JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Généralisation d'une formule concernant la somme des puissances des diviseurs d'un nombre.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 3 (1858), p. 63-68.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1858_2_3_A8_0>

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par la Cellule MathDoc dans le cadre du pôle associé BnF/CMD
http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/

GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE

CONCERNANT

LES SOMMES DES PUISSANCES DES DIVISEURS D'UN NOMBRE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans mon quatrième article sur quelques fonctions numériques (inséré au cahier de décembre 1857), j'ai donné la formule suivante

$$(\theta) \qquad \sum d^{\mu+\nu}\zeta_{\tau-\nu}(d)\,\zeta_\nu(\delta) = \sum d^{\nu}\zeta_\mu(d)\,\zeta_{\tau+\mu}(\delta).$$

où $\zeta_\mu(m)$ représente généralement la somme des puissances de degré μ des diviseurs d du nombre $m = d\delta$; c'est à ces diviseurs d, dont 1 et m font toujours partie, que se rapportent les sommes indiquées. Les exposants ou indices μ, ν, τ sont tout à fait quelconques : on pourrait même les prendre imaginaires et par suite décomposer en deux équations distinctes la formule que nous venons d'écrire, ce qui conduirait à des résultats nouveaux et curieux.

En observant que l'on a

$$m^\mu\zeta_{-\mu}(m) = \zeta_\mu(m),$$

on peut mettre l'équation (θ) sous diverses formes. Déjà, dans la Note citée, je lui ai donné celle-ci :

$$(\iota) \qquad \sum d^\mu\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu\zeta_{\mu+\tau}(d)\,\zeta_\mu(\delta).$$

J'ajoute aujourd'hui la suivante :

$$(\upsilon) \qquad \sum d^{\mu-\nu}\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_\mu(\delta) = \sum d^{\mu-\nu}\zeta_\nu(d)\,\zeta_{\mu+\tau}(\delta).$$

On pourrait même poser

$$(\omega) \qquad \sum d^{\mu-\nu}\zeta_{\nu+\tau}(d)\,\zeta_{\mu+\rho}(\delta) = \sum d^{\mu-\nu}\zeta_{\nu+\rho}(d)\,\zeta_{\mu+\tau}(\delta);$$

mais en examinant de près cette dernière formule, on voit que, malgré la présence d'un nouvel indice arbitraire ρ, elle n'est pas au fond plus générale que les précédentes.

On obtiendra comme il suit un résultat beaucoup plus étendu et applicable à des fonctions numériques d'une autre nature que $\zeta_\mu(m)$, quoique déduites aussi de la considération des puissances des diviseurs d du nombre m.

Soient $f(m)$ et $\mathrm{F}(m)$ deux fonctions numériques quelconques de l'entier m, en sorte que si l'on pose successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, on ait pour $f(m)$ et $\mathrm{F}(m)$ des valeurs déterminées $f(1), f(2), f(3), \ldots$, $\mathrm{F}(1)$, $\mathrm{F}(2)$, $\mathrm{F}(3), \ldots$; et faisons

$$\mathrm{X}_\mu(m) = \sum d^\mu f(d),$$

$$\mathrm{Z}_\mu(m) = \sum d^\mu \mathrm{F}(d).$$

Si l'on prenait généralement $f(m) = 1$, la fonction $\mathrm{X}_\mu(m)$ se réduirait à $\zeta_\mu(m)$; mais en prenant pour $f(m)$ d'autres valeurs, on obtiendra d'autres fonctions numériques dont la considération pourra être utile. Bornons-nous, par exemple, aux nombres impairs, et, dans cette hypothèse, prenons

$$f(m) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}:$$

il s'ensuivra

$$\mathrm{X}_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^\mu.$$

Dans le cas particulier de $\mu = 0$, on aura donc alors

$$\mathrm{X}_0(m) \quad \text{ou} \quad \mathrm{X}(m) = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

Or cette dernière fonction numérique est d'une haute importance; c'est celle qui exprime le nombre des représentations de $2m$ par une somme de deux carrés impairs, je veux dire le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2,$$

où le premier membre est égal au double de l'entier impair donné m et où x et y sont des nombres impairs et positifs, deux solutions étant regardées comme différentes quand x et y n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs. J'espère avoir plus tard l'occasion de montrer que la fonction

$$X_\mu(m) = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^\mu,$$

où l'exposant μ est à volonté, se présente aussi dans les applications.

Revenons à nos formules générales

$$X_\mu(d) = \sum d^\mu f(d), \quad Z_\mu(m) = \sum d^\mu F(d).$$

Les fonctions

$$X_\mu(m), \quad Z_\mu(m),$$

jouiront, quelles que soient $f(m)$ et $F(m)$, d'un grand nombre de propriétés. Mais je ne veux ici en signaler qu'une. Cette propriété me semble remarquable en ce que les fonctions f et F n'entrent aucunement dans l'équation qui l'exprime : les fonctions X et Z y figurent seules avec différents indices.

En désignant en effet par μ et ν deux quantités quelconques, entières ou non, positives ou négatives, ou même, si l'on veut, imaginaires, on a

$$\text{(A)} \qquad \sum d^{\mu-\nu} X_\nu(d) Z_\mu(\delta) = \sum d^{\mu-\nu} Z_\nu(d) X_\mu(\delta).$$

Le second membre ne diffère du premier que par la permutation des deux lettres X et Z.

