Journal de mathématiques pures et appliquées

Puiseux

Sur le développement en série de la fonction perturbatrice.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 105-118.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A6_0>

SUR

LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE
DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

Par M. PUISEUX.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

Les formules du Mémoire précédent fournissent l'expression du coefficient du terme général de la fonction perturbatrice sous la forme d'une série procédant suivant les puissances de quatre quantités qui sont le sinus carré de la demi-inclinaison mutuelle des orbites, les deux excentricités et le rapport des grands axes. Il y a avantage en effet à développer le coefficient suivant les puissances de ce dernier rapport, quand les deux planètes sont à des distances très-inégales du Soleil : mais lorsqu'au contraire les distances au Soleil de la planète troublée et de la planète perturbatrice ne sont pas très-différentes l'une de l'autre, le rapport des grands axes cesse d'être une petite fraction, et cette circonstance peut rendre fort lente la convergence de notre série, dans le cas même où les deux orbites seraient peu excentriques et faiblement inclinées l'une sur l'autre. Je me propose de montrer ici comment on peut éviter le développement suivant les puissances du rapport des grands axes, en faisant usage des fonctions b de la *Mécanique céleste*, et obtenir le coefficient du terme général de la fonction perturbatrice sous la forme d'une série procédant suivant les puissances de trois quantités seulement, savoir le sinus carré de la demi-inclinaison mutuelle et les deux excentricités.

Je remarque d'abord que l'inconvénient qu'il s'agit d'éviter n'existe pas pour la partie $f\mathfrak{M}'\,\dfrac{XX'+YY'+ZZ'}{r'^3}$ de R; car les grands axes a et

a' n'y entrent que dans le facteur $\frac{a}{a'^2}$; on pourra donc conserver pour le développement de cette partie les formules du premier Mémoire. D'après cela, pour obtenir les diverses parties CE^{ix} dont se compose le coefficient $\mathfrak{B}_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans $f\mathfrak{M}'\frac{\mathrm{XX}'+\mathrm{YY}'+\mathrm{ZZ}'}{r'^3}$, on devra, après avoir changé le signe du second membre de l'équation (10), substituer dans les équations (10) et (11) les trois systèmes de valeurs

$$\begin{aligned} k&=0, & p&=1, & q&=0,\\ k&=0, & p&=0, & q&=1,\\ k&=1, & p&=0, & q&=0, \end{aligned}$$

en attribuant d'ailleurs aux autres entiers n, n', etc., toutes les valeurs positives propres à vérifier les conditions (12) et (13). Il faut se rappeler que dans l'équation (10) α désigne le rapport $\frac{a}{a'}$, de sorte que si l'on voulait, suivant l'usage, désigner toujours par α celui des deux quotients $\frac{a}{a'}$, $\frac{a'}{a}$ qui est inférieur à l'unité, il faudrait, dans le cas de $a' < a$, écrire $\frac{1}{\alpha}$ à la place de α.

Nous avons maintenant à former le coefficient $\mathfrak{A}_{m,m'}$ de $z^m z'^{m'}$ dans le développement de $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$. Reprenons pour cela l'équation

$$\frac{1}{\Delta}=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)}\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}}\mathrm{Q}^k,$$

dans laquelle nous devons exprimer chacun des facteurs $\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}}$, Q^k en fonction de s et de s'. Nous avons :

$$\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}}=[r^2+r'^2-2rr'\cos(\mathrm{V}-\mathrm{V}'+\sigma)]^{-\frac{2k+1}{2}}:$$

considérons généralement l'expression

$$f(r,r')=(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{-t},$$

où l'exposant t est un nombre réel quelconque. La fonction $f(r, r')$ sera, pour des valeurs réelles de r, de r' et de θ, développable en une suite de termes proportionnels aux cosinus des multiples de θ; nous pouvons donc poser

$$f(r, r') = \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_t^{(l)} \cos l\theta,$$

