

# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIUVILLE, J.

**Sur la forme  $x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$ .**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1860), p. 147-152.

[http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher\\_notice.php?id=JMPA\\_1860\\_2\\_5\\_A14\\_0](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A14_0)



Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD  
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

## SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

Que tout nombre entier  $n$  puisse être exprimé par la forme

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

en prenant pour  $x, y, z, t$  des entiers, c'est ce qu'on peut établir, comme j'ai déjà l'occasion de le dire [\*], par la méthode même que Lagrange a suivie pour la décomposition d'un nombre en quatre carrés. Mais je veux ici aller plus loin et fixer avec précision le nombre des représentations de tout entier donné  $n$  sous la forme indiquée, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

où les entiers  $x, y, z, t$  peuvent être indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Je distinguerai deux cas, suivant que  $n$  est un entier impair ou bien est de la forme  $2^\alpha m$ ,  $m$  étant impair et  $\alpha > 0$ .

Dans le premier cas, celui où  $n$  est un nombre impair, le nombre  $N$  des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

s'obtient très-simplement; c'est le quadruple de la somme des diviseurs de  $n$ , ceux que 3 divise exceptés.

Ainsi pour  $n = 1$ , on a  $N = 4$ , et c'est ce que l'on voit *a priori* en

---

[\*] Voir tome I (2<sup>e</sup> série), page 230.

observant que

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2) = 0^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Pour  $n = 3$ , les diviseurs de  $n$  sont 1 et 3, mais le diviseur 3 doit être exclu. Il vient donc encore  $N = 4$ . Et c'est bien ce que montre l'équation double

$$3 = 0^2 + 0^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2] = 0^2 + 0^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2].$$

Soit encore  $n = 5$ . On aura  $N = 24$ . Les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 3[0 + (\pm 1)^2] = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2]$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 3(0^2 + 0^2) = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2)$$

confirment ce fait.

Quand on a

$$n = 2^\alpha m,$$

$m$  étant impair et  $\alpha > 0$ , la règle pour trouver le nombre  $N$  des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

est un peu plus compliquée. Il faut alors opérer sur le facteur impair  $m$  comme tout à l'heure sur  $n$ , c'est-à-dire chercher la somme des diviseurs de  $m$ , ceux que 3 divise exceptés. Soit  $S$  cette somme. Je trouve pour  $N$  la valeur générale que voici :

$$N = 4(2^{\alpha+1} - 3)S.$$

Pour  $\alpha = 1$ ,  $n = 2m$ , on a donc

$$N = 4S;$$

pour  $\alpha = 2$ ,  $n = 4m$ , on a

$$N = 20S;$$

pour  $\alpha = 3$ ,  $n = 8m$ , on a

$$N = 52S;$$

pour  $\alpha = 4$ ,  $n = 16m$ , on a

$$N = 116S;$$

pour  $\alpha = 5$ ,  $n = 32m$ , on a

$$N = 244S;$$

et ainsi de suite.

Ajoutons quelques exemples, et d'abord soit  $n = 2$ , d'où  $\alpha = 1$ ,  $m = 1$ ,  $S = 1$ ,  $N = 4$  : cela s'accorde avec l'équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 3(o^2 + o^2).$$

Soit ensuite  $n = 10$ , d'où  $\alpha = 1$ ,  $m = 5$ ,  $S = 6$ . On en conclura  $N = 24$ ; or c'est bien ce qui résulte des expressions ci-après du nombre 10 :

$$\begin{aligned} & (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 3(o^2 + o^2), & (\pm 2)^2 + o^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2], \\ & (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 3(o^2 + o^2), & o^2 + (\pm 2)^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2]. \end{aligned}$$

Soit encore  $n = 4$ , d'où  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ . Il viendra  $N = 20$ , comme le donnent effectivement les expressions suivantes du nombre 4 :

$$\begin{aligned} & (\pm 2)^2 + o^2 + 3(o^2 + o^2), & o^2 + (\pm 2)^2 + 3(o^2 + o^2), \\ & (\pm 1)^2 + o^2 + 3[(\pm 1)^2 + o^2], & (\pm 1)^2 + o^2 + 3[o^2 + (\pm 1)^2], \\ & o^2 + (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + o^2], & o^2 + (\pm 1)^2 + 3[o^2 + (\pm 1)^2]. \end{aligned}$$

Enfin soit  $n = 120$ . En observant que 120 est le produit de 8 par 15, on verra que, pour ce nombre 120, on a  $\alpha = 3$ ,  $m = 15$  : les diviseurs de 15 étant 1, 3, 5, 15, après avoir exclu 3 et 15 que 3 divise, on obtiendra  $S = 6$ ; d'où finalement

$$N = 52 \times 6 = 312.$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier ce résultat par le calcul direct.

