LIOUVILLE, J.

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 23$.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 391-392.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A32_0>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\mu + 23$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m, de la forme $40\mu + 23$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = (10x + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que y est impair et positif : quant à p, c'est un nombre premier ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$) qui ne divise pas y.

L'expression $(10x + 3)^2$, en y prenant x positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$10s + 3, \quad 10s - 3,$$

savoir

$$3^2, \ 7^2, \ 13^2, \ 17^2, \ldots;$$

notre théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$m - 3^2, \quad m - 7^2, \quad m - 13^2, \quad m - 17^2, \ldots,$$

qu'on peut exprimer par

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y. La forme ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$), que nous attribuons à p, n'est qu'une conséquence de l'équation même que nous posons,

$$m = (10x + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

et de la forme linéaire attribuée à m, qui est $40\mu + 23$.

Le plus plus petit nombre de la forme $40\mu + 23$ est 23; c'est un nombre premier : or on a

$$23 = 3^2 + 2.7.1^2,$$

conformément à notre théorème. Ensuite vient (en laissant de côté les nombres composés)

$$103 = 3^2 + 2.47.1^2;$$

ici on ne doit pas compter l'équation $103 = 7^2 + 2.3^3$, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$. Je note encore 223, qui nous offre une seule décomposition canonique :

$$223 = 3^2 + 2.107.$$

Pour 263, il y en a trois, savoir :

$$3^2 + 2.127.1^2, \quad 7^2 + 2.107.1^2, \quad 13^2 + 2.47.1^2;$$

de même pour 383, qui peut s'écrire :

$$7^2 + 2.167.1^2, \quad 13^2 + 2.107.1^2, \quad 17^2 + 2.47.1^2.$$

Ces exemples suffiront.