KRONECKER

Sur le nombre des classes différentes de formes quadratiques à déterminants négatifs (Traduction de M. Hoûel).

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 289-299.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A20_0>

SUR

LE NOMBRE DES CLASSES DIFFÉRENTES DE FORMES QUADRATIQUES A DÉTERMINANTS NÉGATIFS;

PAR M. KRONECKER.

(JOURNAL DE CRELLE, tome LVII, page 248.)

(TRADUCTION DE M. HOÜEL.)

L'étude des fonctions elliptiques pour lesquelles a lieu la multiplication complexe, m'a fait connaître des formules extrêmement remarquables pour le nombre des différentes classes non équivalentes de formes quadratiques à déterminants négatifs. J'ai déjà publié quelques-unes de ces formules dans une Note imprimée dans le *Compte rendu de l'Académie de Berlin* du mois d'octobre 1857; et dans cette Note, ayant seulement en vue de faire ressortir le caractère général de ces formules, je n'ai inséré que celles qui pouvaient être représentées par les notations les plus simples. Dans le Mémoire actuel, je vais présenter *toutes* les formules en question, et pour cela j'établirai les notations suivantes :

Je désignerai par

n un nombre entier positif quelconque;

m un nombre positif impair quelconque;

r un nombre positif quelconque de la forme $8k-1$;

s un nombre positif quelconque de la forme $8k+1$.

Soient, de plus,

$G(n)$ le nombre de toutes les classes non équivalentes de formes quadratiques, pour le déterminant $-n$;

$F(n)$ le nombre des classes différentes des formes quadratiques de déterminant $-n$, et *telles*, que l'un au moins des deux coefficients extrêmes soit impair;

$\mathrm{X}(n)$ la somme de tous les diviseurs *impairs* de n;

$\Phi(n)$ la somme de *tous* les diviseurs de n;

$\Psi(n)$ le nombre dont la somme des diviseurs de n qui sont plus grands que $\sqrt{n}$ surpasse la somme de ceux qui sont moindres que $\sqrt{n}$;

$\Phi'(n)$ la somme des diviseurs de n qui sont de la forme $8k\pm 1$, diminuée de la somme de ceux qui sont de la forme $8k\pm 3$;

$\Psi'(n)$ la somme des diviseurs $8k\pm 1$ plus grands que $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k\pm 3$ moindres que $\sqrt{n}$, diminuée de la somme des diviseurs $8k\pm 1$ moindres que $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k\pm 3$ plus grands que $\sqrt{n}$;

$\varphi(n)$ la quantité dont le nombre des diviseurs de la forme $4k+1$ surpasse le nombre des diviseurs de la forme $4k-1$;

$\psi(n)$ la quantité dont le nombre des diviseurs de la forme $3k+1$ surpasse le nombre des diviseurs de la forme $3k-1$;

$\varphi'(n)$ la moitié du nombre des solutions différentes de l'équation $n=x^2+64y^2$, et

$\psi'(n)$ la moitié du nombre des solutions différentes de l'équation $n=x^2+3.64y^2$ en nombres entiers, en considérant comme solutions différentes les valeurs positives et négatives de x et de y, et tenant compte aussi des valeurs nulles de ces inconnues.

D'après ces conventions, les relations que fournit la théorie des fonctions elliptiques pour les nombres de classes des formes quadratiques à déterminants négatifs, peuvent s'exprimer comme il suit:

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} &F(4n)+2F(4n-1^2)+2F(4n-2^2)+2F(4n-3^2)+\ldots\\ &\qquad =2\mathrm{X}(n)+\Phi(n)+\Psi(n),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &F(2m)+2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)+2F(2m-3^2)+\ldots\\ &\qquad =2\Phi(m)+\varphi(m),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned} &F(2m)-2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)-2F(2m-3^2)+\ldots\\ &\qquad =-\varphi(m),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{aligned} &3G(m)+6G(m-1^2)+6G(m-2^2)+6G(m-3^2)+\ldots\\ &\qquad =\Phi(m)+3\Psi(m)+3\varphi(m)+2\psi(m),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(V)}\quad \left\{\begin{aligned} &2F(m)+4F(m-1^2)+4F(m-2^2)+4F(m-3^2)+\ldots\\ &\qquad =\Phi(m)+\Psi(m)+\varphi(m),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(VI)}\quad \left\{\begin{aligned} &2F(m)-4F(m-1^2)+4F(m-2^2)-4F(m-3^2)+\ldots\\ &\qquad =(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}[\Phi(m)-\Psi(m)]+\varphi(m),\end{aligned}\right.$$

