DE SPERLING, J.-F.

Note sur un théorème de M. Sylvester relatif à la transformation du produit de déterminants du même ordre.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 121-126.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A8_0>

NOTE

SUR

UN THÉORÈME DE M. SYLVESTER

RELATIF

A LA TRANSFORMATION DU PRODUIT DE DÉTERMINANTS DU MÊME ORDRE;

Par M. J.-F. DE SPERLING.

La démonstration de ce théorème, donnée par M. Sylvester dans le journal *The London, Edinburgh and Dublin philosophical magasine and journal of science*, pour l'année 1851, bien que tout à fait rigoureuse, n'est cependant pas, selon moi, assez satisfaisante, en ce sens qu'elle ne montre pas la liaison qui existe entre ce théorème et les autres vérités de la théorie des déterminants; ce qui fait penser que ce théorème a pour but de donner une propriété nouvelle et fondamentale des déterminants, tandis qu'elle n'est qu'un simple corollaire de deux propriétés, depuis longtemps connues, de ces fonctions.

La démonstration de M. Faa de Bruno [*] se trouve être dans le même cas. Je donne dans cette Note une nouvelle démonstration, qui, sans être moins rigoureuse, a l'avantage de donner la susdite liaison.

Théorème.

Le produit de deux déterminants d'un même ordre, n par exemple, peut être exprimé par une somme de plusieurs produits, semblables au produit proposé et qui s'en déduisent de la manière suivante.

Je représente par A et B les deux facteurs du produit donné et je

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. J. Liouville t. XVII (1852).

divise les lignes verticales (ou horizontales) de chacun des systèmes de ces facteurs en deux groupes arbitraires, et soit dans l'un des groupes m le nombre des lignes et dans l'autre $n - m$. Tirons maintenant une ligne verticale (ou horizontale) du premier groupe du système A, ainsi que du premier groupe du système B, et remplaçons-les l'une par l'autre; faisons-en autant pour chacune des lignes du premier groupe des deux systèmes. Nous aurons ainsi deux nouveaux systèmes, et le produit de leurs déterminants se trouvera compris dans la somme identiquement égale au produit proposé. Les autres termes de cette somme s'obtiennent de la même manière, à cette différence près que le groupe de m lignes dans le système de l'un des facteurs, B par exemple, sera formé successivement par toutes les différentes combinaisons des n lignes verticales (ou horizontales) prises m à m, tandis que la subdivision des lignes du système de l'autre facteur A restera constante.

Démonstration.

Supposons que ce théorème soit vrai pour le cas où le nombre des lignes à substituer est $m - 1$, et démontrons que, cette supposition faite, il a lieu aussi pour le nombre m. Ayant donné cette démonstration, nous prouverons la justesse du théorème pour $m = 1$, et c'est de cette manière que nous l'établirons dans toute sa généralité.

1. Considérons l'identité

$$(1)\qquad \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2}\ldots & a_{1,n-m} & 0 & 0\ldots & 0 & a_{1,n} & b_{1,1} & b_{1,2}\ldots & b_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2}\ldots & a_{2,n-m} & 0 & 0\ldots & 0 & a_{2,n} & b_{2,1} & b_{2,2}\ldots & b_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n,1} & a_{n,2}\ldots & a_{n,n-m} & 0 & 0\ldots & 0 & a_{n,n} & b_{n,1} & b_{n,2}\ldots & b_{n,n} \\
0 & 0\ldots & 0 & a_{1,n-m+1} & a_{1,n-m+2}\ldots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_{1,1} & b_{1,2}\ldots & b_{1,n} \\
0 & 0\ldots & 0 & a_{2,n-m+1} & a_{2,n-m+2}\ldots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_{2,1} & b_{2,2}\ldots & b_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0\ldots & 0 & a_{n,n-m+1} & a_{n,n-m+2}\ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & b_{n,1} & b_{n,2}\ldots & b_{n,n}
\end{vmatrix} = 0 \text{ [*]}.$$

[*] Il est facile de vérifier cette équation : en effet, il suffit pour cela de développer le déterminant, formant son premier membre, en une somme de produits de deux dé-

Développons d'après le théorème de Laplace le premier membre de cette identité en une somme de produits de deux déterminants partiels de l'ordre n, et rapportons les n lignes horizontales supérieures à l'un des groupes et les n lignes horizontales inférieures à l'autre groupe. Ce développement contiendra :

1°. Tous les produits possibles dont l'un des facteurs aurait un système de la forme

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,n-m} & \star & \star \cdots \star & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots & a_{2,n-m} & \star & \star \cdots \star & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots & a_{n,n-m} & \star & \star \cdots \star & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

où sur les $m-1$ lignes verticales marquées par des astérisques se trouvent rangées $m-1$ lignes verticales quelconques du système

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} b_{1,1} \cdots & b_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n,1} \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

L'autre facteur aura un système que l'on formera en remplaçant dans le système (3) chaque ligne qui a contribué à la formation du premier facteur par celle du système

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1} \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

qui en a été chassée, dans la même formation, par la ligne à remplacer.

