JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $24k + 11$.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 139-140.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A11_0>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24k+11$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Le théorème que je veux donner ici consiste en ce que pour tout nombre premier m de la forme $24k+11$, on peut écrire au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

dans laquelle x et y sont des entiers positifs, le premier pair, le second impair, et où p désigne un nombre premier de la forme $12\mu+7$, qui ne divise pas y: on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si du nombre premier donné m, de la forme $24k+11$, on retranche les carrés pairs de grandeur moindre, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'une décomposition exprimée par

$$p^{4l+1} y^2,$$

p étant un nombre premier $12\mu+7$, et y un entier non divisible par p. Mais j'observe qu'il est inutile de retrancher de m les carrés multiples de 3; car les formes linéaires assignées à m et à p dans notre équation

$$m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

ne permettent pas que x (ni y) soit divisible par 3. Les carrés à employer sont donc seulement 4, 16, 64, 100, 196,...; on laissera de côté 36, 144, etc.

Le nombre premier le plus simple que la formule

$$24k+11$$

puisse nous offrir est 11. Or on a

$$11 = 2^2 + 7.1^2,$$

et 7 est compris dans la forme $12\mu + 7$, où l'on peut prendre $\mu = 0$.

En posant $k = 2$, nous aurons

$$m = 59;$$

d'où, en retranchant 4 et 16, les deux restes 55 et 43. Il est clair que 55, ou 5.11, n'est pas de la forme $p^{4l+1} y^2$. Mais on a la solution

$$59 = 4^2 + 43.1^2,$$

où 43, c'est-à-dire $3.12 + 7$ est un nombre premier de la forme voulue $12\mu + 7$. Ainsi notre théorème est vérifié. En retranchant 36, on aurait eu pour reste 23 ; c'est un nombre premier, mais non pas de la forme $12\mu + 7$.

Soit enfin $k = 3$, d'où résulte encore un nombre premier

$$m = 83.$$

En retranchant de 83 successivement 4, 16, 64, on aura les restes 79, 67, 19 qui sont tous les trois des nombres premiers de la forme $12\mu + 7$: on a donc ici trois décompositions canoniques

$$83 = 2^2 + 79.1^2,$$
$$83 = 4^2 + 67.1^2,$$
$$83 = 8^2 + 19.1^2,$$

en sorte que dans cet exemple, comme dans ceux qui précèdent, notre théorème se trouve exact.