$$\text{(VII)}\quad \left\{\begin{aligned} &2F(r)-4F(r-4^2)+4F(r-8^2)-4F(r-12^2)+\ldots\\ &\qquad =(-1)^{\frac{1}{8}(r-7)}[\Phi'(r)-\Psi'(r)],\end{aligned}\right.$$

$$\text{(VIII)}\quad \left\{\begin{aligned} &4\sum(-1)^{\frac{1}{16}(s-k^2)}\left[2F\left(\frac{s-k^2}{16}\right)-3G\left(\frac{s-k^2}{16}\right)\right]\\ &\qquad =(-1)^{\frac{1}{8}(s-1)}[\Phi'(s)-\Psi'(s)]+\varphi(s)+4\psi(s)\\ &\qquad\quad -4\varphi'(s)-8\psi'(s).\end{aligned}\right.$$

Dans les sept premières de ces formules, la suite des fonctions F et G ne doit être prolongée qu'autant que les nombres correspondants ne deviennent pas négatifs; ainsi, en désignant par exemple par $F(4n-k^2)$ le dernier terme de la première formule, le nombre k est déterminé par la condition

$$k^2 \leqq 4n.$$

Dans la dernière formule (VIII), le signe de sommation se rapporte à tous les nombres positifs différents k, pour lesquels $\frac{1}{16}(s-k^2)$ est entier et supérieur ou égal à zéro; enfin, dans toutes les formules il faut poser

$$F(0)=0, \quad G(0)=\frac{1}{4}.$$

Pour les fonctions arithmologiques F et G, on a, en outre, les relations fondamentales suivantes, qui se tirent également de la théorie des fonctions elliptiques, mais que l'on peut établir aussi par de simples considérations arithmétiques :

$$F(4n) = 2F(n)$$

pour toute valeur de n, avec cette seule exception que, si n est un carré impair, on a $F(4n) = 2F(n) - 1$;

$$G(4n) = F(4n) + G(n),$$

pour toute valeur de n;

$$G(n) = F(n),$$

quand n donne, pour le module 4, le reste 1 ou 2;

$$G(n) = 2F(n),$$

lorsque $n \equiv 7 \pmod{8}$;

$$3G(n) = 4F(n),$$

lorsque $n \equiv 3 \pmod{8}$, avec cette exception que, lorsque n est le triple d'un carré impair, on a

$$3G(n) = 4F(n) + 2.$$

Ensuite, le nombre des classes $F(n)$ est égal à la somme des nombres de classes *proprement primitives* des formes quadratiques pour tous les déterminants $-\nu$ qui sont diviseurs de n, et pour lesquels le quotient $\frac{n}{\nu}$ est un carré impair. Il s'ensuit que des huit formules ci-dessus, relatives aux nombres de classes F et G, on peut déduire les formules correspondantes suivantes, relatives à la fonction $f(n)$ qui exprime le nombre des classes proprement primitives des formes quadratiques de déterminant $-n$:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \ldots \\ & \qquad = 4\mathrm{X}(n) + 2\Phi(n) + 2\Psi(n), \end{aligned} \right.$$

u_k désignant le nombre de toutes les représentations possibles du nombre $4n$ par la forme

$$x^2 + k(2y+1)^2,$$

de sorte que, u_k étant $=0$ lorsque $k > 4n$, la série du premier membre se termine. Ce nombre de représentations est d'ailleurs, ici comme dans tout ce qui va suivre, pris dans le sens ordinaire, de sorte qu'il faut entendre par là le nombre des systèmes différents de valeurs entières, positives ou négatives, des indéterminées x et y, pour lesquels la représentation est possible. On a ensuite

$$(2)\quad u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \ldots = 4\Phi(m) + \tfrac{1}{2} u_1,$$

$$(3)\quad u_1 f(1) - u_2 f(2) + u_3 f(3) - u_4 f(4) + \ldots = \tfrac{1}{2} u_1,$$

u_k désignant le nombre des représentations de $2m$ par la forme

$$x^2 + k(2y+1)^2.$$

De plus,

$$(4)\quad \begin{cases} 3\sum u_i f(i) + \sum [2 + (-1)^i] u_{4i-1} f(4i-1) \\ \qquad = 2\Phi(m) + 6\Psi(m) + \tfrac{1}{2}(u_0 + 3u_1), \end{cases}$$

les sommations s'étendant à tous les nombres positifs i, et u_k désignant le nombre des représentations de m par la forme $x^2 + ky^2$, pour lesquels y est différent de zéro. Ensuite