$(r, r')_t^{(l)}$ désignant un coefficient qui dépend des valeurs de r et de r', de l'exposant t et de l'indice l. Il s'ensuivra

$$\begin{aligned} P^{-\frac{2k+1}{2}} &= \sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} \cos l(V - V' + \sigma) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} E^{il(V-V'+\sigma)} + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} E^{-il(V-V'+\sigma)}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$E^{iV} = s\left(1 - \frac{\omega}{s}\right)(1 - \omega s)^{-1}, \quad E^{-iV} = \frac{1}{s}(1 - \omega s)\left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^{-1},$$

$$E^{iV'} = s'\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)(1 - \omega' s')^{-1}, \quad E^{-iV'} = \frac{1}{s'}(1 - \omega' s')\left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-1};$$

en substituant ces valeurs on trouvera

$$P^{-\frac{2k+1}{2}} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} s^l s'^{-l} \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^l (1 - \omega s)^{-l} (1 - \omega' s')^l \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-l} E^{il\sigma} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} (r, r')_{k+\frac{1}{2}}^{(l)} s^{-l} s'^l (1 - \omega s)^l \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^{-l} \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^l (1 - \omega' s')^{-l} E^{-il\sigma} \end{aligned} \right\}.$$

Posons maintenant

$$r = a + \delta a, \quad r' = a' + \delta a',$$

de sorte qu'on ait

$$\delta a = -ae\cos u = -a\varepsilon\omega\left(s+\frac{1}{s}\right),$$

$$\delta a' = -a'e'\cos u' = -a'\varepsilon'\omega'\left(s'+\frac{1}{s'}\right),$$

puis examinons dans quel cas la quantité $f(r, r')$ et par suite le coefficient

$$(r, r')_l^{(l)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(r, r')\cos l\theta\, d\theta\ [*]$$

peuvent être développés suivant les puissances croissantes de δa et de $\delta a'$.

Nous observerons à cet effet que la fonction

$$f(a + x\delta a, a' + x\delta a') = \mathrm{F}(x)$$

pourra être développée suivant les puissances entières de x, tant que le module de x sera inférieur au plus petit des modules des valeurs de x qui vérifient l'équation

$$(a + x\delta a)^2 + (a' + x\delta a')^2 - 2(a + x\delta a)(a' + x\delta a')\cos\theta = 0.$$

Ces valeurs de x sont données par la formule

$$x = \frac{a'\mathrm{E}^{\pm i\theta} - a}{\delta a - \delta a'\mathrm{E}^{\pm i\theta}} = \frac{a'\mathrm{E}^{\pm i\theta} - a}{a'e'\cos u'\mathrm{E}^{\pm i\theta} - ae\cos u},$$

et on reconnaît aisément que leurs modules sont l'un et l'autre égaux ou supérieurs à la valeur numérique de la quantité $\frac{a'-a}{ae+a'e'}$. Si donc le module de x est inférieur à cette valeur numérique, on aura par la formule de Maclaurin

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{x^q}{1.2\ldots q}\mathrm{F}^{(q)}(0).$$

---

[*] Il faut, comme on sait, réduire à moitié le second membre de cette formule, quand on y suppose $l = 0$.

En particulier, lorsque la valeur numérique de $\frac{a'-a}{ae+a'e'}$ sera supérieure à l'unité, on pourra dans l'équation précédente faire $x=1$ et elle deviendra

$$f(r, r') = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{1.2\ldots q} \cdot \mathrm{F}^{(q)}(0)$$

$$= \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=q} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots(q-p)} \cdot \frac{d^q f(a,a')}{da^p\, da'^{q-p}} \delta a^p\, \delta a'^{q-p},$$

ou bien, en remplaçant q par $p+p'$,

$$f(r, r') = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots p'} \cdot \frac{d^{p+p'} f(a, a')}{da^p\, da'^{p'}} \delta a^p\, \delta a'^{p'}.$$

On voit donc que la fonction $f(r, r')$ et par suite la quantité $(r, r')_t^{(l)}$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de δa et de $\delta a'$, lorsque la valeur numérique de $\frac{ae+a'e'}{a'-a}$ sera inférieure à l'unité. Admettons que cette condition soit remplie, et elle le sera généralement à cause de la petitesse des excentricités : on aura

$$(r, r')_t^{(l)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots p'} \frac{d^{p+p'}(a, a')_t^{(l)}}{da^p\, da'^{p'}} \delta a^p\, \delta a'^{p'}$$

