LIOUVILLE, J.

Sur les nombres premiers de la forme $16k + 7$.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 301-302.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A22_0>

SUR

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $16k + 7$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Plusieurs fois déjà nous nous sommes occupés des nombres premiers de la forme $16k + 7$. En particulier nous avons cité et démontré de nouveau ce théorème de M. Bouniakowsky, que pour tout nombre m de l'espèce indiquée on peut poser un nombre impair de fois l'équation

$$m = 2x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier de la forme $8\mu + 5$, qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

Or, en continuant à désigner par m un nombre premier $16k + 7$, je trouve deux autres théorèmes non moins intéressants.

1°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = x^2 + 2q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs et q un nombre premier de la forme $8\mu + 3$, qui ne divise pas y.

2°. On peut toujours poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 4x^2 + q^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et q un nombre premier de la forme $8\mu + 3$, qui ne divise pas y.

On voit que, dans nos deux équations, le nombre premier q, au second membre, est de la forme $8\mu + 3$, tandis que le nombre premier p est de la forme $8\mu + 5$ dans l'équation de M. Bouniakowsky. Mais les trois équations doivent avoir lieu (et chacune un nombre impair de fois) pour chaque nombre premier m de la forme $16k + 7$.

Ainsi le nombre 7 doit y satisfaire, et en effet, on a non-seulement l'équation de M. Bouniakowsky

$$7 = 2.1^2 + 5.1^2,$$

mais encore les deux suivantes :

$$7 = 1^2 + 2.3.1^2$$

et

$$7 = 4.1^2 + 3.1^2.$$

De même, on a non-seulement

$$23 = 2.3^2 + 5.1^2,$$

mais encore

$$23 = 1^2 + 2.11.1^2$$

et

$$23 = 4.1^2 + 19.1^2.$$

Il ne faut pas compter l'équation

$$23 = 3^2 + 2.7.1^2$$

comme une des nôtres, parce que le nombre premier 7 n'est pas de la forme $8\mu + 3$.