La formule

$$N = 4(2^{\alpha+1} - 3)S$$

qui fournit le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

quand  $\alpha > 0$ , ne convient pas au cas de  $\alpha = 0$ . On aurait une formule générale en posant

$$N = 4 [2^{\alpha+1} - 2 - (-1)^{2^\alpha}] S,$$

ou bien encore

$$N = 4 [2^{\alpha+1} - 2 - \cos(2^\alpha \pi)] S.$$

Mais il est plus simple de considérer séparément les nombres impairs et les nombres pairs.

Jusqu'ici nous avons admis tout à la fois et les solutions propres et les solutions impropres de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2).$$

Excluons maintenant les solutions *impropres* où  $x, y, z, t$  ont un facteur commun  $> 1$ , et cherchons le nombre  $M$  des solutions *propres*. A cet effet, mettons en évidence les nombres premiers qui peuvent entrer dans la composition de  $n$ , et posons

$$n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot a^\mu \cdot b^\nu \dots c^\omega,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent se réduire à zéro. Nous séparons 2 et 3 des autres nombres premiers  $a, b, \dots, c$ . Ils jouent en effet un rôle particulier.

J'observe d'abord que quand on a

$$\beta \geq 2,$$

il vient

$$M = 0;$$

car alors  $x, y, z, t$  ont nécessairement le diviseur 3.

Restent les valeurs

$$\beta = 0, \quad \beta = 1,$$

répondant aux deux formes

$$2^\alpha a^\mu b^\nu \dots c^\omega, \quad 2^\alpha \cdot 3 \cdot a^\mu b^\nu \dots c^\omega.$$

Or il est aisé de voir que pour les deux nombres qu'elles donnent en prenant pour  $\alpha, a, \mu$ , etc., les mêmes valeurs, la valeur de  $M$  est aussi la même. Désormais donc nous supposons  $\beta = 0$ , partant  $n$  premier à 3, ou

$$n = 2^\alpha a^\mu b^\nu \dots c^\omega.$$

Cela étant,  $M$  dépendra du produit

$$(a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1}) \dots (c^\omega + c^{\omega-1}),$$

que je désignerai par  $R$ , et de l'exposant  $\alpha$ .

Pour  $\alpha = 0$  et pour  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire pour  $n$  impair et pour  $n$  simplement pair, on aura

$$M = 4R.$$

Pour  $\alpha = 2$ , on aura

$$M = 16R.$$

Enfin pour  $\alpha > 2$ , on trouve généralement

$$M = 3 \cdot 2^{\alpha+1} R.$$

Soit, comme exemple,

$$n = 5^2 :$$

il viendra

$$M = 4(5^2 + 5),$$

tandis que

$$N = 4(5^2 + 5 + 1);$$

et en effet on a dû perdre les quatre solutions contenues dans la double égalité

$$5^2 = (\pm 5)^2 + 0^2 + 3(0^2 + 0^2) = 0^2 + (\pm 5)^2 + 3(0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite

$$n = 4 \cdot 5^2;$$

il viendra

$$M = 16(5^2 + 5),$$

tandis que

$$N = 20(5^2 + 5 + 1).$$

Or les solutions perdues ici sont d'abord celles où  $x, y, z, t$  sont divisibles par 2 sans l'être par 5; leur nombre est celui des solutions propres de l'équation

$$5^2 = x'^2 + y'^2 + 3(z'^2 + t'^2):$$

nous venons de le trouver égal à  $4(5^2 + 5)$ . En outre on perd les solutions où  $x, y, z, t$  ont le facteur 5, le facteur 2 restant possible sans être nécessaire: leur nombre est celui des solutions propres ou impropres de l'équation

$$4 = x''^2 + y''^2 + 3(z''^2 + t''^2),$$

c'est-à-dire 20. C'est bien là ce que disent nos formules.