$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} (-1)^{p+p'} \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots p'} \frac{d^{p+p'}(a, a')_t^{(l)}}{da^p\, da'^{p'}}$$

$$\times (a\varepsilon\omega)^p (a'\varepsilon'\omega')^{p'} \left(s+\frac{1}{s}\right)^p \left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'}.$$

Il s'ensuivra

$$\mathrm{P}^{-\frac{2k+1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{G} s^l s'^{-l} \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^l (1 - \omega s)^{-l} (1 - \omega' s')^l \\ \times \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-l} \left(s + \frac{1}{s}\right)^p \left(s' + \frac{1}{s'}\right)^{p'} \mathrm{E}^{il\sigma} \end{array} \right\} \\ \displaystyle + \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{G} s^{-l} s'^l (1 - \omega s)^l \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^{-l} \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^l \\ \times (1 - \omega' s')^{-l} \left(s + \frac{1}{s}\right)^p \left(s' + \frac{1}{s'}\right)^{p'} \mathrm{E}^{-il\sigma} \end{array} \right\} \end{array} \right\},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{G} = \frac{(-1)^{p+p'}}{2} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots p'} \; \frac{d^{p+p'} (a, a')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p \, da'^{p'}} \; (a\varepsilon\omega)^p (a'\varepsilon'\omega')^{p'},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\Delta} = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \mathrm{G} s^l s'^{-l} \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^l (1 - \omega s)^{-l} (1 - \omega' s')^l \\ \times \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^{-l} \left(s + \frac{1}{s}\right)^p \left(s' + \frac{1}{s'}\right)^{p'} \mathrm{E}^{il\sigma} \mathrm{Q}^k \end{array} \right\} \\ \displaystyle + \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \mathrm{G} s^{-l} s'^l (1 - \omega s)^l \left(1 - \frac{\omega}{s}\right)^{-l} \left(1 - \frac{\omega'}{s'}\right)^l \\ \times (1 - \omega' s')^{-l} \left(s + \frac{1}{s}\right)^p \left(s' + \frac{1}{s'}\right)^{p'} \mathrm{E}^{-il\sigma} \mathrm{Q}^k \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Il faut maintenant dans les deux parties dont cette expression de $\frac{1}{\Delta}$ se compose mettre pour Q^k sa valeur en fonction de s et de s'. Dans la première partie, nous remplacerons Q^k par l'expression obtenue dans le précédent Mémoire, savoir

$$\mathrm{Q}^k = \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n'=0}^{n'=k} \mathrm{H} s^{2n-k} s'^{2n'-k} \left(1 - \frac{e}{s}\right)^n (1 - es)^{k-n} \left(1 - \frac{e'}{s'}\right)^{n'} (1 - e's')^{k-n'}$$
$$\times \mathrm{E}^{i[(2n-k)\varphi + (2n'-k)\varphi']},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\mathrm{H} = (-1)^{k+n+n'} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} (aa'c)^k.$$

Mais dans la seconde partie nous mettrons pour Q^k la valeur

$$\mathrm{Q}^n = \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n=0}^{n'=k} \mathrm{H} s^{-2n+k} s'^{-2n'+k} (1-es)^n \left(1-\frac{e}{s}\right)^{k-n} (1-e's')^{n'} \left(1-\frac{e'}{s'}\right)^{k-n'} \mathrm{E}^{-i[(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']},$$

qui se déduit de la précédente en y changeant n en $k-n$ et n' en $k-n'$. Nous trouverons ainsi