$$(5)\quad u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \ldots = \Phi(m) + \Psi(m) + \tfrac{1}{2} u_1,$$

$$(6)\quad \begin{cases} u_1 f(1) - u_2 f(2) + u_3 f(3) - u_4 f(4) + \ldots \\ \qquad = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} [\Phi(m) - \Psi(m)] + \tfrac{1}{2} u_1, \end{cases}$$

u_k indiquant le nombre des représentations de m par la forme $x^2 + k(2y+1)^2$. Puis, pour $r \equiv 7 \pmod{8}$,

$$(7)\quad \begin{cases} 2\sum u_{8i-1} f(8i-1) \\ \qquad = \Psi(r) - \tfrac{1}{2}\Phi(r) + (-1)^{\frac{1}{8}(r+1)} [\Psi'(r) - \Phi'(r)], \end{cases}$$

la sommation s'étendant à tous les nombres positifs i, et u_k désignant le nombre des représentations de r par la forme $64x^2 + ky^2$. Enfin on a, pour $s \equiv 1 \pmod{8}$,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum (3u_i \pm v_i) f(i) + \sum (2 \pm 1)(u_{4i-1} - v_{4i-1}) f(4i-1) \\ &= (-1)^{\frac{1}{8}(s+7)} [\Phi'(s) - \Psi'(s)] + \tfrac{1}{2}(u_0 + 3u_1 - v_1), \end{aligned} \right.$$

les deux signes de sommation se rapportant à tous les nombres positifs i, et le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant que i est pair ou impair ; u_k désignant en outre le nombre des représentations de s par la forme $x^2 + 64ky^2$, dans lesquelles y est différent de zéro, et v_k le nombre total des représentations de s par la forme $x^2 + 16k(2y+1)^2$.

Les huit formules que nous venons de donner pour les nombres de classes F, G peuvent être simplifiées de manière que les expressions φ, ψ, φ', ψ' disparaissent entièrement de leurs seconds membres, en remplaçant les fonctions arithmologiques $F(n)$, $G(n)$ par d'autres fonctions $\mathrm{F}(n)$, $\mathrm{G}(n)$, qui, pour $n = 0$, prennent respectivement les valeurs 0 et $-\frac{1}{12}$, et qui, pour toutes les valeurs positives de n, sont déterminées par les équations suivantes :

$$\mathrm{F}(4n) = F(4n),$$

pour toute valeur du nombre n;

$$\mathrm{F}(4n) = 2\mathrm{F}(n)$$

et

$$\mathrm{G}(4n) = \mathrm{F}(4n) + \mathrm{G}(n),$$

pour toute valeur positive de n;

$$\mathrm{G}(n) = \mathrm{F}(n),$$

lorsque $n \equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$, et

$$G(n) = \left[2 + (-1)^{\frac{1}{4}(n-3)}\right] F(n),$$

lorsque $n \equiv 3 \pmod{4}$.

Il existe donc, pour les fonctions F et G, les *mêmes* relations fondamentales que pour les nombres de classes F et G; mais elles ne sont plus sujettes aux exceptions; et les fonctions F(n) et $F(n)$ sont en général identiques, pourvu que n ne soit pas un carré impair; G(n) et $G(n)$ sont identiques, pourvu que n ne soit pas un carré parfait ou le triple d'un carré parfait. Mais, même pour ces valeurs particulières de n, les fonctions F(n) et G(n) ont encore leur signification arithmologique immédiate, dont l'explication ici nous conduirait trop loin.

Indépendamment des changements que les formules ci-dessus (I) à (VIII) éprouvent, comme on vient de le voir, par l'introduction des fonctions arithmologiques $f(n)$, F(n), G(n) et autres, on peut encore faire subir à ces formules les transformations les plus variées, en les combinant entre elles et avec les relations fondamentales qui lient les fonctions F et G : on obtient ainsi un grand nombre de formules nouvelles et élégantes. Mais aucune des équations (I) à (VIII) ne peut *elle-même* se déduire des autres à l'aide des seules relations fondamentales, et elles forment par conséquent à cet égard un système de formules indépendantes entre elles. Parmi les équations qui résultent des combinaisons en question, je ne transcrirai que les deux suivantes, en employant, pour plus de simplicité, les fonctions F, G et posant $2F(n) - G(n) = E(n)$:

$$(\text{IX}) \left\{ \begin{aligned} & F(n) + F(n-2) + F(n-6) + F(n-12) + F(n-20) + \ldots \\ & \qquad = \tfrac{1}{8} \Psi(4n+1), \end{aligned} \right.$$

$$(\text{X}) \left\{ \begin{aligned} & E(n) + 2E(n-1) + 2E(n-4) + 2E(n-9) + \ldots \\ & \qquad = \tfrac{2}{3} [2 + (-1)^n] X(n). \end{aligned} \right.$$

