JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$**.**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 269-272.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A17_0>

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit $2^\alpha m$ un nombre entier donné pair ou impair, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. On demande le nombre N des représentations de $2^\alpha m$ par la forme

$$x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2),$$

x, y, z, t étant des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Cette question n'offre aujourd'hui aucune difficulté. Il suffit de se rappeler les beaux théorèmes de Jacobi concernant la représentation des nombres par une somme de quatre carrés, et d'avoir égard à cette proposition bien connue, que le nombre des représentations par une somme de deux carrés est le même pour un entier donné quelconque n et pour son double $2n$. Ainsi tout nombre pair peut être mis le même nombre de fois sous l'une et sous l'autre des deux formes

$$u^2 + v^2, \quad 2(z^2 + t^2).$$

La somme des diviseurs de m devant jouer un grand rôle dans ce qui suit, nous désignerons, pour abréger, cette somme par $\zeta_1(m)$. Le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + u^2 + v^2,$$

où m est impair, s'exprimera dès lors (en vertu d'un théorème de Jacobi) par $8\zeta_1(m)$. Or il peut arriver que x^2+y^2 fasse une somme paire, et par conséquent u^2+v^2 une somme impaire; ou bien, inversement, u^2+v^2 sera un nombre pair, x^2+y^2 un nombre impair. Ces deux cas se présentent évidemment le même nombre de fois, puisque l'on passe de l'un à l'autre en permutant les deux sommes. Si donc on exige que u^2+v^2 fasse un nombre pair, le nombre $8\zeta_1(m)$ des solutions sera réduit à moitié. Mais alors on pourra écrire sans inconvénient $2(z^2+t^2)$ au lieu de u^2+v^2 et *vice versâ*. Le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2+y^2+2(z^2+t^2),$$

où m est un entier impair donné, s'exprime donc par $4\zeta_1(m)$.

Occupons-nous à présent de l'équation

$$2m = x^2+y^2+2(z^2+t^2).$$

Il est clair que la somme x^2+y^2 ne pourra être ici qu'un nombre pair, en sorte que le nombre des solutions ne changera pas si l'on écrit $2(x'^2+y'^2)$ au lieu de x^2+y^2, ce qui revient à remplacer l'équation ci-dessus par celle-ci :

$$m = x'^2+y'^2+z^2+t^2.$$

Or le nombre des solutions de cette dernière équation est $8\zeta_1(m)$. Le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2+y^2+2(z^2+t^2)$$

est donc aussi $8\zeta_1(m)$.

Restent les nombres pairement pairs exprimés par $2^\alpha m$ en prenant $\alpha > 1$. Mais en répétant ce que nous venons de dire pour le cas d'un nombre simplement pair, on reconnaîtra que le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2+y^2+2(z^2+t^2)$$

ne peut pas différer du nombre des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-1} m = x'^2+y'^2+z^2+t^2;$$

et ce dernier nombre, Jacobi l'a trouvé égal à $24\zeta_1(m)$, $2^{\alpha-1}m$ étant ici un nombre pair. La question proposée est donc complétement résolue.

En résumé, le nombre N des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

est fourni par les formules respectives

$$N = 4\zeta_1(m), \quad N = 8\zeta_1(m), \quad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha \geqq 2.$$

Le nombre M des solutions *propres*, c'est-à-dire des solutions où aucun diviseur plus grand que l'unité n'appartient à la fois aux quatre entiers x, y, z, t, s'en déduit sans peine. Il y a pour cela une méthode générale; mais je me contenterai d'écrire les résultats qu'on obtient.

D'abord on a $M = 0$, quand l'exposant α est égal ou supérieur à 4. Alors, en effet, les quatre entiers x, y, z, t ont nécessairement le facteur commun 2. Les seules valeurs à considérer sont donc

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 2, \quad \alpha = 3.$$

Pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour les nombres impairs ou simplement pairs, m ou $2m$, on déduit M de N en remplaçant $\zeta_1(m)$ par la fonction d'*Eisenstein* que je désigne par $Z_1(m)$ et qu'on tire du nombre m décomposé en facteurs premiers,

$$m = a^\mu b^\nu \ldots c^\omega,$$

en écrivant

$$Z_1(m) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1})\ldots(c^\omega + c^{\omega-1});$$

les coefficients numériques restent les mêmes. Mais outre ce changement de $\zeta_1(m)$ en $Z_1(m)$, il faut, pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$, prendre ces coefficients numériques nouveaux 20 et 16.

En d'autres termes le nombre M des solutions propres de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

est fourni par les formules respectives

$$M = 4Z_1(m), \quad M = 8Z_1(m), \quad M = 20Z_1(m), \quad M = 16Z_1(m), \quad M = 0,$$

suivant que l'on a

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 2, \quad \alpha = 3 \quad \text{ou} \quad \alpha \geqq 4.$$