$$-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta} = -f\mathfrak{M}' \times \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n'=0}^{n'=k} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \mathrm{GH} s^{l+2n-k} s'^{-l+2n'-k} \\ &\times \left(1-\frac{\omega}{s}\right)^l (1-\omega s)^{-l} (1-\omega' s')^l \left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^{-l} \\ &\times \left(s+\frac{1}{s}\right)^p \left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'} \left(1-\frac{e}{s}\right)^n (1-es)^{k-n} \\ &\times \left(1-\frac{e'}{s'}\right)^{n'} (1-e's')^{k-n'} \mathrm{E}^{i[l\sigma+(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']} \end{aligned} \right\} \\ +&\sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{p'=0}^{p'=\infty} \sum_{n=0}^{n=k} \sum_{n'=0}^{n'=k} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^k \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \mathrm{GH} s^{-l-2n+k} s'^{l-2n'+k} \\ &\times (1-\omega s)^l \left(1-\frac{\omega}{s}\right)^{-l} \left(1-\frac{\omega'}{s'}\right)^l (1-\omega' s')^{-l} \\ &\times \left(s+\frac{1}{s}\right)^p \left(s'+\frac{1}{s'}\right)^{p'} (1-es)^n \left(1-\frac{e}{s}\right)^{k-n} \\ &\times (1-e's')^{n'} \left(1-\frac{e'}{s'}\right)^{k-n'} \mathrm{E}^{-i[l\sigma+(2n-k)\varphi+(2n'-k)\varphi']} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Il reste à multiplier cette valeur de $-\frac{f\mathcal{M}'}{\Delta}$ par la quantité Π du premier Mémoire, et à chercher dans le produit le coefficient de $s^m s'^{m'}$, lequel ne sera autre chose que $\mathcal{A}_{m,m'}$. On arrivera ainsi à la proposition suivante :

Soient

$$k,\ l,\ p,\ p',\ n,\ n',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \varpi,\ \varpi',\ \iota,\ \vartheta,\ \iota',\ \vartheta',\ g,\ g'\ \nu,\ \nu'$$

des nombres entiers positifs satisfaisant aux inégalités

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \lambda < l+1, & \lambda' < l+1, & \varpi < p, & \varpi' < p', & \iota < n, \\ \vartheta < k-n, & \iota' < n', & \vartheta' < k-n', & \nu < g, & \nu' < g' : \end{array}\right.$$

faisons

$$(b)\quad C = -f\mathcal{M}' \times \left\{\begin{array}{l} (-1)^{n+n'+p+p'+\lambda+\lambda'+\iota+\vartheta+\iota'+\vartheta'+\nu+\nu'} \cdot 2^{\iota+\vartheta+\iota'+\vartheta'-1} \\ \times \dfrac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n} \cdot \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n'+1)}{1.2\ldots n'} \\ \times \dfrac{(l+1)l\ldots(l-\lambda+2)}{1.2\ldots\lambda} \cdot \dfrac{(l-1)l\ldots(l+\mu-2)}{1.2\ldots\mu} \\ \times \dfrac{(l+1)l\ldots(l-\lambda'+2)}{1.2\ldots\lambda'} \cdot \dfrac{(l-1)l\ldots(l+\mu'-2)}{1.2\ldots\mu'} \\ \times \dfrac{1}{1.2\ldots\varpi \times 1.2\ldots(p-\varpi)} \cdot \dfrac{1}{1.2\ldots\varpi' \times 1.2\ldots(p'-\varpi')} \\ \times \dfrac{n(n-1)\ldots(n-\iota+1)}{1.2\ldots\iota} \cdot \dfrac{(k-n)(k-n-1)\ldots(k-n-\vartheta+1)}{1.2\ldots\vartheta} \\ \times \dfrac{n'(n'-1)\ldots(n'-\iota'+1)}{1.2\ldots\iota'} \cdot \dfrac{(k-n')(k-n'-1)\ldots(k-n'-\vartheta'+1)}{1.2\ldots\vartheta'} \\ \times \dfrac{m^g}{1.2\ldots\nu \times 1.2\ldots(g-\nu)} \cdot \dfrac{m'^{g'}}{1.2\ldots\nu' \times 1.2\ldots(g'-\nu')} \\ \times \dfrac{d^{p+p'}(a,a')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\, da'^{p'}} \cdot a^{k+p}\, a'^{k+p'}\, \varepsilon^{p+\iota+\vartheta+g+1}\, \varepsilon'^{p'+\iota'+\vartheta'+g'+1} \\ \times c^k\, \omega^{p+\lambda+\mu+\iota+\vartheta+g}\, \omega'^{p'+\lambda'+\mu'+\iota'+\vartheta'+g'}. \end{array}\right\},$$

$$(c)\quad \varkappa = l\sigma + (2n-k)\varphi + (2n'-k)\varphi'.$$

Cela posé, nommons A_1 *la somme des valeurs que prend l'expression* $CE^{i\varkappa}$, *quand on attribue aux entiers* k, l, p, *etc., toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier, avec les inégalités* (a), *les deux équations*

$$(d_1)\left\{\begin{array}{l} l + 2n - k - \lambda + \mu + p - 2\varpi - \iota + \aleph + g - 2\nu = m, \\ -l + 2n' - k + \lambda' - \mu' + p' - 2\varpi' - \iota' + \aleph' + g' - 2\nu' = m'. \end{array}\right.$$

