JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Théorème concernant les nombres premiers de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu + 11, 40\mu + 19$.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 387-388.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A30_0>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $40\mu+11$, $40\mu+19$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu+11$, $40\mu+19$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 5x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier ($20\nu+3$ ou $20\nu+7$) qui ne divise pas y.

En d'autres termes, si d'un nombre premier donné m, de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu+11$, $40\mu+19$, on retranche les termes de la suite

$$5.1^2,\ 5.3^2,\ 5.5^2,\ 5.7^2,\ 5.9^2,\ldots,$$

qui ont une valeur moindre, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas y. Quant à la forme linéaire de p ($20\nu+3$ ou $20\nu+7$), elle est une conséquence de l'équation même

$$m = 5x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

qui dans nos hypothèses sur m entraîne ces deux congruences

$$p \equiv 3 \ (\text{mod. } 4), \qquad p \equiv \pm 3 \ (\text{mod. } 5).$$

Considérons d'abord les nombres premiers $40\mu+11$. Le plus petit est 11, et l'on a

$$11 = 5.1^2 + 2.3.1^2,$$

conformément à notre théorème, 3 étant contenu dans la forme $20\nu + 3$. Ensuite vient 131, pour lequel on a les trois décompositions canoniques

$$5.1^2 + 2.7.3^2, \quad 5.3^2 + 2.43.1^2, \quad 5.5^2 + 2.3.1^2.$$

On en a également trois pour 211, savoir :

$$5.1^2 + 2.103.1^2, \quad 5.3^2 + 2.83.1^2, \quad 5.5^2 + 2.43.1^2.$$

Passons à la forme $40\mu + 19$. D'abord

$$19 = 5.1^2 + 2.7.1^2,$$

et

$$59 = 5.3^2 + 2.7.1^2;$$

car il ne faut pas compter l'équation $59 = 5.1^2 + 2.3^3$, l'exposant 3 n'étant pas de la forme $4l + 1$. Pour 139, qui vient ensuite, on a trois décompositions :

$$5.1^2 + 2.67.1^2, \quad 5.3^2 + 2.47.1^2, \quad 5.5^2 + 2.47.1^2.$$

Pour 179, on n'en a qu'une seule de l'espèce exigée, savoir :

$$179 = 5.3^2 + 2.67.1^2;$$

mais pour 379, on en trouve de nouveau trois,

$$5.3^2 + 2.167.1^2, \quad 5.5^2 + 2.127.1^2, \quad 5.7^2 + 2.67.1^2.$$

Il y en a aussi trois pour 419; les voici :

$$5.1^2 + 2.23.3^2, \quad 5.5^2 + 2.3.7^2, \quad 5.9^2 + 2.7.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.