JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

ROBERTS, WILLIAM

Sur une ligne géodésique de l'ellipsoïde.

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 213-216.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1857_2_2_A18_0>

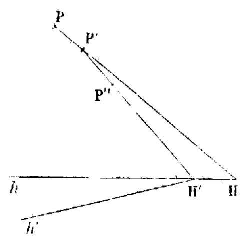
SUR

UNE LIGNE GÉODÉSIQUE DE L'ELLIPSOIDE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

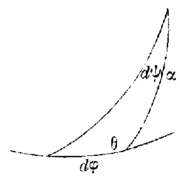
Dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, M. Hart a établi la loi simple qui détermine l'inclinaison du plan osculateur en un point quelconque d'une ligne géodésique passant par un ombilic d'un ellipsoïde sur le plan qui contient les ombilics. Ce savant géomètre s'est appuyé sur l'expression de la fonction P, qui figure d'une manière si importante dans cette théorie, et qui a été introduite par mon frère Michael Roberts. En cherchant à en déduire l'équation de M. Hart, mon frère a adopté une méthode qui conduit à des calculs un peu longs (*Journal de Mathématiques*, tome XV, pages 284-285). Ces calculs peuvent s'éviter en se servant d'une démonstration extrêmement simple, que j'ai présentée dans des leçons sur la géométrie des surfaces du second degré, en 1854.

La voici :



Soit PP' un élément quelconque d'une ligne géodésique ombilicale, lequel, prolongé jusqu'au plan des ombilics, rencontrera l'hyperbole focale en un point H; et à ce point, soit Hh la tangente à l'hyperbole focale. Un cône ayant H pour sommet, et circonscrit à l'ellipsoïde, sera de révolution, et Hh en sera un axe principal. Donc la normale au cône au point P ou, ce qui est la même chose, à l'ellipsoïde, va rencontrer la droite Hh. Par conséquent, le plan PHh est le plan osculateur de la ligne géodésique. Ce plan contient donc l'élément prochain $P'P''$ de cette ligne. Prolongez $P'P''$ jusqu'à rencontrer Hh dans H', qui sera évidemment le point de l'hyperbole focale infiniment prochain à H, et soit $H'h'$ la tangente à l'hyperbole focale à H', ce qui donnera le plan $P'H'h'$ pour le plan osculateur consécutif à PHh.

Désignons maintenant par α le demi-angle du cône circonscrit, par $d\varphi$ l'angle $hH'h'$ ou bien l'angle de contingence de l'hyperbole focale, par $d\psi$ l'angle formé par les deux plans osculateurs consécutifs, et par θ l'inclinaison du plan osculateur au point P sur le plan $hH'h'$, ce qui est le plan des ombilics. Concevons aussi une sphère décrite autour du point H'. On formera ainsi un triangle sphérique



ayant pour côtés $d\varphi$, α, $\alpha + d\alpha$, et pour angles $d\psi$, θ, $\pi - \theta - d\theta$, cela nous donnera évidemment

$$\sin \alpha d\psi = \sin \theta d\varphi.$$

Mais on a aussi

$$\cos \alpha d\psi = d\theta \quad [*],$$

ce qui nous donne en éliminant $d\psi$,

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \cot \alpha d\varphi.$$

Cette équation peut être regardée en quelque sorte comme fondamentale, et l'on peut en faire découler toutes les propriétés des lignes géodésiques ombilicales sans recourir aux coordonnées elliptiques. Mais pour nous borner au sujet actuel, nous chercherons à faire dépendre

[*] Cette formule peut se démontrer ainsi. L'aire du triangle infiniment petit est égale d'une part à $(1 - \cos\alpha)\, d\psi$, et d'autre part à l'excès sphérique qui est

$$\theta + (\pi - \theta - d\theta) + d\psi - \pi.$$

le second membre de cette équation d'une seule quantité. L'équation de l'ellipsoïde étant, comme de coutume,

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

l'hyperbole focale sera donnée par le système

$$cx = b\rho',$$
$$cz = \sqrt{c^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2},$$

ρ' étant le demi-axe majeur de l'ellipse homofocale passant par un point (x, z) sur l'hyperbole focale.

Mais

$$d\varphi = d\left(\text{arc tang}\,\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{b\sqrt{c^2 - b^2}\,d\rho'}{(\rho'^2 - b^2)\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

et l'on aura, en vertu de l'équation bien connue des tangentes d'une conique qui appartient à un système homofocal,

$$\rho'^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha = \rho^2,$$

ce qui donne

$$\cot^2\alpha = \frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho^2 - b^2},$$

en sorte qu'on a

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = -b\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}\sqrt{\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho'^2 - c^2}}\,\frac{d\rho'}{\rho'^2 - b^2}.$$

Or à l'ombilic, point pour lequel $\rho' = \rho$, l'angle θ devient égal à l'angle polaire ω que fait la ligne géodésique avec la section principale située dans le plan des xz; on a donc

$$\int_\omega^\theta \frac{d\theta}{\sin\theta} = -b\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}\int_\rho^{\rho'}\sqrt{\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho'^2 - c^2}}\,\frac{d\rho'}{\rho'^2 - b^2},$$

ou bien

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega} = e^{-b\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}\int_\rho^{\rho'}\sqrt{\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\rho'^2 - c^2}}\,\frac{d\rho'}{\rho'^2 - b^2}}.$$

Puisque le point (ρ'), sur l'hyperbole focale, répond au point de la ligne géodésique où le plan osculateur a l'inclinaison θ, on verra qu'à l'extrémité du moyen axe on a simultanément

$$\rho' = \infty, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Par conséquent, si l'on joint l'extrémité de l'axe moyen avec un ombilic par une ligne géodésique, elle fera avec la section principale un angle Ω donné par la formule

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega = e^{b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2}}\int_\rho^\infty \sqrt{\frac{\rho'^2-\rho^2}{\rho'^2-c^2}}\frac{d\rho'}{\rho'^2-b^2}}.$$