Nommons de même A_2 *la somme des valeurs que prend l'expression* $CE^{-i\varkappa}$, *quand on attribue aux entiers* k, l, p, *etc., toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier, avec les inégalités* (a), *les deux équations*

$$(d_2)\left\{\begin{array}{l} -l - 2n + k + \lambda - \mu - p + 2\varpi + \iota - \aleph + g - 2\nu = m, \\ l - 2n' + k - \lambda' + \mu' - p' + 2\varpi' + \iota' - \aleph' + g' - 2\nu' = m'. \end{array}\right.$$

On aura

$$\mathcal{A}_{m,m'} = A_1 + A_2.$$

Supposons qu'on ait attribué aux entiers k, l, p, etc., des valeurs propres à vérifier l'un des deux groupes d'équations désignés par (d_1) et (d_2), par exemple le groupe (d_1). Si l'on remplace m par $-m$, m' par $-m'$, ν par $g-\nu$ et ν' par $g'-\nu'$, les autres entiers conservant leurs valeurs primitives, les équations (d_2) seront vérifiées, et le coefficient C ne changera pas non plus que l'angle $\varkappa$. On vérifie de cette manière qu'à chaque terme $CE^{i\varkappa} z^m z'^{m'}$ de $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$ répond toujours cet autre $CE^{-i\varkappa} z^{-m} z'^{-m'}$, et en réunissant deux à deux ces termes correspondants, on aura $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$, exprimé par une somme de termes réels de la forme $2C\cos(m\zeta + m'\zeta' + \varkappa)$.

Lorsqu'on suit pour le développement de $-\frac{f\mathfrak{M}'}{\Delta}$ la marche qui vient d'être expliquée, le coefficient C ne contient plus les demi grands axes a et a' que dans la fonction

$$\frac{d^{p+p'}(aa')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\, da'^{p'}} a^{k+p} a'^{k+p'},$$

qui s'exprime aisément au moyen des fonctions b de la *Mécanique céleste* et de leurs dérivées. En effet si l'on suppose, pour fixer les idées, $a < a'$ et qu'on fasse $\frac{a}{a'} = \alpha$, la fonction de α que Laplace désigne par $b_t^{(l)}$ est définie par l'équation

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta)^{-t} = \frac{1}{2} b_t^{(0)} + b_t^{(1)}\cos\theta + b_t^{(2)}\cos 2\theta + \ldots.$$

Mais nous avons posé

$$(a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\theta)^{-t} = (a, a')_t^{(0)} + (a, a')_t^{(1)}\cos\theta + (a, a')_t^{(2)}\cos 2\theta + \ldots;$$

la comparaison de ces deux équations nous donne

$$(a, a')_t^{(l)} = a'^{-2t} b_t^{(l)},$$

le second membre devant être réduit à moitié pour $l = 0$. Cette formule exprime la quantité $(a, a')_t^{(l)}$ au moyen de $b_t^{(l)}$, et en la différentiant successivement par rapport à a et à a', on en déduira l'expression de $\frac{d^{p+p'}(a, a')_t^{(l)}}{da^p\, da'^{p'}}$ en fonction de $b_t^{(l)}$ et de ses dérivées prises par rapport à α.

J'indique en passant des formules qui rendront ces différentiations très-faciles : représentons par (n, h) l'expression

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-h+1)^2(n-h)}{1.2\ldots h},$$

dans laquelle tous les facteurs du numérateur sont élevés au carré, excepté le premier et le dernier, en sorte qu'on ait

$$(n, 0) = 1, \quad (n, 1) = n(n-1), \quad (n, 2) = \frac{n(n-1)^2(n-2)}{1.2}, \ldots$$

