \frac{1}{2c\alpha}\left[c^2 e^{\frac{\alpha}{k}\sigma} + (a^2 - \beta^2) e^{-\frac{\alpha}{k}\sigma}\right],$$

c étant une constante arbitraire.

Pour $\beta^2 = a^2$, on obtient

$$\zeta = \frac{c}{2\alpha} e^{\frac{\alpha}{k}\sigma},$$

équation qui représente une tractrice dont l'asymptote est perpendiculaire aux génératrices du cylindre directeur.

V.

Je vais démontrer une propriété remarquable des surfaces moulures à développable directrice cylindrique.

Soit L une ligne à double courbure, représentée par les équations

$$(17) \qquad x = R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = U$$

(R et U étant des fonctions de u); Λ la projection de L sur le plan $z = 0$ et M la ligne méridienne de la surface de révolution engendrée par la courbe L tournant autour de l'axe des z.

([1]) Voir *Sur les lignes sphériques*, § 6 (*Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*; 1889).

Soient i et ω les inclinaisons de L sur la méridienne M et sur l'axe de la surface de révolution, θ l'inclinaison de Λ sur les rayons vecteurs R issus de l'origine et σ l'arc de Λ.

On a

$$\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2 + R^2\left(\frac{du}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

et puisque

$$\frac{dR}{d\sigma} = \cos\theta; \qquad \frac{du}{d\sigma} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = \frac{du}{ds}\frac{1}{\sin\omega},$$

il résulte

$$(18) \qquad R\frac{du}{ds} = \sin\theta\sin\omega.$$

Or, les équations (17) donnent

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{R^2 + R'^2 + U'^2};$$

on a donc

$$\sin i = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R'^2 + U'^2}} = R\frac{du}{ds}.$$

Cette équation et (18) donnent

$$(19) \qquad \sin i = \sin\theta\sin\omega.$$

En remarquant qu'une surface moulure, dont la développable directrice est un cylindre, peut être considérée comme l'ensemble d'une infinité de bandes infiniment petites de surfaces de révolution ayant pour ligne méridienne le profil et pour axes les génératrices du cylindre, l'équation (19) donne lieu au théorème suivant :

Si sur une surface moulure, dont la développable directrice est un cylindre K, *on trace une ligne quelconque* L, *entre les angles i et ω que* L *forme avec le profil et les génératrices du cylindre* K, *et l'angle θ que la projection Λ de* L *sur le plan d'une section droite du cylindre forme avec les tangentes de cette section, a lieu la relation* (19).

Ce théorème pourrait être le point de départ pour une construction géométrique simple d'une loxodromie de la surface moulure. En remarquant que les conditions $\omega =$ const., $i =$ const. entraînent l'autre $\theta =$ const., on a

Il y a seulement un cas dans lequel la ligne d'intersection d'une surface de révolution avec un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à l'axe, est une hélice du cylindre et une loxodromie de la surface; c'est le cas de l'hélice cylindro-conique ordinaire.