JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TCHÉBYCHEF, P.

Des valeurs moyennes (Traduction du russe, N. de Khanikof.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 12 (1867), p. 177-184.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1867_2_12_A11_0>

DES VALEURS MOYENNES;

PAR M. P.-L. DE TCHÉBYCHEF.

TRADUCTION DU RUSSE, PAR M. N. DE KHANIKOF.

Extrait du *Recueil des Sciences mathématiques*, t. II.

Si nous convenons d'appeler *espérance mathématique* d'une grandeur quelconque, la somme de toutes les valeurs qu'elle est susceptible de prendre, multipliées par leurs probabilités respectives, il nous sera aisé d'établir un théorème très-simple sur les limites entre lesquelles restera renfermée une somme de grandeurs quelconques.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par $a, b, c \ldots$, les espérances mathématiques des quantités $x, y, z \ldots$, et par $a_1, b_1, c_1, \ldots$ les espérances mathématiques de leurs carrés $x^2, y^2, z^2, \ldots$, la probabilité que la somme $x + y + z \ldots$ est renfermée entre les limites*

$$a + b + c + \ldots + \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots},$$

et

$$a + b + c + \ldots - \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}$$

sera toujours plus grande que $1 - \frac{1}{\alpha^2}$, quel que soit α.

Démonstration. — Soient

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & x_3, \ldots, & x_l, \\ y_1, & y_2, & y_3, \ldots, & y_m, \\ z_1, & z_2, & z_3, \ldots, & z_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

toutes les valeurs imaginables des quantités x, y, z,..., et soient

$$\begin{array}{llll} p_1, & p_2, & p_3,\ldots, & p_l, \\ q_1, & q_2, & q_3,\ldots, & q_m, \\ r_1, & r_2, & r_3,\ldots, & r_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

les probabilités respectives de ces valeurs, ou bien les probabilités des hypothèses

$$\begin{array}{llll} x = x_1, & x_2, & x_3,\ldots, & x_l, \\ y = y_1, & y_2, & y_3,\ldots, & y_m, \\ z = z_1, & z_2, & z_3,\ldots, & z_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Conformément à ces notations, les espérances mathématiques des grandeurs x, y, z,..., et de x^2, y^2, z^2,... s'exprimeront ainsi :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l, \\ b = q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \ldots + q_m y_m, \\ c = r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3 + \ldots + r_n z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_l x_l^2, \\ b_1 = q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 + \ldots + q_m y_m^2, \\ c_1 = r_1 z_1^2 + r_2 z_2^2 + r_3 z_3^2 + \ldots + r_n z_n^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, comme les hypothèses que nous venons de faire sur les quantités x, y, z,... sont les seules possibles, leurs probabilités satisferont aux équations suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l = 1, \\ q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_m = 1, \\ r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il nous sera facile de trouver, à l'aide des équations (1), (2) et (3), à quoi se réduit la somme de toutes les valeurs de l'expression

$$(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots,$$

si l'on y fait successivement

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad \nu + 1, 2, 3, \ldots, n \ldots.$$

En effet, cette expression étant développée nous donne

$$\begin{aligned}
& p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots y_\mu^2 + p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots z_\nu^2 + \ldots \\
& \quad + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda y_\mu + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda z_\nu + 2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots y_\mu z_\nu + \ldots \\
& \quad - 2(a + b + c + \ldots) p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots x_\lambda - 2(a + b + c + \ldots) p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots y_\mu \\
& \quad - 2(a + b + c + \ldots) p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots z_\nu - \ldots \\
& \quad + (a + b + c + \ldots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots.
\end{aligned}$$

En donnant, dans cette expression, à λ toutes les valeurs depuis $\lambda = 1$ jusqu'à $\lambda = l$, et en sommant les résultats de ces substitutions, nous obtenons la somme que voici :

$$\begin{aligned}
& q_\mu r_\nu \ldots (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_l x_l^2) \\
& \quad + (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu^2 \\
& \quad + (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu^2 \\
& \quad + 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu \\
& \quad + 2(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu \\
& \quad + 2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu z_\nu \\
& \quad + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& \quad - 2(a + b + c + \ldots)(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l) q_\mu r_\nu \ldots \\
& \quad - 2(a + b + c + \ldots)(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots y_\mu \\
& \quad - 2(a + b + c + \ldots)(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu - \ldots \\
& \quad + (a + b + c + \ldots)^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l) q_\mu r_\nu \ldots.
\end{aligned}$$

