JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

BESGE

Somme d'une série.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 367-368.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A28_0>

SOMME D'UNE SÉRIE;

PAR M. BESGE.

La série dont je veux parler, savoir

$$1+\frac{1}{1}\frac{1}{2.3^3}+\frac{1.3}{1.2}\frac{1}{2^2 5^3}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\frac{1}{2^3 7^3}+\ldots,$$

a pour terme général

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{2^n(2n+1)^3}.$$

J'ignore si l'on a déjà remarqué la valeur simple que voici de la somme S de cette série :

$$S=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{4}(\log 2)^2.$$

En tout cas cette valeur résulte immédiatement de l'équation suivante, que je trouve dans un Mémoire de M. Vinckler :

$$\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{\sqrt{e^{2t}-1}}=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}(\log 2)^2.$$

Observez, en effet, que

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}}=e^{-t}\left(1-e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

puis développez

$$\left(1-e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

en série par la formule du binôme, effectuez ensuite les intégrations et divisez par 2. Vous arriverez précisément à l'équation écrite plus haut :

$$S = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4} (\log 2)^2.$$

On me pardonnera, j'espère, ces quelques lignes au sujet d'une série dont la forme est élégante. Au reste, mon but est surtout d'attirer l'attention des géomètres sur les travaux de M. Vinckler, où l'on trouvera plusieurs résultats curieux.