

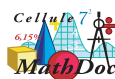
# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIUVILLE, J.

**Théorème concernant la fonction numérique relative au nombre des représentations d'un entier sous la forme d'une somme de trois carrés.**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1860), p. 141-142.

<[http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher\\_notice.php?id=JMPA\\_1860\\_2\\_5\\_A12\\_0](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A12_0)>



Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD  
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

## THÉORÈME

CONCERNANT LA FONCTION NUMÉRIQUE  
RELATIVE AU NOMBRE DES REPRÉSENTATIONS D'UN ENTIER  
SOUS LA FORME D'UNE SOMME DE TROIS CARRÉS;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit  $\psi(\mu)$  le nombre des représentations d'un entier donné  $\mu$  par une somme de trois carrés, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$\mu = x^2 + y^2 + z^2,$$

où  $x, y, z$  sont indifféremment positifs, nuls ou négatifs. On a

$$\psi(1) = 6, \quad \psi(2) = 12, \quad \psi(3) = 8, \quad \psi(4) = 6, \dots,$$

et nous conviendrons en outre de faire

$$\psi(0) = 1.$$

La fonction  $\psi(\mu)$  jouit d'un grand nombre de propriétés curieuses dont j'aurai plus tard à m'occuper longuement. Celle que je vais indiquer me paraît digne de quelque attention quand on la prend dans toute sa généralité.

Soit  $n$  un nombre pair quelconque, en sorte que l'on ait

$$n = 2^\alpha m,$$

$\alpha$  étant  $> 0$  et  $m$  impair. Désignons par  $A, B, C$  trois constantes arbitraires et par  $s$  un entier auquel nous donnerons les valeurs successives

$$s = 0, \quad s = \pm 1, \quad s = \pm 2, \quad s = \pm 3, \dots, \quad s = \pm \omega,$$

$\omega$  étant le plus grand entier contenu dans  $\sqrt{n}$ , en sorte que  $\omega = \sqrt{n}$  quand  $n$  est un carré. C'est à cet entier variable  $s$  que se rapporte la

somme

$$\sum (As^4 + Bs^2 + C) \psi(n - s^2),$$

que je désignerai par  $U$ . On peut avoir quelquefois  $n - s^2 = 0$ , d'après ce qui vient d'être dit, et c'est pour cela que nous avons fixé la valeur de  $\psi(0)$  en convenant de prendre  $\psi(0) = 1$ .

Cela posé, je trouve pour  $U$  cette expression très-simple

$$U = (3An^2 + 6Bn + 24C) \int m,$$

où  $\int m$  désigne, d'après une notation d'Euler, la somme des diviseurs de  $m$ .

Les constantes arbitraires  $A$ ,  $B$ ,  $C$  peuvent changer avec  $n$ . Rien n'empêche, par exemple, de faire

$$3An^2 + 6Bn + 24C = 0:$$

alors on a

$$U = 0.$$

Une seule application suffira. Soit  $n = 2$ , d'où  $m = 1$ ,  $\int m = 1$ . Notre formule donne

$$U = 12A + 12B + 24C;$$

et c'est bien ce qu'on tire du calcul direct, en observant que les valeurs de  $s$  à employer ici sont  $0, 1$  et  $-1$ , de manière que  $C$  se présente avec le facteur

$$\psi(2) + 2\psi(1),$$

qui est égal à  $24$ , tandis que  $A$  et  $B$  n'ont que le facteur

$$2\psi(1),$$

qui est égal à  $12$ .