Ces deux formules subsistent pour tous les nombres positifs n. La dernière, comme je le ferai voir plus bas, fournit les relations remarquables entre les représentations d'un nombre n par la somme de trois carrés et le nombre des classes de formes quadratiques appartenant au déterminant $-n$. La formule (X) peut d'ailleurs se déduire de ces relations; elle contient aussi des propositions arithmologiques déjà connues, et seulement sous une forme nouvelle. C'est ce qui a lieu aussi pour les formules (II) et (III), et en général pour toutes les combinaisons des formules (I) à (VIII) qui font disparaître les fonctions Ψ et Ψ'. Mais les autres résultats contenus dans ces formules ne peuvent s'obtenir à l'aide des procédés arithmétiques connus jusqu'ici, et sont par conséquent entièrement nouveaux, pour le fond comme pour la forme. La différence essentielle qui se trouve ainsi établie entre les fonctions X, Φ, Φ', d'une part, et les fonctions Ψ, Ψ', de l'autre, se manifeste encore d'ailleurs dans la différence totale de nature des séries que l'on obtient en prenant ces fonctions comme coefficients d'un développement. On a, en effet,

$$\sum (2 \pm 1)\,\mathrm{X}(n)\, q^n = \sum \frac{q^n}{(1 \pm q^n)^2},$$

le signe de sommation s'étendant à toutes les valeurs positives de n depuis 1 jusqu'à ∞, et en prenant dans les deux membres le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que n est pair ou impair. On a ensuite

$$\sum \Phi(n)\, q^n = \sum \frac{nq^n}{1-q^n} = \sum \frac{q^n}{(1-q^n)^2},$$

$$\sum \Psi(n)\, q^n = \sum \frac{q^{n^2+n}}{(1-q^n)^2},$$

les sommations s'étendant encore à toutes les valeurs positives de n depuis 1 jusqu'à ∞. Enfin on a

$$\sum \Phi'(m)\, q^m = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(m^2-1)} \frac{mq^m}{1-q^{2m}},$$

$$\sum \Psi'(m)\, q^m = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(m^2+7)}\, m\, \frac{q^{m^2}(1+q^{2m}) - q^m}{1-q^{2m}},$$

où l'on doit prendre pour m tous les nombres positifs impairs.

En combinant ces équations avec les huit formules pour les nombres de classes des formes quadratiques à déterminants négatifs, on obtient aussi ces nombres de classes sous forme de coefficients de développements. Ainsi la première et la troisième des équations précédentes, combinées avec les formules (IX) et (X), donnent les deux relations

$$\text{(XI)} \qquad \sum \mathrm{F}(n)\, q^n = \frac{q^{\frac{1}{4}}}{\mathrm{H}(K)} \sum \frac{q^{n^2+3n+1}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

$$\text{(XII)} \qquad 12 \sum \mathrm{E}(n)\, q^n = \frac{1}{\Theta(K)} + \frac{8}{\Theta(K)} \sum \frac{q^{n+1}}{(1 \mp q^{n+1})^2},$$

les sommations se rapportant à toutes les valeurs de n depuis o jusqu'à ∞, et en prenant, dans la dernière somme, le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que n est pair ou impair. Les lettres H, Θ, K, q ont ici la signification que leur a donnée Jacobi. La dernière de ces équations peut donc, à l'aide de la formule (8), page 103 des *Fundamenta* de Jacobi, se transformer dans la suivante

$$12 \sum \mathrm{E}(n)\, q^n = [\Theta(K)]^3 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^3,$$