Soit d'ailleurs v une fonction quelconque de α; ce sera, par exemple, une des fonctions $b_t^{(l)}$: on aura, quel que soit l'exposant q,

$$a'^{p+q}\frac{d^p(a'^{-q}v)}{da^p}=\frac{d^p v}{d\alpha^p},$$

$$(-1)^{p'}a'^{p'+q}\frac{d^{p'}(a'^{-q}v)}{da'^{p'}}=\alpha^{p'}\frac{d^{p'}v}{d\alpha^{p'}}$$

$$+\left[(p',1)+\frac{p'}{1}\cdot q\right]\alpha^{p'-1}\frac{d^{p'-1}v}{d\alpha^{p'-1}}$$

$$+\left[(p',2)+\frac{p'}{1}\cdot q(p'-1,1)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q(q+1)\right]\alpha^{p'-2}\frac{d^{p'-2}v}{d\alpha^{p'-2}}$$

$$+\left[(p',3)+\frac{p'}{1}\cdot q(p'-1,2)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q(q+1)(p'-2,1)+\frac{p'(p'-1)(p'-2)}{1.2.3}\cdot q(q+1)(q+2)\right]$$

$$\times\alpha^{p'-3}\frac{d^{p'-3}v}{d\alpha^{p'-3}}+\ldots,$$

$$(-1)^{p'}a'^{p+p'+q}\frac{d^{p+p'}(a'^{-q}v)}{da^p\,da'^{p'}}=\frac{d^p\left(\alpha^{p'}\frac{d^{p'}v}{d\alpha^{p'}}\right)}{d\alpha^p}$$

$$+\left[(p',1)+\frac{p'}{1}\cdot q\right]\frac{d^p\left(\alpha^{p'-1}\frac{d^{p'-1}v}{d\alpha^{p'-1}}\right)}{d\alpha^p}$$

$$+\left[(p',2)+\frac{p'}{1}\cdot q(p'-1,1)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q(q+1)\right]\frac{d^p\left(\alpha^{p'-2}\frac{d^{p'-2}v}{d\alpha^{p'-2}}\right)}{d\alpha^p}$$

$$+\left[(p',3)+\frac{p'}{1}\cdot q(p'-1,2)+\frac{p'(p'-1)}{1.2}\cdot q(q+1)(p'-2,1)+\frac{p'(p'-1)(p'-2)}{1.2.3}\cdot q(q+1)(q+2)\right]$$

$$\times\frac{d^p\left(\alpha^{p'-3}\frac{d^{p'-3}v}{d\alpha^{p'-3}}\right)}{d\alpha^p}+\ldots.$$

Comme dans le Mémoire précédent, nous désignerons par N l'ordre du coefficient C, les excentricités et l'inclinaison mutuelle étant regardées comme de petites quantités du premier ordre; nous aurons ici

$$N=2k+p+p'+\lambda+\mu+\lambda'+\mu'+\iota+\iota'+\mathfrak{s}+\mathfrak{s}'+g+g'.$$

Mais selon que les entiers k, l, etc., satisfont aux équations (d_1) ou aux équations (d_2), on a

$$m+m'=2n+2n'-2k-\lambda+\mu+\lambda'-\mu'+p-2\varpi+p'$$
$$-2\varpi'-\iota+\vartheta-\iota'+\vartheta'+g-2\nu+g'-2\nu',$$

ou bien

$$m+m'=2k-2n-2n'+\lambda-\mu-\lambda'+\mu'-p+2\varpi-p'$$
$$+2\varpi'+\iota-\vartheta+\iota'-\vartheta'+g-2\nu+g'-2\nu'.$$

Il en résulte, dans le premier cas,

$$\mathrm{N}+(m+m')$$
$$=2[n+n'+\mu+\lambda'+(p-\varpi)+(p'-\varpi')+\vartheta+\vartheta'+(g-\nu)+(g'-\nu')],$$
$$\mathrm{N}-(m+m')$$
$$=2[(k-n)+(k-n')+\lambda+\mu'+\varpi+\varpi'+\iota+\iota'+\nu+\nu'],$$

et, dans le second cas,

$$\mathrm{N}+(m+m')$$
$$=2[(k-n)+(k-n')+\lambda+\mu'+\varpi+\varpi'+\iota+\iota'+(g-\nu)+(g'-\nu')],$$
$$\mathrm{N}-(m+m')$$
$$=2[n+n'+\mu+\lambda'+(p-\varpi)+(p'-\varpi')+\vartheta+\vartheta'+\nu+\nu'].$$

Par ces formules jointes aux inégalités (a), on voit que l'ordre N n'est jamais inférieur à la valeur numérique de $m+m'$, et que quand il la surpasse, c'est d'un nombre pair.