Si, en vertu des équations (1), (2) et (3), nous mettons à la place des sommes

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_l x_l,$$
$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_l x_l^2,$$

et

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_l,$$

leurs valeurs a, a_1 et 1, nous obtiendrons la formule que voici :

$$\begin{aligned} &a_1 q_\mu r_\nu \ldots + q_\mu r_\nu \ldots y_\mu^2 + q_\mu r_\nu \ldots z_\nu^2 + \ldots \\ &\quad + 2aq_\mu r_\nu \ldots y_\mu + 2aq_\mu r_\nu \ldots z_\nu + 2q_\mu r_\nu \ldots y_\mu z_\nu + \ldots \\ &\quad - 2(a+b+c\ldots) aq_\mu r_\nu \ldots - 2(a+b+c\ldots) q_\mu r_\nu \ldots z_\nu - \ldots \\ &\quad + (a+b+c\ldots)^2 q_\mu r_\nu \ldots. \end{aligned}$$

Donnons dans cette formule à μ les valeurs

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots, m,$$

puis sommons les expressions qui résultent de ces substitutions, et remplaçons les sommes

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \ldots + q_m y_m,$$
$$q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + q_3 y_3^2 + \ldots + q_m y_m^2,$$
$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_m,$$

par leurs valeurs b, b_1 et 1 tirées des équations (1), (2) et (3), nous obtiendrons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &a_1 r_\nu \ldots + b_1 r_\nu \ldots + r_\nu \ldots z_\nu^2 + \ldots \\ &\quad + 2abr_\nu \ldots + 2ar_\nu \ldots z_\nu + 2br_\nu \ldots z_\nu + \ldots \\ &\quad - 2(a+b+c+\ldots) ar_\nu \ldots - 2(a+b+c+\ldots) br_\nu \ldots \\ &\quad - 2(a+b+c+\ldots) r_\nu \ldots z_\nu - \ldots + (a+b+c\ldots)^2 r_\nu \ldots. \end{aligned}$$

En traitant de la même manière $\nu \ldots$, nous verrons que la somme de toutes les valeurs de l'expression

$$(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots,$$

qu'on obtient en faisant

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

sera égale à

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + 2ab + 2ac + 2bc + \ldots - 2(a + b + c\ldots)a$$
$$- 2(a + b + c\ldots)b - 2(a + b + c\ldots)c - \ldots + (a + b + c\ldots)^2.$$

Cette expression étant développée se réduit à

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 \ldots$$

D'où nous concluons que la somme des valeurs de l'expression

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)} p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots,$$

qu'on obtient en faisant

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, l, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

sera égale à $\frac{1}{\alpha^2}$. Or, il est évident qu'en rejetant de cette somme tous les membres dans lesquels le facteur

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)}$$

est inférieur à 1, et en le remplaçant par l'unité partout où il est plus grand que 1, nous diminuons cette somme, et elle sera moindre que $\frac{1}{\alpha^2}$. Mais cette somme, ainsi réduite, ne sera formée que des produits $p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots$, qui correspondent aux valeurs de x_λ, y_μ, $z_\nu, \ldots$, pour lesquels l'expression

$$\frac{(x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)} > 1, \tag{4}$$

et elle représentera évidemment la probabilité que x, y, z... ont des valeurs qui satisfont à la condition (4).

Cette même probabilité peut être remplacée par la différence $1 - P$, si nous désignons par P la probabilité que les valeurs des x, y, z... ne satisfont pas à la condition (4), ou bien, ce qui est la même chose, que ces quantités ont des valeurs pour lesquelles le rapport

$$\frac{(x + y + z + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{\alpha^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)}$$

n'est pas > 1; et par conséquent, que la somme $x + y + z\ldots$ reste comprise entre les limites

$$a + b + c + \ldots + \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}$$

et

$$a + b + c + \ldots - \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}.$$

D'où il est évident que la probabilité P devra satisfaire à l'inégalité

$$1 - P < \frac{1}{\alpha^2},$$

qui nous donne

$$P > 1 - \frac{1}{\alpha^2},$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Soit N le nombre de quantités x, y, z,...; si l'on pose dans le théorème qu'on vient de démontrer

$$\alpha = \frac{\sqrt{N}}{t},$$

et que l'on divise par N la somme $x + y + z + \ldots$ et ses limites

$$a + b + c + \ldots + \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots},$$

et

$$a + b + c + \ldots - \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots},$$

on obtient le théorème suivant concernant les valeurs moyennes.