et il en résulte immédiatement que le nombre des représentations d'un nombre n par la somme de trois carrés est égal à $12\,\mathrm{E}(n)$. Ce résultat, fourni par la théorie des fonctions elliptiques, résume sous une forme simple les propositions de Gauss déjà citées, touchant la dépendance qui existe entre le nombre des représentations d'un nombre n par la forme $x^2 + y^2 + z^2$, et le nombre des classes différentes de formes quadratiques binaires de déterminant $-n$. De cette manière, on peut donc tirer de la *seule* théorie des fonctions elliptiques les belles propositions d'arithmétique supérieure, qui jusqu'ici étaient fondées sur les profondes considérations que renferment les *Disq. Arithm.* de Gauss. Le théorème de Fermat sur les nombres triangulaires étant une conséquence fort simple de ces propositions, peut donc aussi se déduire de la théorie des fonctions elliptiques, sans emprunter aucune préparation préliminaire à la théorie des nombres, et ainsi se trouve accompli un vœu souvent exprimé par Jacobi dans ses leçons. On sait, en effet, que ce grand mathématicien, dans sa plus importante création analytique, la théorie des fonctions elliptiques, a trouvé en même temps une riche mine de propositions arithmologiques, et il semble s'être attaché avec prédilection au développement de cette découverte. De même qu'il avait obtenu, au moyen des séries pour les puissances paires de $\Theta(K)$, les propositions sur le nombre des décompositions d'un nombre en deux, quatre, six et huit carrés, il désirait aussi pouvoir déduire, du développement du cube de $\Theta(K)$, ou de séries analogues, les propositions sur la décomposition d'un nombre en trois carrés ou en trois nombres triangulaires. C'est ce qui se trouve maintenant réalisé dans les recherches que nous venons d'indiquer : ce n'est pas, il est vrai, par la transformation analytique directe du cube de $\Theta(K)$, mais à l'aide des modules spéciaux pour lesquels a lieu la multiplication complexe, et conséquemment toujours au moyen de considérations appartenant exclusivement à la doctrine des fonctions elliptiques.

Tout porte à croire que, de même que les fonctions arithmologiques $\mathrm{E}(n)$ et $\mathrm{X}(n)$ sont liées avec le nombre des décompositions de n en trois et en quatre carrés, de même aussi les fonctions $\mathrm{F}(n)$ et $\Psi(n)$ auront une relation analogue avec la représentation de n par des formes quadratiques à plusieurs variables. C'est au moyen seulement de cette extension de la signification arithmologique de $\mathrm{F}(n)$ et de $\Psi(n)$ que l'on peut espérer de déduire, par la voie purement arithmétique, les relations mutuelles de ces fonctions, contenues dans les huit formules ci-dessus. Il est toutefois à présumer que la propriété relative au nombre de classes $\mathrm{F}(n)$, et par suite l'établissement de ces huit formules par les procédés de la théorie des nombres, ont leurs fondements à une grande profondeur, puisque Gauss lui-même, en traitant par une méthode arithmétique si générale les formes quadratiques binaires, n'a pas été conduit à ces lois simples pour le nombre de classes de ces formes. Maintenant, du reste, que les relations existant entre les fonctions F et Ψ sont données, il ne s'agit plus que d'établir pour l'une des deux la propriété présumée, la propriété correspondante de l'autre fonction s'ensuivant immédiatement. Cette réduction d'un cas à l'autre serait importante, parce que l'analogie entre les fonctions X et Ψ d'une part, et les fonctions E et F d'autre part, conduit à admettre qu'il doit y avoir moins de distance à franchir pour assigner la signification, quelle qu'elle soit, de $\Psi(n)$ relativement à la représentation du nombre n par une forme quadratique, que pour parvenir à la signification correspondante de $F(n)$. C'est en me fondant sur ces considérations que j'ai établi les séries ci-dessus, dans lesquelles $F(n)$ et $\Psi(n)$ entrent comme coefficients; mais je n'ai pu réussir jusqu'ici à en déduire des résultats satisfaisants pour l'extension cherchée de la signification des fonctions F et Ψ. Il semble plus facile de rechercher et d'établir par la voie purement analytique, les propriétés de la série infinie qui forme le second membre de l'équation (XI), de manière à pouvoir, à l'aide de ces propriétés, déduire de cette seule équation toutes les huit formules précédentes. On n'aurait besoin pour cela que de certaines transformations dont cette série est susceptible, en y supposant q multiplié par les différentes racines huitièmes de l'unité, transformations qui peuvent s'obtenir, d'un autre côté, à l'aide des équations (I) à (VIII).

Je ferai remarquer, enfin, que les formules (V) et (VI) sont les mieux appropriées au calcul des nombres de classes des formes quadratiques à déterminant négatif. J'ai déjà fait calculer, au moyen d'une combinaison de ces formules, la valeur de $F(m)$ pour tous les nombres impairs m, jusqu'à 10000, et le calcul n'a rien laissé à désirer sous le rapport de la facilité et de la sûreté. Le nombre des classes *proprement primitives* des formes quadratiques à déterminant négatif se déduit sans peine des valeurs calculées pour $F(m)$.

Berlin, décembre 1859.