Proposons-nous, en particulier, de former les parties du coefficient $\mathcal{A}_{m,m'}$ qui sont précisément d'un ordre égal à la valeur numérique de $m+m'$. En supposant, pour fixer les idées, la somme $m+m'$ positive, on voit que si les entiers k, l, etc., satisfont aux équations (d_1), on devra avoir

$$n=n'=k,\quad \lambda=\mu'=\varpi=\varpi'=\iota=\iota'=\vartheta=\vartheta'=\nu=\nu'=0,$$

et que si les entiers k, l, etc., vérifient les équations (d_2), on devra avoir

$$n=n'=\mu=\lambda'=\iota=\iota'=\vartheta=\vartheta'=\nu=\nu'=0,\quad p=\varpi,\quad p'=\varpi'.$$

De là on conclut aisément la règle suivante :

La somme $m+m'$ *étant supposée positive, soit d'abord*

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} f\,\mathfrak{M}'(-1)^{p+p'+\lambda'} \cdot \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \frac{(l-1)l\ldots(l+\mu-2)}{1.2\ldots\mu} \\ \times \frac{(l+1)l\ldots(l-\lambda'+2)}{1.2\ldots\lambda'} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p'} \cdot \frac{m^g}{1.2\ldots g} \cdot \frac{m'^{g'}}{1.2\ldots g'} \\ \times \frac{d^{p+p'}(a,a')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\,da'^{p'}} a^{k+p} a'^{k+p'} \varepsilon^{p+g+1} \varepsilon'^{p'+g'+1} c^k \\ \times \omega^{p+\mu+g} \omega'^{p'+\lambda'+g'} \end{array} \right\},$$

$$\varkappa_1 = l\sigma + k(\varphi+\varphi'),$$

et nommons B_1 *la somme des valeurs que prend le produit* $C_1 E^{i\varkappa_1}$, *quand on attribue aux entiers* $k, l, p, p', \mu, \lambda', g, g'$ *toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les conditions*

$$\lambda' < l+1, \quad l+k+\mu+p+g = m, \quad -l+k+\lambda'+p'+g' = m'.$$

Soit, en second lieu,

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} f\,\mathfrak{M}'(-1)^{p+p'+\lambda} \cdot \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots(2k)} \cdot \frac{(l+1)l\ldots(l-\lambda-2)}{1.2\ldots\lambda} \\ \times \frac{(l-1)l\ldots(l+\mu'-2)}{1.2\ldots\mu'} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p'} \cdot \frac{m^g}{1.2\ldots g} \cdot \frac{m'^{g'}}{1.2\ldots g'} \\ \times \frac{d^{p+p'}(a,a')^{(l)}_{k+\frac{1}{2}}}{da^p\,da'^{p'}} a^{k+p} a'^{k+p'} \varepsilon^{p+g+1} \varepsilon'^{p'+g'+1} c^k \\ \times \omega^{p+\lambda+g} \omega'^{p'+\mu'+g'} \end{array} \right\},$$

$$\varkappa_2 = -l\sigma + k(\varphi+\varphi'),$$

et nommons B_2 *la somme des valeurs que prend le produit* $C_2 E^{i\varkappa_2}$, *quand on attribue aux entiers* $k, l, p, p', \lambda, \mu', g, g'$ *toutes les valeurs positives ou nulles propres à vérifier les conditions*

$$\lambda < l+1, \quad -l+k+\lambda+p+g = m, \quad l+k+\mu'+p'+g' = m'.$$

La somme $B_1 + B_2$ *sera dans* $\mathcal{A}_{m,m'}$ *la partie qui est précisément de l'ordre* $m + m'$.

On peut remarquer que si les nombres m et m' sont de signes contraires, l'une des deux équations

$$l + k + \mu + p + g = m, \quad l + k + \mu' + p' + g' = m'$$

est impossible, et qu'ainsi des deux sommes B_1, B_2, il y en a une qui se réduit à zéro.