JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{du dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 71-72.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1853_1_18_A3_0>

SUR L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0\,;$$

Par J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXXVI. — Séance du 28 février 1853.)

En m'occupant (dans une des Notes de l'*Application de l'analyse à la Géométrie*, par Monge, 5^e^ édition, page 597) de la recherche des surfaces pour lesquelles la mesure de courbure en chaque point est constante, j'ai été conduit à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0, \tag{1}$$

et j'en ai donné l'intégrale complète avec deux fonctions arbitraires

$$\lambda = \frac{4a^2 \varphi'(u)\, \psi'(v)\, e^{\varphi(u)+\psi(v)}}{\left[1 \pm e^{\varphi(u)+\psi(v)}\right]^2}, \tag{2}$$

où

$$\varphi'(u) = \frac{d\varphi(u)}{du}, \quad \psi'(v) = \frac{d\psi(v)}{dv}.$$

C'est par des considérations géométriques, tirées naturellement des propriétés de la sphère, que je suis arrivé à ce résultat. Toutefois, dans l'ouvrage cité, je me suis borné à vérifier que l'intégrale (2) satisfait en effet à l'équation (1). Ici même mon but n'est pas d'entrer dans le détail de la méthode un peu indirecte à laquelle je viens de faire allusion, et que je pourrai développer ailleurs, si l'occasion s'en présente. Un autre procédé, purement analytique, plus direct et pour le moins aussi simple, s'est depuis offert à moi pour la recherche de l'intégrale de l'équation (1), et va faire l'objet de cette Note.

Mais d'abord observons qu'en remplaçant $\varphi(u)$ et $\psi(v)$ par $\log \varphi(u)$, $\log \psi(v)$, l'équation (2) se réduit à

$$\lambda = \frac{4a^2 \varphi'(u)\, \psi'(v)}{\left[1 \pm \varphi(u)\, \psi(v)\right]^2}. \tag{3}$$

En remplaçant ensuite $\varphi(u)$ par $-\frac{1}{\varphi(u)}$, on a encore

$$\lambda = \frac{4a^2 \varphi'(u)\, \psi'(v)}{\left[\varphi(u) \mp \psi(v)\right]^2}. \tag{4}$$

C'est à cette dernière forme de l'intégrale, parfaitement équivalente aux deux autres, que l'analyse suivante va très-rapidement nous amener.

Regardons λ comme la dérivée, par rapport à u, d'une certaine fonction θ de u et v, c'est-à-dire posons

$$\lambda = \frac{d\theta}{du}.$$

L'équation (1) pourra s'écrire

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} = \mp \frac{2}{a^2} \frac{d\theta}{du},$$

d'où, en intégrant par rapport à u,

$$\frac{d \log \lambda}{dv} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\lambda} \frac{d\theta}{du} = \mp \frac{2}{a^2}\, \theta + f(v).$$

Multipliant par λ ou $\frac{d\theta}{du}$, et intégrant de nouveau par rapport à u, on a ensuite

$$\frac{d\theta}{dv} = \mp \frac{1}{a^2} \theta^2 + \theta f(v) + \mathrm{F}(v).$$

Soit

$$\theta = \varpi(v)$$

une valeur particulière de θ satisfaisant à cette équation, en sorte que

$$\varpi'(v) = \mp \frac{1}{a^2} \varpi(v)^2 + \varpi(v) f(v) + \mathrm{F}(v);$$

et posons, pour la valeur générale de θ,

$$\theta = \varpi(v) - \frac{1}{\zeta}.$$

Nous en conclurons sur-le-champ

$$\frac{d\zeta}{dv} + \zeta \left[f(v) \pm \frac{2}{a^2} \varpi(v) \right] = \mp \frac{1}{a^2}.$$

L'intégration de cette équation linéaire, dans laquelle u n'entre pas, introduira une fonction arbitraire de u, constante par rapport à v, et, en faisant

$$\frac{1}{a^2} \int e^{\int \left[f(v) \pm \frac{2}{a^2} \varpi(v) \right] dv} . dv = \psi(v),$$

on trouvera

$$\zeta = \frac{1}{a^2 \psi'(v)} [\varphi(u) \mp \psi(v)].$$

De là

$$\theta = \varpi(v) - \frac{a^2 \psi'(v)}{\varphi(u) \mp \psi(v)},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\theta}{du} \text{ ou } \lambda = \frac{a^2 \varphi'(u) \psi'(u)}{[\varphi(u) \mp \psi(v)]^2};$$

ce qu'il fallait démontrer.