Si l'on prenait

$$f(m) = m^\tau, \quad F(m) = m^\rho,$$

l'équation (A) se changerait dans l'équation donnée plus haut entre les fonctions ζ :

$$(\omega) \qquad \sum d^{\mu-\nu} \zeta_{\nu+\tau}(d) \zeta_{\mu+\rho}(\delta) = \sum d^{\mu-\nu} \zeta_{\nu+\rho}(d) \zeta_{\mu+\tau}(\delta).$$

Elle n'est en effet qu'une généralisation de cette formule particulière.

Il est aisé de vérifier la formule (A) en prenant pour m un nombre premier a. Il n'y a alors que deux diviseurs de m, savoir 1 et a; et la valeur commune des deux membres de notre formule est

$$f(1)\,F(1)\,(1+a^{\mu-\nu})+[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)]\,a^{\mu}.$$

Pour $m=a^2$, la valeur commune est

$$\begin{aligned}&f(1)\,F(1)\,(1+a^{\mu-\nu}+a^{2\mu-2\nu})+[f(1)\,F(a^2)+F(1)\,f(a^2)]\,a^{2\mu}\\&+[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)]\,(a^{\mu}+a^{2\mu-\nu})+f(a)\,F(a)\,a^{2\mu}.\end{aligned}$$

Enfin pour $m=ab$, a et b désignant deux nombres premiers, ce qui donne lieu aux quatre diviseurs $d=1$, a, b, ab, c'est

$$\begin{aligned}&f(1)F(1)\,(1+a^{\mu-\nu})\,(1+b^{\mu-\nu})\\&+a^{\mu}\,[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)]+b^{\mu}\,[f(1)\,F(b)+F(1)f(b)]\\&+a^{\mu}\,b^{\mu}\,[f(1)\,F(ab)+F(1)f(ab)+f(a)F(b)+F(a)\,f(b)]\\&+a^{\mu-\nu}b^{\mu}[f(1)\,F(b)+F(1)f(b)]+a^{\mu}\,b^{\mu-\nu}\,[f(1)\,F(a)+F(1)f(a)].\end{aligned}$$

On pourrait pousser plus loin ces vérifications de la formule (A) et même tirer de là une démonstration complète de cette formule. Mais je n'insiste pas sur ce sujet, car il y a une méthode bien plus simple que je développerai une autre fois, et qui nous conduira très-rapidement à la formule (A) par une sorte d'algorithme régulier et général.

Parmi les fonctions X et Z pour lesquelles on a la formule (A), je mentionnerai celles qui dépendent du signe

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

de Legendre, pris avec le sens étendu que lui a donné Jacobi. En désignant par k un nombre entier fixe, positif ou négatif, on fera, par exemple,

$$f(m)=\left(\frac{k}{m}\right),$$

et la fonction

$$\sum \left(\frac{k}{d}\right) d^{\mu},$$

qui naîtra de cette hypothèse, sera une de celles qui jouent un rôle dans la théorie des formes quadratiques. On aura une autre fonction non moins importante, savoir

$$\sum \left(\frac{d}{k}\right) d^{\mu},$$

en prenant

$$f(m) = \left(\frac{m}{k}\right).$$

Nous renvoyons pour ce qui concerne le symbole

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

aux articles que M. Lebesgue a insérés dans ce Journal (1[re] série, t. XII et t. XV). Observons pourtant que, comme on suppose d'ordinaire, en employant ce signe, que a et b sont premiers entre eux, il conviendra de n'introduire dans $\left(\frac{k}{m}\right)$ et dans $\left(\frac{m}{k}\right)$ que des nombres m premiers à k; les diviseurs d de ces nombres seront aussi premiers à k. Toutefois on pourrait admettre des nombres m quelconques, et supposer, comme il est souvent commode de le faire,

$$\left(\frac{k}{m}\right) = 0$$

et

$$\left(\frac{m}{k}\right) = 0,$$

quand m et k ne sont pas premiers entre eux.

On peut substituer à la formule (A) une autre formule équivalente et qui paraîtra sans doute plus simple. Au lieu de prendre, comme nous l'avons fait,

$$X_{\mu}(m) = \sum d^{\mu} f(d), \quad Z_{\mu}(m) = \sum d^{\mu} F(d),$$

prenons

$$X_\mu(m) = \sum \delta^\mu f(d), \quad Z_\mu(m) = \sum \delta^\mu F(d);$$

alors au lieu de la formule (A) nous aurons la formule

$$(B) \qquad \sum X_\nu(d) Z_\mu(\delta) = \sum Z_\nu(d) X_\mu(\delta).$$

Nos lecteurs verront sans peine comment on passe de notre ancienne formule à celle-ci. Toutes deux sont commodes; et, suivant les cas, on devra employer tantôt l'une et tantôt l'autre. La formule

$$(B) \qquad \sum X_\nu(d) Z_\mu(\delta) = \sum Z_\nu(d) X_\mu(\delta)$$

a l'avantage d'être débarrassée non-seulement des fonctions f et F, mais même du facteur $d^{\mu-\nu}$, qui entrait dans la formule (A).