Théorème. — *Si les espérances mathématiques des quantitées x, y, z,... et x^2, y^2, z^2,... sont respectivement a, b, c,..., a_1, b_1, c_1,..., la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique des* N *quantités* x, y, z..., *et la moyenne arithmétique des espérances mathématiques de ces quantités ne surpassera pas* $\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N} - \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$ *sera toujours plus grande que* $1-\frac{t^2}{N}$ *quel que soit* t.

Comme les fractions $\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}$ et $\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}$ expriment les moyennes des quantités a_1, b_1, c_1,... et a_1^2, b_1^2, c_1^2..., toutes les fois que les espérances mathématiques a, b, c,..., a_1, b_1, c_1,... ne dépasseront pas une certaine limite finie, l'expression

$$\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N} - \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$$

aura aussi une valeur finie, quelque grand que soit le nombre N, et par conséquent il dépend de nous de rendre la valeur de

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N} - \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}},$$

aussi petite que l'on voudra, en attribuant à t une valeur suffisamment grande. Or, comme, quel que soit t, l'accroissement du nombre N jusqu'à l'infini rend nulle la fraction $\frac{t^2}{N}$, nous concluons, en vertu du théorème précédent :

Théorème. — *Si les espérances mathématiques des quantités* U_1, U_2, U_3,... *et de leurs carrés* U_1^2, U_2^2, U_3^2,..., *ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique d'un nombre* N *de ces quantités, et la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques, sera moindre qu'une quantité donnée, se réduit à l'unité, quand* N *devient infini.*

Dans l'hypothèse particulière que les quantités U_1, U_2, U_3,... se réduiront à l'unité ou à zéro, selon qu'un événement E a ou n'a pas lieu dans la 1re, 2e, 3e,..., N*ième épreuve*, nous remarquerons que la somme $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N$ donnera le nombre de *répétition* de l'événement E en N épreuves, et la moyenne arithmétique

$$\frac{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N}{N}$$

représentera le rapport du nombre de *répétition* de l'événement E au nombre des *épreuves*. Pour appliquer à ce cas notre dernier théorème, désignons par $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$ les probabilités de l'événement E, dans la 1^{re}, 2^e, $3^e, \ldots$, $N^{ième}$ épreuve; les espérances mathématiques des quantités $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N$ et de leurs carrés

$$U_1^2, \quad U_2^2, \quad U_3^2, \ldots, \quad U_N^2$$

s'exprimeront, d'après notre notation, par

$$\begin{array}{lll} P_1 1 + (1 - P_1) 0, & P_2 1 + (1 - P_2) 0, & P_3 1 + (1 - P_3) 0, \ldots, \\ P_1 1^2 + (1 - P_1) 0^2, & P_2 1^2 + (1 - P_2) 0^2, & P_3 1^2 + (1 - P_3) 0^2, \ldots \end{array}$$

D'où l'on voit que ces espérances mathématiques sont $P_1, P_2, P_3, \ldots$, et que la moyenne arithmétique des N premières espérances est

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_N}{N},$$

c'est-à-dire la moyenne arithmétique des probabilités $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$.

Par suite de cela, et en vertu du théorème précédent, nous arrivons à la conclusion suivante :

Lorsque le nombre des épreuves devient infini, on obtient une probabilité, aussi rapprochée que l'on veut de l'unité, que la différence entre la moyenne arithmétique des probabilités de cet événement, pendant ces épreuves, et le rapport du nombre des répétitions de cet événement, au nombre total des épreuves, est moindre que toute quantité donnée.

Dans le cas particulier où la probabilité de l'événement reste la même pendant toutes les épreuves, nous avons le théorème de Bernoulli.