---

terminants partiels (d'après le théorème de Laplace), l'un de l'ordre $n-1$, l'autre de l'ordre $n+1$, en adoptant la subdivision des lignes verticales pour constante, et rapportant au premier groupe les $n-1$ premières lignes et à l'autre les $n+1$ lignes restantes. On trouvera de cette manière que dans tout produit le facteur de l'ordre $n+1$ est nul, parce que son système renferme au moins deux lignes horizontales dont les éléments correspondants sont égaux.

Le signe de chacun des produits de ce genre sera donné par l'expression $(-1)^{m-1}$. En vertu de la supposition faite au début de la démonstration, cette somme peut être représentée par le produit

$$(-1)^{m-1}\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & a_{1,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n,1}\ldots & a_{n,n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1,1}\ldots & b_{1,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ b_{n,1}\ldots & b_{n,n}\end{vmatrix}$$

2°. Tous les produits que l'on peut former en agissant de la même manière que précédemment, sauf à remplacer le système (2) par celui-ci

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots & a_{1,n-m} & \star & \star\ldots\star \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots & a_{2,n-m} & \star & \star\ldots\star \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots & a_{n,n-m} & \star & \star\ldots\star \end{vmatrix}$$

Il est clair que tous ces produits auront dans le développement le même signe qui sera donné par l'expression $(-1)^m$.

En désignant par $\mathbf{S}$ la somme arithmétique de ces derniers produits, nous aurons

$$(-1)^{m-1}\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & a_{1,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n,1}\ldots & a_{n,n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1,1}\ldots & b_{1,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ b_{n,1}\ldots & b_{n,n}\end{vmatrix} + (-1)^m\,\mathbf{S} = 0.$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & a_{1,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n,1}\ldots & a_{n,n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1,1}\ldots & b_{1,n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ b_{n,1}\ldots & b_{n,n}\end{vmatrix} = \mathbf{S},$$

équation qui est une expression analytique du théorème proposé pour le cas où l'on adopte la subdivision des lignes verticales des systèmes. Car bien que la dernière équation ne se rapporte qu'au cas où les lignes à substituer sont les dernières dans le système (4), la vérité du théorème subsiste néanmoins dans tout autre cas, vu que nous n'avons fait aucune supposition relativement à ces lignes et que dans un déterminant toutes les lignes verticales de son système jouent le même rôle.

Pour démontrer notre théorème dans le cas de subdivision en groupes de lignes horizontales du système, il suffit de remplacer dans l'équation ci-dessus les systèmes des déterminants qui y figurent par leurs conjugués.

2. Il nous reste maintenant à prouver que notre théorème se trouve vrai pour le cas $m = 1$; mais c'est ce qui suit immédiatement de la décomposition en somme de produits de deux déterminants partiels de l'ordre n du premier membre de l'identité que voici :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & a_{1,\nu-1} & a_{1,\nu} & a_{1,\nu+1}\ldots & a_{1,n} & b_{1,1}\ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\ldots & a_{n,\nu-1} & a_{n,\nu} & a_{n,\nu+1}\ldots & a_{n,n} & b_{n,1}\ldots & b_{n,n} \\ 0 & 0 & a_{1,\nu} & 0\ldots & 0 & b_{1,1}\ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n,\nu} & 0\ldots & 0 & b_{n,1}\ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, procédant à cette décomposition d'une manière parfaitement analogue à celle que nous avons employée en décomposant le premier membre de l'équation (1), nous trouvons

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}\ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1}\ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots \\ b_{n,1}\ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{S}_p \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots & a_{1,\nu-1} & b_{1,p} & a_{1,\nu+1}\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots & a_{2,\nu-1} & b_{2,p} & a_{2,\nu+1}\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots & a_{n,\nu-1} & b_{n,p} & a_{n,\nu+1}\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2}\ldots & b_{1,p-1} & a_{1,\nu} & b_{1,p+1}\ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2}\ldots & b_{2,p-1} & a_{2,\nu} & b_{1,p+1}\ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & b_{n,2}\ldots & b_{n,p-1} & a_{n,\nu} & b_{n,p+1}\ldots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

où le signe $\mathbf{S}_p$ dénote qu'il faut prendre la somme arithmétique des termes qu'on obtient en substituant successivement dans l'expression sous le signe à la place de p tous les nombres de la série $1, 2, 3, \ldots, n$.

La dernière équation exprime évidemment notre théorème pour le cas $m = 1$.