

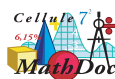
# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIUVILLE, J.

**Égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique  $E(x)$ .**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1860), p. 287-288.

[http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher\\_notice.php?id=JMPA\\_1860\\_2\\_5\\_A19\\_0](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A19_0)



Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD  
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

## ÉGALITÉS

ENTRE DES SOMMES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION NUMÉRIQUE  $E(x)$ ;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je désigne ici par  $E(x)$  l'entier contenu dans  $x$ , en sorte que si l'on pose

$$x = E(x) + r,$$

le reste  $r$  se réduira à zéro quand  $x$  sera un entier, mais dans tous les autres cas aura une valeur positive essentiellement plus petite que 1.

Cela posé, soit  $m$  un nombre impair donné. Désignons par  $s$  un entier impair qui prenne les valeurs successives 1, 3, 5, 7, ...,  $m$ , et formons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} E\left(\frac{m+s}{2s}\right),$$

relative à ces diverses valeurs de  $s$ . Il est clair que dans cette somme les termes sont alternativement positifs et négatifs : quant aux quantités placées sous le signe  $E$ , ce sont des fractions rationnelles.

Au contraire, les termes sont tous positifs, et il entre sous le signe  $E$ , un radical carré, dans la somme

$$\sum E\left(\frac{1 + \sqrt{2m - t^2}}{2}\right),$$

où  $t$  est un entier impair auquel on donne les valeurs successives 1, 3, 5, 7, ..., en ayant soin de s'arrêter au moment où l'on cesserait d'avoir

$$2m - t^2 > 0 :$$

la dernière valeur de  $t$  est donc la racine du plus grand carré impair contenu dans  $2m$ .

Cela posé, le premier des deux théorèmes que je veux énoncer ici

consiste en ce que les deux sommes indiquées sont égales, à savoir :

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} E\left(\frac{m+s}{2s}\right) = \sum E\left(\frac{1+\sqrt{2m-t^2}}{2}\right).$$

Soit comme exemple  $m = 9$  : notre équation exprime que les deux quantités

$$E\left(\frac{9+1}{2}\right) - E\left(\frac{9+3}{6}\right) + E\left(\frac{9+5}{10}\right) - E\left(\frac{9+7}{14}\right) + E\left(\frac{9+9}{18}\right)$$

et

$$E\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) + E\left(\frac{1+\sqrt{9}}{2}\right)$$

ont la même valeur, ce qui est vrai, la valeur commune étant 4.

Maintenant désignons par  $n$  un entier quelconque pair ou impair, puis supposons encore  $s$  impair et prenant les valeurs 1, 3, 5, etc., sans dépasser  $n$ . D'un autre côté soit  $\theta$  un entier prenant toutes les valeurs paires ou impaires 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., sans que jamais son carré dépasse ni même atteigne ce même nombre  $n$ . On aura cette seconde égalité

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} E\left(\frac{n}{s}\right) = \sum E(\sqrt{m-\theta^2}).$$

Ainsi, pour  $n = 4$ , il vient

$$E\left(\frac{4}{1}\right) - E\left(\frac{4}{3}\right) = E(\sqrt{4}) + E(\sqrt{3}),$$

ce qui est exact.

La démonstration des deux égalités ci-dessus s'offrira d'elle-même à tous ceux qui sont un peu au courant de la théorie des nombres, en particulier de ce qui concerne les décompositions d'un entier en deux carrés. Aussi ne les ai-je données que comme un sujet d'exercices pour les jeunes géomètres. Il serait, en effet, à désirer qu'on les établît directement sans recourir à la théorie des nombres.