JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme $24k+11$.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 309-310.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A25_0>

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24k+11$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Voici, au sujet des nombres premiers $24k+11$, un théorème nouveau qu'on pourra joindre à celui que j'ai déjà donné dans le cahier de *mai*, à savoir que, si d'un nombre donné de cette espèce on retranche les carrés impairs de grandeur moindre qui ne sont pas divisibles par 3, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2q^{4l+1}y^2,$$

y étant un entier impair, et q un nombre premier $12g+5$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, pour chaque nombre premier donné m, de la forme $24k+11$, on peut poser un nombre impair de fois l'équation

$$m = x^2 + 2q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant impairs, x non divisible par 3, et q étant un nombre premier $12g+5$ qui ne divise pas y.

Au reste on pourrait supprimer la condition relative à x de ne pas être divisible par 3; car avec les formes linéaires assignées à m et à q dans notre équation, il est impossible que 3 divise x, ni y. Ou bien en exigeant que x soit premier à 3, on pourrait ne rien dire de la forme linéaire de q, qui dès lors est forcée. Mais tous ces détails importent peu. Passons aux exemples.

Soit d'abord $k=0$, d'où le nombre premier $m=11$: en retranchant 1, on a pour reste 10, et

$$10 = 2.5.1^2,$$

conformément à notre théorème, car le nombre premier 5 est compris dans la formule $12g + 5$ où l'on peut faire $g = 0$. Il ne faut pas retrancher 9 de 11, puisque 9 est divisible par 3.

En prenant $k = 2$, on a aussi un nombre premier $m = 59$. Les carrés à retrancher sont 1, 25, 49, d'où ces trois restes 58, 34 et 10, qui tous les trois sont susceptibles d'une décomposition canonique, savoir

$$58 = 2.29.1^2, \quad 34 = 2.17.1^2, \quad 10 = 2.5.1^2.$$

Enfin le nombre premier 83, qui répond à $k = 3$, vérifie aussi notre théorème en donnant un nombre impair d'équations de la forme voulue :

$$83 = 1^2 + 2.41.1^2,$$
$$83 = 5^2 + 2.29.1^2,$$
$$83 = 7^2 + 2.17.1^2.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces vérifications numériques.