JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Nombre des représentations du double d'un entier impair sous la forme d'une somme de douze carrés.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 143-146.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A13_0>

NOMBRE DES REPRÉSENTATIONS DU DOUBLE
D'UN ENTIER IMPAIR SOUS LA FORME D'UNE SOMME DE DOUZE CARRÉS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le nombre N des représentations du double $2m$ d'un entier impair donné m par une somme de douze carrés, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ sont des entiers positifs ou négatifs, ou zéro, s'exprime très-simplement au moyen de la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de m.

Désignons en effet par $\zeta_5(m)$ la somme des cinquièmes puissances des diviseurs de m, 1 et m compris. Je trouve que l'on a

$$\text{N} = 264\zeta_5(m).$$

Le facteur 264 se rapporte au cas de $m = 1$: c'est le nombre des représentations de 2 par une somme de douze carrés. Et en effet ici tout se tire de la seule équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

en y permutant les carrés; d'où

$$\text{N} = 4 \times \frac{12.11}{2} = 264.$$

Soit en second lieu $m = 3$. On partira des deux équations

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2,$$

dont les seconds membres devront d'abord être complétés par des zéros pour parfaire le nombre 12, après quoi on effectuera les permutations convenables. Il vient ainsi

$$N = 264\,(20 + 224),$$

c'est-à-dire

$$N = 264 \times 244,$$

ce qui s'accorde avec notre formule, attendu que

$$\zeta_5(3) = 1^5 + 3^5 = 244.$$

Soit enfin $m = 5$. En partant des équations fondamentales

$$10 = 1 + 9, \quad 10 = 1 + 1 + 4 + 4,$$

puis

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4,$$

et

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

introduisant le double signe des racines des carrés, ajoutant les zéros voulus, et permutant, on trouvera

$$N = 3.8.11\,(2 + 180 + 2688 + 256),$$

d'où

$$N = 264 \times 3126 = 264\,(1 + 5^5),$$

comme notre formule le dit.

Je ne sache pas que personne ait jusqu'ici donné cette formule. Il est inutile d'avertir que nous l'avons conclue sans aucune difficulté de nos *formules générales*.

En calculant N, nous avons tenu compte de toutes les solutions entières de l'équation

$$2m = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2.$$

Mais si l'on voulait s'en tenir aux solutions *propres*, c'est-à-dire exclure les solutions où $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ ont un facteur commun plus grand que l'unité, on obtiendrait un autre nombre M facile au reste à déduire de N. Pour en donner la valeur, je décompose m en ses facteurs premiers de manière à avoir

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma}.$$

Cela fait, M s'exprime par le produit

$$264 \left[a^{5\alpha} + a^{5(\alpha-1)}\right]\left[b^{5\beta} + b^{5(\beta-1)}\right]\ldots\left[c^{5\gamma} + c^{5(\gamma-1)}\right].$$

Le coefficient numérique est le même que ci-dessus; mais la fonction $\zeta_5(m)$ est remplacée par une autre fonction qui ne coïncide avec $\zeta_5(m)$ que quand les exposants α, β,..., γ sont tous égaux à 1.

Soit, comme exemple,

$$m = 9.$$

Il viendra

$$M = 264(9^5 + 3^5),$$

tandis que

$$N = 264(9^5 + 3^5 + 1);$$

et en effet on a dû perdre les solutions de l'équation

$$2.9 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2$$

où x_1, x_2,..., x_{12} sont divisibles par 3, solutions dont le nombre est évidemment celui des représentations de 2, c'est-à-dire 244.

La fonction numérique

$$\left[2^{5\alpha} + a^{5(\alpha-1)}\right]\left[b^{5\beta} + b^{5(\beta-1)}\right]\ldots,$$

dont nous venons de faire usage, est liée à $\zeta_5(m)$ comme la fonction

$$(a^{\alpha} + a^{\alpha-1})(b^{\beta} + b^{\beta-1})\ldots,$$

employée par Eisenstein dans l'expression du nombre des représentations propres de l'entier m par une somme de quatre carrés, est liée à $\zeta_1(m)$, c'est-à-dire à la somme des diviseurs de m.

En général la fonction

$$\left[a^{n\alpha} + a^{n(\alpha-1)}\right]\left[b^{n\beta} + b^{n(\beta-1)}\right]\ldots,$$

que je désignerai par $Z_n(m)$ est liée de même à $\zeta_n(m)$, c'est-à-dire à la somme des puissances de degré n des diviseurs de m. Cette fonction jouit d'un grand nombre de propriétés curieuses que je me propose de développer dans un autre article. Observons seulement ici qu'en représentant par D^2 les diviseurs carrés de m, c'est-à-dire en représentant par D ceux des diviseurs de m dont le carré divise aussi m, en sorte que

$$\frac{m}{D^2}$$

soit un entier, on a

$$\sum Z_n\left(\frac{m}{D^2}\right) = \zeta_n(m),$$

équation que l'on pourrait prendre comme définition de la fonction $Z_n(m)$ dont elle fournirait la valeur telle qu'on l'a écrite plus haut. Le signe sommatoire porte, bien entendu, sur les valeurs de D : l'unité est toujours une de ces valeurs.